

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

PRÓBAÉRTÉKELÉSI VIZSGA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
 - helyes lépés: *kipipálás*
 - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
 - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
 - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kipipálás*
 - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
 - nem érthető rész: *kérdőjel és/vagy hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészeire előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszerkesztésekért, részleépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során a **zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvény táblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése ($\sin$, $\cos$, $\tan$, $\log$ és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
$B = \{2; 3; 7; 13\}$	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
Összesen:	2 pont	

2.		
16	2 pont	
Összesen:	2 pont	

3.		
A) Hamis	2 pont	<i>2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.</i>
B) Igaz		
C) Hamis		
Összesen:	2 pont	

4.		
B	2 pont	
Összesen:	3 pont	

5.		
$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$	1 pont	
Az egyenlet rendezve: $x^2 - 6x - 7 = 0$	1 pont	
$x_1 = -1, x_2 = 7$	1 pont	
Összesen:	2 pont	

6.		
0,868 (m ³)	2 pont	$\approx 0,87$
Összesen:	2 pont	

7.		
Az adatokat feltüntető helyes ábra, a szög nagysága α .	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül jól dolgozik.</i>
$\sin \alpha = \frac{0,3}{5} = 0,06$	1 pont	<i>Az 5 m^2 területű 1 m szélességű rámpa hossza 5 m lesz.</i>
Az emelkedési szög $3,4^\circ$.	1 pont	<i>Nem megfelelően kerekített szög esetén nem jár a pont.</i>
Összesen:	3 pont	

8.		
Fél liter = 500 cm^3	1 pont	
Ha a doboz $d \text{ cm}$ átmérőjű, akkor a térfogata: $\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 14,2 = 500,$	1 pont	<i>Sugárral számolva: $r^2 \cdot \pi \cdot 14,2 = 500$</i>
ahonnan $d \approx 6,7 \text{ cm}$.	1 pont	<i>$r \approx 3,35 \text{ cm}$ $d \approx 6,7 \text{ cm}$</i>
Összesen:	3 pont	

9.		
a) például $(2; -1)$	1 pont	
b) $2x - y = 4$	2 pont	
Összesen:	3 pont	

10.		
Terjedelem: 3	1 pont	
Medián: 4	1 pont	
Összesen:	2 pont	

11.		
Összes eset: $6 \cdot 6 = 36$	1 pont	
A kedvező esetek (sárga; zöld): (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 6), összesen 9.	2 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó más módon (pl. ábrával) határozza meg helyesen a kedvező esetek számát. Ha nem ír indoklást, maximum 1 pont adható.</i>
A kérdéses valószínűség $\frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

12.		
5400 (Ft)	2 pont	
Összesen:	2 pont	

II. A

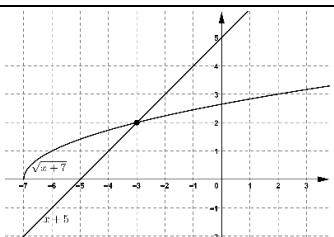
13. a)		
A sorozat hányadosát q -val jelölve: $2q \cdot 2q^3 = 156,25$	1 pont	$a_2 = a_1 \cdot q$ $a_4 = a_1 \cdot q^3$
$q_1 = 2,5; q_2 = -2,5$	2 pont	
Ha a hányados 2,5, akkor a sorozat első 6 tagjának összege: $S_6 = 2 \cdot \frac{2,5^6 - 1}{2,5 - 1} =$	1 pont	
$= 324,19$	1 pont	
Ha a hányados $-2,5$, akkor a sorozat első 6 tagjának összege: $S_6 = 2 \cdot \frac{(-2,5)^6 - 1}{(-2,5) - 1} =$	1 pont	
$= -138,94$	1 pont	
Összesen:	7 pont	

13. b) első megoldás		
A szöveg alapján felírható egyenlet: $216 = \frac{(2 \cdot 7 + (n - 1) \cdot 2)}{2} \cdot n$	1 pont	$S_n = \frac{(2a_1 + (n - 1) \cdot d)}{2} \cdot n$
Ebből $n^2 + 6n - 216 = 0$	2 pont	$2n^2 + 12n - 432 = 0$
A negatív gyök (-18) a feladatnak nem megoldása.	1 pont	
$n = 12$	1 pont	
A sorozat első 12 tagjának összege lesz 216.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

13. b) második megoldás		
A szöveg alapján felírható egyenlet: $216 = \frac{7 + 7 + (n - 1) \cdot 2}{2} \cdot n$	1 pont	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
Ebből $n^2 + 6n - 216 = 0$	2 pont	$2n^2 + 12n - 432 = 0$
A negatív gyök (-18) a feladatnak nem megoldása.	1 pont	
$n = 12$	1 pont	
A sorozat első 12 tagjának összege lesz 216.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a sorozat tagjait egyenként kiszámolva vizsgálja a kívánt összeg elérését, és jó eredményre jut, akkor a teljes pontszám jár.

