

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

PRÓBAÉRTÉKELÉSI VIZSGA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám** a mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
 - helyes lépés: *kipipálás*
 - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
 - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
 - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kipipálás*
 - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
 - nem érthető rész: *kérdőjel és/vagy hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

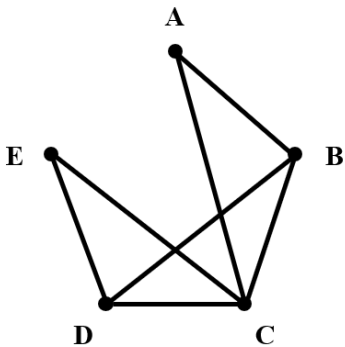
Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészeire előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszerkesztésekért, részleépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során a **zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvény táblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése ($\sin$, $\cos$, $\tan$, $\log$ és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont**.
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
8	2 pont	
Összesen:	2 pont	

2.		
	3 pont	
Összesen:	3 pont	

3.		
A és D	2 pont	<i>1 jó válasz, vagy 2 jó és 1 rossz válasz esetén 1 pont jár.</i>
Összesen:	2 pont	

4.		
C	2 pont	
Összesen:	2 pont	

5.		
4	2 pont	
Összesen:	2 pont	

6.		
A logaritmus definíciója alapján $3^1 = \frac{x}{9}$, amiből	2 pont	
$x = 27$	1 pont	
Összesen:	3 pont	

7.		
A 25%-os emelés az árat 1,25-szörösére,	1 pont	
a 6%-os csökkentés $1,25 \cdot 0,94 = 1,175$ -szörösére változtatta.	1 pont	
Ez 17,5%-os drágulásnak felel meg.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

8.		
A kérdézet oldal hosszát a -val jelölve, a szinusz-tétel alapján: $\frac{a}{12} = \frac{\sin 65^\circ}{\sin 98^\circ}$	2 pont	
Ebből $a = \frac{\sin 65^\circ}{\sin 98^\circ} \cdot 12 \approx 11 \text{ cm}$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

9.		
1 m^3 föld ára $2 \cdot 3500 = 7000 \text{ Ft}$ A virágládába töltött föld mennyisége: $\frac{1960}{7000} = 0,28 \text{ m}^3$, ami	1 pont	
$280\,000 \text{ cm}^3$.	1 pont	$140 \text{ cm} = 1,4 \text{ m}$ és $50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$
A belső magasság $\frac{280\,000}{140 \cdot 50} = 40 \text{ cm}$.	1 pont	$\frac{0,28}{1,4 \cdot 0,5} = 0,4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$
Összesen:	3 pont	

10.		
$g + k - n$	2 pont	
Összesen:	2 pont	

11.		
3, 5, 5, 5	2 pont	
Összesen:	2 pont	

12.		
Az egyedi póló összköltsége 7000 Ft.	1 pont	
A minta nélküli póló költsége ennek 0,4-e.	1 pont	<i>Ez a pont a 2800 és a 7000 arányának bármilyen formában történő meghatározásáért jár.</i>
A kérdéses körcikk középponti szöge $0,4 \cdot 360^\circ = 144^\circ$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

II. A

13. a)

A b és c oldal által bezárt szöget α -val jelölve felírjuk a szinusztételt: $\frac{\sin \alpha}{\sin 78^\circ} = \frac{10}{11}$	1 pont	
$\sin \alpha = \frac{10}{11} \cdot \sin 78^\circ \approx 0,889$	1 pont	
$\alpha = 62,8^\circ$	1 pont	
Az a és b oldal által bezárt szöget γ -val jelölve: $\gamma = 180^\circ - 78^\circ - 62,8^\circ = 39,2^\circ$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

Megjegyzés: Ha a háromszög belső szögeinek összege nem 180° , maximum 3 pont adható.

