

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám** a mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
 - helyes lépés: *kipipálás*
 - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
 - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
 - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kipipálás*
 - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
 - nem érthető rész: *kérdőjel és/vagy hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészeire előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszerkesztésekért, részleépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során a **zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvény táblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése ($\sin$, $\cos$, $\tan$, $\log$ és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont**.
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
$B \cap A = \{2; 5; 9; 10\}$	1 pont	
$(B \cup C) \setminus A = \{3; 7; 8; 11; 19\}$	2 pont	
Összesen:	3 pont	

2.		
36	2 pont	
Összesen:	2 pont	

3.		
C és D	2 pont	<i>1 jó válasz, vagy 2 jó és 1 rossz válasz esetén 1 pont jár.</i>
Összesen:	2 pont	

4.		
A 7. tag $0,8 \cdot 2^4 =$	1 pont	
$= 12,8.$	1 pont	
Az első tag $\frac{0,8}{2^2} = 0,2$, így az első 9 tag összege $0,2 \cdot \frac{2^9 - 1}{2 - 1} =$	1 pont	
$= 102,2.$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

5.		
$\frac{x+2}{x-2}$	3 pont	<i>Ha a vizsgázó a számlálót, illetve a nevezőt jól alakítja szorzattá, akkor ezért 1-1 pontot kaphat.</i>
Összesen:	3 pont	

6.		
45%	2 pont	
Összesen:	2 pont	

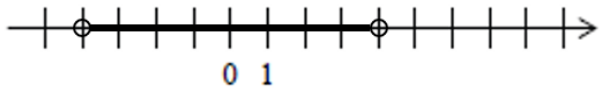
7.		
A másik befogó hosszát a -val jelölve $\operatorname{tg} 43^\circ = \frac{7}{a}$	2 pont	
ebből $a = \frac{7}{\operatorname{tg} 43^\circ} \approx 7,5 \text{ cm}$	1 pont	
Összesen:	3 pont	

8.		
1,76 (m ²)	2 pont	
Összesen:	2 pont	

9.		
6,4	2 pont	
Összesen:	2 pont	

10.		
Módusz: 4	1 pont	
Medián: 4	1 pont	
Terjedelem: 3	1 pont	
Összesen:	3 pont	

11.		
81	2 pont	3^4
Összesen:	2 pont	

12.		
	2 pont	Egyenlőtlenség megoldása: $-4 < x < 4$
Összesen:	2 pont	

II. A

13. a) első megoldás		
A korcsolyapályát látogató emberek száma: $\frac{277}{0,57} =$ $= 485,96 \approx 486$ (fő)	1 pont	
A kikölcsönzött gyerekkorcsolyák száma: $0,29 \cdot 486 = 140,94 \approx 141$ (db)	1 pont	
A gyerekkorcsolyák kölcsönzéséből befolyt bevétel: $141 \cdot 2300 = 324\,300$ Ft	1 pont	
A kikölcsönzött pedagóguskorcsolyák száma: $0,14 \cdot 486 = 68,04 \approx 68$ (db)	1 pont	$486 - 277 - 141 = 68$
A pedagóguskorcsolyák kölcsönzéséből befolyt bevétel: $68 \cdot 2700 = 183\,600$ Ft	1 pont	
324 300 Ft bevétel folyt be a gyerekkorcsolyák és 183 600 Ft a pedagóguskorcsolyák kölcsönzéséből.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

13. a) második megoldás		
A korcsolyapályát látogató emberek száma: $\frac{277}{0,57} =$ $= 485,96 \approx 486$ (fő)	1 pont	
A kikölcsönzött gyerekkorcsolyák száma: $0,29 \cdot 486 \approx 141$ (db)	1 pont	<i>A kikölcsönzött pedagóguskorcsolyák száma: $0,14 \cdot 486 \approx 68$ (db)</i>
A gyerekkorcsolyák kölcsönzéséből befolyt bevétel: $141 \cdot 2300 = 324\,300$ Ft	1 pont	<i>A pedagóguskorcsolyák kölcsönzéséből befolyt bevétel: $68 \cdot 2700 = 183\,600$ Ft</i>
A felnőttkorcsolyák kölcsönzéséből befolyt bevétel: $277 \cdot 3000 = 831\,000$ Ft	1 pont	
A pedagóguskorcsolyák kölcsönzéséből származó bevételt megkapjuk, ha a teljes befolyt összegből kivonjuk a gyerekkorcsolyák és a felnőttkorcsolyák kölcsönzéséből származó bevételt: $1\,338\,900 - 324\,300 - 831\,000 = 183\,600$ Ft	1 pont	<i>Pedagóguskorcsolyák kölcsönzéséből befolyt bevétel: $1\,338\,900 - 183\,600 - 831\,000 = 324\,300$ Ft</i>
324 300 Ft bevétel folyt be a gyerekkorcsolyák és 183 600 Ft a pedagóguskorcsolyák kölcsönzéséből.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyik vagy mindkét típusú kikölcsönzött korcsolyák számát nem kerekíti egész számra, legfeljebb 1 pontot veszítsen.