14. a) első megoldás		
A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $x \geq -7$, értékészlete miatt pedig $x \geq -5$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel mindkét gyököt ellenőrzi.</i>
Négyzetre emelve az egyenlet mindkét oldalát: $x + 7 = 25 + 10x + x^2$	1 pont	
Rendezve: $x^2 + 9x + 18 = 0$	1 pont	
$x_1 = -6$; $x_2 = -3$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel: $x_1 = -6$ nem megoldása az egyenletnek; $x_2 = -3$ megoldása az egyenletnek.	1 pont	<i>A $[-5; \infty]$ intervallumon ekvivalens átalakításokat végeztünk, így $x_1 = -6$ nem megoldása az egyenletnek; $x_2 = -3$ megoldása az egyenletnek.</i>
Összesen:	5 pont	

14. a) második megoldás		
Az $x \mapsto \sqrt{x+7}$ függvény ábrázolása.	2 pont	
Az $x \mapsto 5 + x$ függvény ábrázolása ugyanabban a koordináta-rendszerben.	1 pont	
A grafikonok közös pontjának első koordinátáját leolvassva: $x = -3$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

14. b)		
$\frac{3x+6}{21} + \frac{42+7x}{21} = 2x - 10 - 14$	1 pont	
$\frac{10x+48}{21} = 2x - 24$	1 pont	
$x = 17,25$	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

15. a)		
A trapéz magassága legyen m . A D pont merőleges vetülete az AB oldalra legyen E pont. Az AED derékszögű háromszögben meghatározzuk m -et:	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az ábrán jelezte meg a gondolatmenetét.</i>
$\sin 76^\circ = \frac{m}{4,1}$	1 pont	
$m = \sin 76^\circ \cdot 4,1 \approx 3,98 \text{ cm}$	1 pont	$m \approx 4 \text{ cm}$
Az $ABCD$ trapéz C csúcsánál lévő belső szög legyen γ . A C pont merőleges vetülete az AB oldalra legyen F pont. Az FBC derékszögű háromszög C csúcsánál lévő belső szöge $\gamma - 90^\circ$, így felírható, hogy	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az ábrán jelezte meg a gondolatmenetét.</i>
$\cos(\gamma - 90^\circ) = \frac{3,98}{5} \approx 0,796$	1 pont	$\cos(\gamma - 90^\circ) = \frac{4}{5}$
amiből $\gamma \approx 127,3^\circ$	1 pont	$\gamma \approx 126,9^\circ$
Összesen:	6 pont	

15. b)		
Az AED háromszögre felírjuk a Pitagorasz-tételt: $AE^2 = 4,1^2 - 3,98^2$	1 pont	<i>Vagy $m = 4$-gyel számolva:</i>
$AE \approx 0,98 \text{ cm}$	1 pont	$AE = 0,9 \text{ cm}$
Az FBC háromszögre felírjuk a Pitagorasz-tételt: $FB^2 = 5^2 - 3,98^2$	1 pont	<i>Vagy $m = 4$-gyel számolva:</i>
$FB \approx 3,03 \text{ cm}$	1 pont	$FB = 3 \text{ cm}$
$DC = 8 - 0,98 - 3,03 \approx 4 \text{ cm}$	1 pont	$DC = 8 - 0,9 - 3 \approx 4,1 \text{ cm}$
Összesen:	5 pont	

15. c)		
$T = \frac{8 + 4}{2} \cdot 3,98 =$	1 pont	$T = \frac{8 + 4,1}{2} \cdot 4 =$
$= 23,9 \text{ cm}^2$	1 pont	$= 24,2 \text{ cm}^2$
Összesen:	2 pont	

II. B

16. a)		
$\lg O_j = 0,64 \cdot \lg 9 + 0,2$	2 pont	<i>A feladat szövegében megadott képlet használatában elkövetett elvi hiba esetén ez a 3 pont nem jár.</i>
$\lg O_j \approx 0,811$	1 pont	
$O_j \approx 6,467$	1 pont	
8 óra alatt $8 \cdot 6,467 = 51,736 \approx 51$ hibátlan oldalt készít el a szerkesztő.	1 pont	<i>Más kerekítés nem fogadható el.</i>
Összesen:	5 pont	

16. b)		
$\lg 4,4 = 0,64 \cdot \lg O_f + 0,2$	2 pont	<i>A feladat szövegében megadott képlet használatában elkövetett elvi hiba esetén ez a 4 pont nem jár.</i>
$\lg O_f = \frac{\lg 4,4 - 0,2}{0,64} \approx$	1 pont	
$\approx 0,693$	1 pont	
$O_f \approx 4,9 \approx 4$ 1 óra alatt 4 egész oldalt dolgozott fel.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