13. b) első megoldás

A háromszög c oldalára a koszinusztételt felírva:	1 pont	Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.
$c^2 = 10^2 + 11^2 - 2 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \cos 39,2^\circ$	1 pont	
$c = 7,1 \text{ cm}$	1 pont	
Összesen:	3 pont	

13. b) második megoldás

A háromszög c oldalára a szinusztételt felírva:	1 pont	Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.
$\frac{\sin 39,2^\circ}{\sin 78^\circ} = \frac{c}{11}$	1 pont	
$c = \frac{\sin 39,2^\circ}{\sin 78^\circ} \cdot 11 = 7,1 \text{ cm}$	1 pont	
Összesen:	3 pont	

13. c) első megoldás		
Az a és d oldal hosszának (egyben a két háromszög hasonlóságának) aránya: $\frac{15}{10} = 1,5$.	1 pont	
$e = 1,5 \cdot 11 = 16,5 \text{ cm}$	1 pont	<i>DEF háromszögben e oldal felel meg ABC háromszög b oldalának.</i>
$T_{DEF} = \frac{15 \cdot 16,5 \cdot \sin 39,2^\circ}{2} =$	1 pont	$T_{DEF} = \frac{d \cdot e \cdot \sin \gamma}{2}$
$= 78,2 \text{ cm}^2$	1 pont	
A DEF háromszög területe $78,2 \text{ cm}^2$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

13. c) második megoldás		
Az a és d oldal hosszának (egyben a két háromszög hasonlóságának) aránya: $\lambda = \frac{15}{10} = 1,5$.	1 pont	
$T_{ABC} = \frac{10 \cdot 11 \cdot \sin 39,2^\circ}{2} = 34,76 \text{ cm}^2$	1 pont	$T_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$
Terület esetén a hasonlósági arányszám négyzetével szorzunk.	1 pont	
$T_{DEF} = \lambda^2 \cdot T_{ABC} = 1,5^2 \cdot 34,76 = 78,2 \text{ cm}^2$	1 pont	
A DEF háromszög területe $78,2 \text{ cm}^2$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

14. a)		
Keressük a következő egyenlet megoldását: $450 = 4 \cdot \frac{1,4^n - 1}{1,4 - 1}$	1 pont	
$46 = 1,4^n$	2 pont	
Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve: $\lg 46 = \lg 1,4^n$	1 pont	
$n = \frac{\lg 46}{\lg 1,4}$	1 pont	$n = \log_{1,4} 46$
$n \approx 11,38$	1 pont	
Ez azt jelenti, hogy a sorozatnak legalább 12 tagját kell összeadni, hogy az összeg elérje az 450-et.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

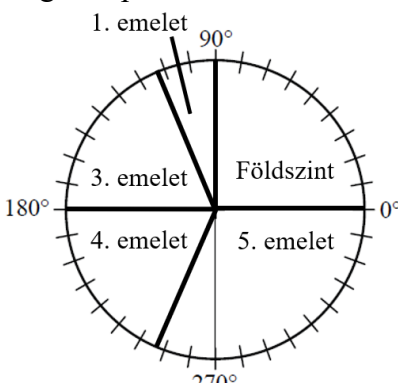
Megjegyzések: Ha a vizsgázó a sorozat tagjait egyenként kiszámolva vizsgálja a kívánt összeg elérését, és jó eredményre jut, akkor a teljes pontszám jár. Ha a vizsgázó egyenlet helyett egyenlőtlenséggel dolgozik, akkor a megfelelő pontok járnak.

14. b)		
A sorozat első tagját a_1 -gyel jelölve: $588 = \frac{2a_1 + 13 \cdot 6}{2} \cdot 14$	1 pont	$S_n = \frac{(2a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} \cdot n$
$84 = 2a_1 + 78$	1 pont	$42 = a_1 + 39$
$a_1 = 3$	1 pont	
$a_3 = 3 + 2 \cdot 6 = 15$	1 pont	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
A sorozat 3. tagja 15.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

15. a)		
Szintek száma mindkét épületben: 6 Az A épületben elkészült irodák száma: 16 A B épületben elkészült irodák száma: 11	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az A épület egy szintjén elkészült irodahelyiségek átlagos száma: $\frac{16}{6} = 2,67$	1 pont	
A B épület egy szintjén elkészült irodahelyiségek átlagos száma: $\frac{11}{6} = 1,83$	1 pont	
Összesen:	3 pont	

15. b) első megoldás		
A feltételnek megfelelő szintek száma az A épületben: 4	1 pont	
A feltételnek megfelelő szintek száma a B épületben: 3	1 pont	
Összes eset száma: $6 \cdot 6 = 36$	1 pont	
Kedvező esetek száma: $4 \cdot 3 = 12$	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3} = 0,3$	1 pont	
Összesen:	5 pont	