13. b)		
A (percben megadott) napi feladatok elvégzési idejei egy számtani sorozat tagjai, melynek első tagja a_1 , differenciája d . Az első 17 tag összegét kell kiszámolnunk.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A feltételek szerint: $a_1 + d + a_1 + 2d = 77$, és $a_1 + 5d = 49$	1 pont	$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$
A második egyenletből a_1 -et kifejezve és az első egyenletbe helyettesítve: $2(49 - 5d) + 3d = 77$,	1 pont	
ahonnan $7d = 21$,	1 pont	
így $d = 3$ és $a_1 = 34$	1 pont	
$S_{17} = \frac{2 \cdot 34 + 16 \cdot 3}{2} \cdot 17 =$	1 pont	$S_n = \frac{(2 \cdot a_1 + (n - 1) \cdot d)}{2} \cdot n$
$= 986$ percbe telik októberben a kérdéses munkák elvégzése.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

14. a)		
Az $x^2 + 2x - 3 = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = -3$ és $x_2 = 1$	2 pont	
Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív,	1 pont	<i>Ez a pont jár egy megfelelő ábráért is.</i>
így az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $] - 3; 1[$.	2 pont	$-3 < x < 1$
Összesen:	5 pont	

14. b)		
Jelölje a kék kocka tömegét g-ban x , a pirosét pedig y A szöveg alapján: $\begin{cases} 3x + y = 217 \\ 2x + 3y = 329 \end{cases}$	1 pont	
Az első egyenletből kifejezve y -t: $y = 217 - 3x$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe: $2x + 3 \cdot (217 - 3x) = 329$ $7x = 322$ Ebből $x = 46$, és $y = 79$	3 pont	<i>Az első egyenlet mindkét oldalát megszorozva 3-mal:</i> $9x + 3y = 651$ <i>Az első egyenletből kivonva a másodikat:</i> $7x = 322$ $x = 46, y = 79$
A kék kocka tömege 46 g, a piros kocka tömeg 79 g.	1 pont*	
Ellenőrzés a szöveg alapján: Három kék és egy piros kocka tömege 217 g, két kék és három piros kocka tömege pedig valóban 329 g.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a vizsgázó a változók jelentését (mértékegységgel együtt) az egyenletrendszer felírásakor egyértelműen azonosította.*

15. a)		
Legyen a csökkenési ráta x .	1 pont	
Ekkor $52 \cdot x^7 = 19$.	2 pont	
$x^7 = \frac{19}{52} \approx 0,365$,	1 pont	
amiből $x = \sqrt[7]{\frac{19}{52}}$,	1 pont	
$x \approx 0,87$,	1 pont	
$1 - 0,87 = 0,13$.	1 pont	
Alkalmanként 13%-kal csökkent a nézők száma.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

15. b)		
A vetített anyagok hosszai egy $q = 1,05$ hányadosú mértani sorozat tagjai, melyben $a_2 = 37$.	1 pont	<i>Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.</i>
$a_6 = 37 \cdot 1,05^4 \approx$	1 pont	
$\approx 44,974 \approx 45$	1 pont	
A hatodik vetítés 45 perces volt.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

II. B

16. a)		
AB és BC oldalak egyenes egyenleteiből a következő egyenletrendszert tudjuk felírni (ahol metszik egymást ott lesz a B pont): $\begin{cases} x + 4y = 19 \\ -5x + 2y = -7 \end{cases}$	1 pont	
Az első egyenletből kifejezzük x -et: $x = 19 - 4y$,	1 pont	A 2. egyenlet kétszerese: $-10x + 4y = -14$
és behelyettesítjük a második egyenletbe: $-5 \cdot (19 - 4y) + 2y = -7$	1 pont	Kivonjuk az 1. egyenletből: $11x = 33$
Zárójel felbontás és rendezés után, ezt kapjuk: $22y = 88$	1 pont	
$y = 4$	1 pont	$x = 3$
$x = 19 - 4 \cdot 4 = 3$, tehát a keresett pont: $B(3; 4)$	1 pont	$y = 4$, tehát a keresett pont: $B(3; 4)$
Ellenőrzés behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

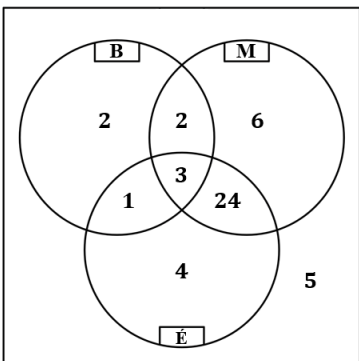
16. b)		
A kérdéses súlyvonalra a B csúcs és a vele szemközti oldal felezőpontja illeszkedik.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
Az AC szakasz felezőpontja: $F(0; 2)$.	1 pont	
A súlyvonal egy irányvektora: $\overrightarrow{FB}(3; 2)$.	1 pont	
A súlyvonal hossza: $ \overrightarrow{FB} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3,61$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