16. c)		
$O_j = O_f$ felismerése.	2 pont	<i>Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a 2 pont.</i>
Legyen a keresett oldalszám O . $\lg O = 0,64 \cdot \lg O + 0,2$	1 pont	$O = O_j = O_f$
$\lg O = \frac{0,2}{0,36} = 0,5$	2 pont	
$O \approx 3,6$	1 pont	
A legkisebb oldalmennyiség, amire az összefüggés még értelmezhető, 3,6 oldal óránként.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

17. a)		
Az első ütemterv szerint a naponta megírt oldalak száma egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja $a_1 = 0,5$, első 6 tagjának összege pedig $S_6 = 21$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A sorozat differenciáját d -vel jelölve: A feladat szövege alapján $21 = \frac{2 \cdot 0,5 + 5d}{2} \cdot 6$.	1 pont	$S_n = \frac{(2a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} \cdot n$
Amiből $d = 1,2$.	1 pont	
Az első ütemterv szerint Petinek naponta legalább 1,2 oldallal kell többet írnia, mint a megelőző napon.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

17. b)		
Az második ütemterv szerint a naponta megírt oldalak száma egy olyan mértani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja $a_1 = 0,5$, hányadosa $q = 1,456$, első n tagjának összege pedig $S_n = 21$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A feladat szövege alapján $21 = 0,5 \cdot \frac{1,456^n - 1}{1,456 - 1}$	1 pont	$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
$1,456^n = 20,152$	1 pont	
$n = \frac{\lg 20,152}{\lg 1,456} =$	1 pont	$n = \log_{1,456} 20,152$
$= 7,994 \approx 8$	1 pont	
A második ütemterv szerint a 8. napon fejezi be.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

17. c)		
Az évfolyamon tanuló diákok száma legyen n . Ekkor a 7738 szót író diákok száma $0,35n$, az 5373 szót író diákoké $0,65n$.	1 pont	
A fogalmazásokba írt szavak összege: $0,35n \cdot 7738 + 0,65n \cdot 5373 = 6200,75n$,	2 pont	$0,35 \cdot 7738 + 0,65 \cdot 5373 =$ $= 6200,75 \approx 6201$
átlagos pedig $\frac{6200,75n}{n} = 6200,75 \approx 6201$.	1 pont	<i>számolás esetén is jár a megfelelő pontszám.</i>
Összesen:	4 pont	

17. d)		
A feladat szövege alapján: $27 = 0,75 \cdot 44 + b$	2 pont	
$b = -6$	1 pont	
Összesen:	3 pont	

18. a)		
A téglatest rövidebb éle legyen a , hosszabb éle így $3a$. A téglatest A csúcsából kiinduló legrövidebb lapátló a négyzetlap lapátlója, ami legyen x . A testátló legyen y . x , y és az egyik $3a$ él egy derékszögű háromszöget alkot.	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
$x = \sqrt{2}a$	1 pont	
Az A csúcsnál lévő szöget α -val jelölve: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3a}{\sqrt{2}a} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,12$	1 pont	
amiből $\alpha = 64,8^\circ$	1 pont	
Összesen:	5 pont	

18. b)		
A foksámokhoz tartozó csúcsokat jelöljük rendre A , B , C , D , E , F , G és H betűvel. A H csúcsból minden másik csúcsba fut egy él.	1 pont	
Mivel A fokszáma 1, A -ba csak H -ból fut él.	1 pont	
A G csúcsból fusson él az A csúcsot kivéve minden csúcsba.	1 pont	
Mivel B fokszáma 2, B -be csak H -ból és G -ből fut él.	1 pont	
Ekkor az F csúcsot már csak C , D és E csúcsokkal lehet összekötni, vagyis nem lehet a fokszáma 6.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy olyan 8 csúcsú gráfot rajzol, amely tükrözi a feladat megértését, de szövegesen nem indokolja az ellentmondást, akkor 3 pontot kaphat.

18. c)		
Mindegyik él két csúcsot köt össze, így az egyes csúcsokból induló éleket megszámlálva minden élt kétszer számolunk meg.	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
Így az összes fókszám összege éppen kétszerese az élek számának.	1 pont	
Az élek száma tehát: $\frac{3+1+5+3+3+4+5}{2} = 12$	1 pont	
Összesen:	3 pont	

18. d)		
A kör sugara $\frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha átmérővel jól számol.</i>
Az alapkör területe: $T_{\text{kör}} = 5^2 \cdot \pi = 25\pi \approx 78,54 \text{ cm}^2$	1 pont	<i>Az ívhossz: $2 \cdot 5 \cdot \pi = 10\pi \approx 31,42 \text{ cm}$</i>
A palást területe: $T_{\text{palást}} = 5 \cdot \pi \cdot 15 = 75\pi \approx 235,6 \text{ cm}^2$	1 pont	<i>A palást területe: $\frac{10\pi \cdot 15}{2} = 235,6 \text{ cm}^2$</i>
$A_{\text{kúp}} = 25\pi + 75\pi = 100\pi \approx 314,2 \text{ cm}^2$	1 pont	
Összesen:	4 pont	