15. b) második megoldás		
A feltételnek megfelelő szintek száma az A épületben: 4	1 pont	
A feltételnek megfelelő szintek száma a B épületben: 3	1 pont	
A kérdéses valószínűség az A épületben: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	1 pont	
A kérdéses valószínűség a B épületben: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	1 pont	
A két esemény együttes valószínűsége: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = 0,3$	1 pont	
Összesen:	5 pont	

15. c)		
Egy irodához tartozó középponti szög: $22,5^\circ$	1 pont	
3 irodához $67,5^\circ$, 4 irodához 90° , 5 irodához $112,5^\circ$ tartozik.	1 pont	2 helyes középponti szög esetén is jár az 1 pont.
Helyes kördiagram, például: 	2 pont	Ha nincs jelmagyarázat a körcikkek mellett, akkor 1 pont adható.
Összesen:	4 pont	

II. B

16. a)		
Az évenkénti csökkenés szorzószáma legyen x . (2016 után a 2022-es évvel bezárólag 6 év telik el.) $20\,286 \cdot x^6 = 11\,977$	1 pont	
$x^6 = 0,5904$	1 pont	
$x = \sqrt[6]{0,5904} = 0,916$ $1 - 0,916 = 0,084$	1 pont	
Az évenkénti csökkenés 8,4%.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

16. b)		
Ha 2022 után y év múlva lesz a jelentkezők száma a 2022-es érték 60,2%-a, akkor $0,93^y = 0,602$	1 pont	$11\,977 \cdot 0,602 \approx 7210$ $11\,977 \cdot 0,93^y = 7210$
Mindkét oldal tízes alapú logaritmus is egyenlő: $\log 0,93^y = \log 0,602$	1 pont*	$y = \log_{0,93} 0,602$
$y = \frac{\lg 0,602}{\lg 0,93} \approx$	1 pont	
≈ 7	1 pont	
2029-ben csökkenne a jelentkezők száma a 2022-es évének a 60,2%-ára.	1 pont	$2022 + 7 = 2029$
Összesen:	5 pont	

Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha az a gondolat csak a megoldás során derül ki.

16. c)		
Az évenkénti növekedés szorzószáma (növekedési ráta) 1,2.	1 pont	<i>Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.</i>
A 7. osztályt követően a 12. osztályig bezárólag 5 tanév telik el.	1 pont	
$49,4 \cdot 1,2^5 = 122,92 \approx 123$	1 pont	
12. osztályban kb. 123 percet kell naponta tanulnia egy diáknak a 4,5-es átlagért.	1 pont	<i>Más kerekítés nem fogadható el.</i>
Összesen:	4 pont	

16. d)		
A 7. osztályt megelőző tanévek esetén tanévenként 1,12-dal kell osztani a napi tanulásmennyiséget.	1 pont	<i>Ha ezek a gondolatok a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.</i>
1. osztálytól 7. osztályig 6 tanév telik el.	1 pont	
$\frac{49,4}{1,12^6} = 25,03 \approx 25$	1 pont	<i>26-ra való kerekítés is elfogadható.</i>
1. osztályban kb. 25 percet kell tanulni naponta a 4,5-es átlaghoz.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

Megjegyzések: Kerekítési hibaért a 16. c) és 16. d) feladat értékelésekor összesen csak 1 pont vonható le.

17. a)		
Az első egyenletből x -et kifejezve: $x = 4y - 10$.	1 pont	
Ezt behelyettesítve a második egyenletbe: $(4y - 10 + 4)^2 + (y - 1,5)^2 = 4,25$	1 pont	
$16y^2 - 48y + 36 + y^2 - 3y + 2,25 = 4,25$	2 pont	
$17y^2 - 51y + 34 = 0$	1 pont	$y^2 - 3y + 2 = 0$
$y_1 = 1$ és $y_2 = 2$	1 pont	
Ebből $x_1 = -6$ és $x_2 = -2$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

17. b) első megoldás		
Ha $x + 5 < 0$, akkor $x < -5$, ezért	1 pont	
$2 - x \geq 0$, vagyis $2 \geq x$.	1 pont	
A -5 -nél kisebb valós számok halmazának minden eleme megoldás.	1 pont	$x \in] - \infty; -5[$
Ha $x + 5 > 0$, akkor $x > -5$, ezért	1 pont	
$2 - x \leq 0$, vagyis $2 \leq x$	1 pont	
A -5 -nél nagyobb valós számok halmazán minden $2 \leq x$ valós szám megoldás.	1 pont	$x \in [2; \infty[$
A megoldáshalmaz: $x < -5$ vagy $2 \leq x$	1 pont	$x \in] - \infty; -5[\cup [2; \infty[$
Összesen:	7 pont	