16. c)		
A kérdéses szöget a BFA háromszög oldalvektorai skalárszorzatának segítségével lehet meghatározni. $\overrightarrow{BA}(-2; -5)$	1 pont	
$\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BF}$ skalárszorzata: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF} = (-2) \cdot (-3) + (-5) \cdot (-2) = 16$	1 pont	$\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{FB} = (-3; -2)$
A $\overrightarrow{BA}$ vektor hossza: $ \overrightarrow{BA} = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$	1 pont	
A két vektor skalárszorzata a definíció szerint: $16 = \sqrt{29} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos \alpha$, ahol α a két vektor által bezárt szög.	1 pont	$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF} \cdot \cos \alpha$
Innen $\cos \alpha \approx 0,824$	1 pont	
$\alpha \approx 34,5^\circ$	1 pont	
Összesen:	6 pont	

17. a)		
A játék sugara 2,4 cm, a belső üreg sugara 2,2 cm.	1 pont	
A külső térfogat $\frac{4 \cdot 2,4^3 \cdot \pi}{3} \approx 57,91 \text{ cm}^3$.	1 pont	$V_{\text{gömb}} = \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3}$
Az üreg térfogata $\frac{4 \cdot 2,2^3 \cdot \pi}{3} \approx 44,60 \text{ cm}^3$.	1 pont	
$57,91 - 44,60 = 13,3 \text{ cm}^3$ műanyag szükséges a játék elkészítéséhez.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

17. b)		
A kocka testátlója $4,8 - 2 \cdot 0,2 - 0,4 = 4 \text{ cm}$	2 pont	
Ha a kocka éle a , akkor a testátlója $\sqrt{3}a$.	1 pont	A kocka testátlója $\sqrt{3}a$.
$4 = \sqrt{3}a$	1 pont	
$a = 2,309 \text{ cm}$	1 pont	
A legnagyobb kocka térfogata $2,309^3 = 12,3 \text{ cm}^3$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

17. c)		
Annak a valószínűsége, hogy egy játék rossz, 0,04.	1 pont	Ha ezek a gondolatok a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.
Annak a valószínűsége, hogy egy játék jó, 0,96.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy mind a 15 játék jó: $P_0 = 0,96^{15} = 0,542$	2 pont	P_{14} és P_{15} jelölések is megfelelőek, attól függően, hogy a jó vagy rossz esetek száma kerül az alsó indexbe.
Annak a valószínűsége, hogy 14 játék jó és 1 rossz: $P_1 = \binom{15}{1} \cdot 0,04 \cdot 0,96^{14} = 0,339$	2 pont	
A keresett valószínűség $0,542 + 0,339 = 0,881$.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

18. a)		
	4 pont*	A három halmaz közös metszetének, illetve az alaphalmaz tartományának kitöltéséért nem jár pont. Két-két halmaz metszeteinek helyes kitöltéséért 1 pont jár. A további tartományok kitöltéséért 1-1 pont jár.
Azok száma, akik voltak az étteremben: $1 + 3 + 24 + 4 = 32$	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $\frac{32}{47} \approx$	1 pont	
$\approx 0,681$.	1 pont	Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.
Összesen:	7 pont	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó halmazábra helyett szövegesen vezeti le a megoldását, azért is kapja meg a megfelelő pontokat a *-gal jelölt pontokból.*

18. b)		
Azok közül, akik nem voltak múzeumban és nem búvárokodtak $\binom{9}{3}$ -féleképpen lehet 3 főt kiválasztani.	1 pont	$4+5=9$ fő, aki nem volt múzeumban és nem búvárokodott.
Azok közül, akik voltak a múzeumban és az étteremben is, $\binom{27}{2}$ -féleképpen lehet kiválasztani 2 főt.	1 pont	$24+3=27$ fő, aki volt múzeumban és étteremben is.
Az 5 beszámoló összesen $5!$ -féle sorrendben követheti egymást,	1 pont	
ebből $4! \cdot 2$ olyan eset van, amikor a kérdéses 2 beszámoló egymás után következik.	1 pont	4 helyen lehetnek egymás után (1-2, 2-3, 3-4, 4-5), minden helyen helyet is cserélhetnek, a maradék 3 ember $3!$ -féleképpen rendezhető sorba. Ez összesen: $4 \cdot 2 \cdot 3! = 4! \cdot 2$
Így a kiválasztottak beszámolóinak $5! - 4! \cdot 2 = 72$ -féle sorrendje lehet.	1 pont	
A különböző összeállítások száma: $\binom{9}{3} \cdot \binom{27}{2} \cdot 72 = 2\,122\,848$	1 pont	
Összesen 2 122 848 ilyen összeállítás készülhet.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

18. c)		
Az öt értékelésből $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen választhatunk ki kettőt (összes eset).	1 pont	
A számunkra kedvező esetek száma 1,	1 pont	
így a kérdéses valószínűség $\frac{1}{10} = 0,1$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	