17. b) második megoldás		
A vizsgázó megrajzolja (vázolja) az $x \mapsto 2 - x$ és az $x \mapsto x + 5$ elsőfokú függvények grafikonját, vagy a számláló és a nevező előjelét külön-külön helyesen állapítja meg számegyenes segítségével vagy szövegesen indokolva.	2-2 pont	<i>Ha a függvények monotonitása és zérushelye is jól jelenik meg az ábrán, akkor jár ez a 2-2 pont.</i>
Megállapítja, hogy a $] -\infty; -5[$ intervallum elemei mind megoldások.	1 pont	<i>Szöveges vagy a számegyenes segítségével, ábrával alátámasztott indoklás egyaránt elfogadható.</i>
Megállapítja, hogy a $[-5; 2[$ intervallum elemei nem megoldások.	1 pont	
Megállapítja, hogy a $[2; \infty[$ intervallum elemei mind megoldások.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az 5-öt elfogadja megoldásként, akkor ezért 2 pontot veszítsen. Ha a vizsgázó a 2-t nem adja meg megoldásként (nem vizsgálja az egyenlőséget), akkor ezért 1 pontot veszítsen.

17. c)		
A kedvező esetek száma 2,	1 pont	<i>Négyzetszámok: 16, 144</i>
így a kérdéses valószínűség $\frac{2}{5}$.	1 pont	
Összesen:	2 pont	

18. a)		
A csonkakúp alakú bábutest alapkörének sugara 1,25 cm, illetve fedőkörének sugara 0,5 cm, és a bábu test részének magassága $3,5 - 1 = 2,5$ cm.	2 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$V_{test} = \frac{(0,5^2 + 0,5 \cdot 1,25 + 1,25^2) \cdot \pi \cdot 2,5}{3} \approx$	1 pont	$V = \frac{(r^2 + r \cdot R + R^2) \cdot \pi \cdot M}{3}$
$\approx 6,4 \text{ cm}^3$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

18. b)		
A bábu feje teljesen eltakarja a csonkakúp fedőkörét. A bábu felszínét úgy kapjuk meg, hogy a csonkakúp palástjának ($T_{palást}$) és alapkörének (T_{alap}) területéhez hozzáadjuk a kocka felszínét (A_{kocka}), amiből kivonjuk a csonkakúp fedőkörének területét ($T_{fedő}$). (Hiszen ennyit takar ki a fedőkör a kockából.)	2 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A bábutest alkotója (Pitagorasz-tétellel): $a = \sqrt{0,75^2 + 2,5^2} = 2,61 \text{ cm}$	1 pont	$1,25 - 0,5 = 0,75 \text{ cm}$
$T_{alap} = 1,25^2 \cdot \pi \approx 4,91 \text{ cm}^2$	1 pont	
$T_{palást} = (0,5 + 1,25) \cdot \pi \cdot 2,61 = 14,35 \text{ cm}^2$	1 pont	$T_{palást} = (r + R) \cdot \pi \cdot a$
$A_{kocka} = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6 \text{ cm}^2$	1 pont	<i>A feladat megoldható úgy is, hogy kiszámoljuk a teljes kocka és a teljes csonkakúp felszínét, majd ebből vonjuk ki a fedőlap területét kétszer (ott van "összeragasztva" a két test, így két fedőlapnyi területtel lesz kevesebb a felszín).</i>
$T_{fedő} = 0,5^2 \cdot \pi = 0,25\pi \approx 0,79 \text{ cm}^2$	1 pont	
$A_{bábu} = 4,91 + 14,35 + 6 - 0,79 = 24,5 \text{ cm}^2$	1 pont	
Összesen:	8 pont	

18. c)		
1-féle olyan fotó készülhet, amin három ugyanolyan figura van. (három gyalog)	1 pont	
Két ugyanolyan, és egy harmadik eltérő figurát $4 \cdot 1 \cdot 3 = 12$ -féleképpen tudunk kiválasztani,	1 pont	
majd (attól függően, hogy hova tesszük az eltérő figurát) ezekből $12 \cdot 3 = 36$ -féle sorrendet tudunk képezni.	1 pont	
Három különböző figurát $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ -féleképpen tudunk egymás mellé állítani.	1 pont	
Így az összes lehetséges fotó száma: $1 + 36 + 24 = 61$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	