Másodfokú egyenletek

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

Másodfokú megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Amire figyelni kell:

- **a**, **b**, **c**-t mindig előjellel együtt nézzük
- **a** mindig x^2 előtti kifejezés **b** mindig x előtti kifejezés **c** mindig a konstans
- Ha nem ilyen sorrendben vannak, akkor nyugodtan rendezzük ilyen sorrendbe, tehát x^2-es kifejezés legyen legelöl utána x-es kifejezés végül a konstans, de itt is figyeljünk, hogy átrendezésnél előjelekkel együtt rendezzünk
- Esetek nagyrészében **a**=1, így a képletben alul 2 van, de ne essünk abba a hibába, hogy mindig automatikusan 2-t írunk oda
- Próbáljuk meg elkerülni, hogy **a** negatív legyen, nyugodtan leoszthatjuk az egyenletet (-1)-gyel

Diszkrimináns

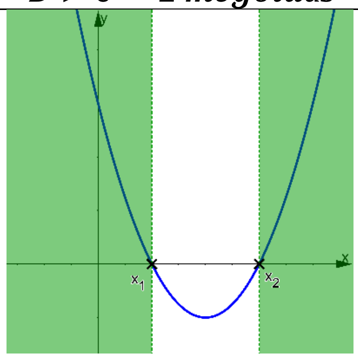
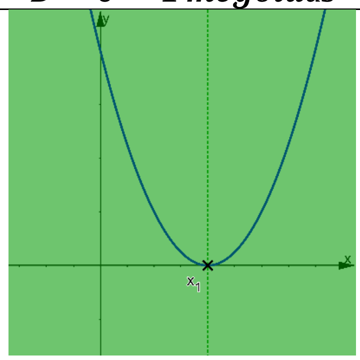
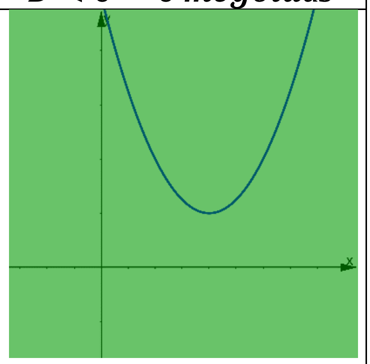
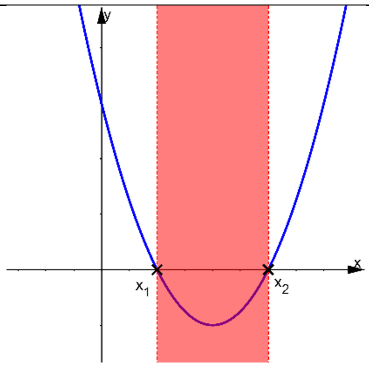
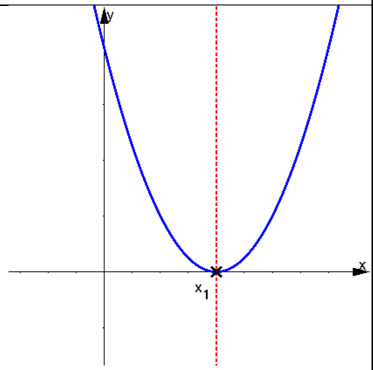
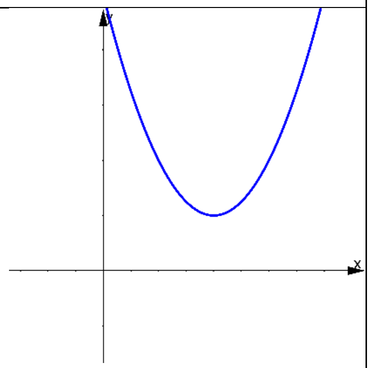
$\mathbf{D} = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$

$\boldsymbol{D > 0 \rightarrow 2\ megold\acute{a}s}$

$\boldsymbol{D = 0 \rightarrow 1\ megold\acute{a}s}$

$\boldsymbol{D < 0 \rightarrow 0\ megold\acute{a}s}$

Másodfokú egyenlőtlenségek

	$\boldsymbol{D > 0 \rightarrow 2\ megoldás}$	$\boldsymbol{D = 0 \rightarrow 1\ megoldás}$	$\boldsymbol{D < 0 \rightarrow 0\ megoldás}$
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$	 $\boldsymbol{x < x_1\ vagy\ x_2 < x}$	 $\boldsymbol{x < x_1\ vagy\ x_1 < x}$ $\boldsymbol{x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}}$	 $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0$	 $\boldsymbol{x_1 < x < x_2}$	 $\boldsymbol{x = x_1}$	 $\boldsymbol{Nincs\ megoldás}$

Tört egyenletek

- Mindig a kezdeti feltétellel (KF) kezdünk
- A KF hogy a nevező nem lehet egyenlő 0-val (0-val nem osztunk)
- Ezután a nevezővel (nevezőkkel) fel tudunk szorozni, vagy ha a tört egyenlő 0-val, akkor a nevezőt elhagyjuk és a számláló=0 egyenletet oldjuk meg

Tört egyenlőtlenségek

- Itt is a kezdeti feltétellel (KF) kezdünk
- Ha a tört>0, akkor megvizsgáljuk a $\frac{\oplus}{\oplus}$ és a $\frac{\ominus}{\ominus}$ eseteket
- Ha a tört<0, akkor megvizsgáljuk a $\frac{\oplus}{\ominus}$ és a $\frac{\oplus}{\ominus}$ eseteket
- Ha relációjelben meg van engedve az egyenlőség, azt csak a számlálóban engedjük meg

Függvények jellemzése

Értelmezési tartomány

- Jelölés: Középiskolában: É.T. ⟷ Egyetemen: D_f
- Megadja, hogy a függvény milyen x értékek mentén van értelmezve (vízszintesen nézzük)

Értékkészlet

- Jelölés: Középiskolában: É.K ⟷ Egyetemen: R_f
- Megadja, hogy a függvény milyen y értékeket vehet fel (függőlegesen nézzük)

Zérushely

- Jelölés: Z.H.
- Megadja, hogy hol metszi a függvény az x tengelyt
- **0, 1, 2, vagy akár több zérus hely is lehet** egy függvénynél (akár végtelen sok is, pl.: sin cos)
- Kiszámítása: $f(x) = 0$

Tengelymetszet, Tengelypont

- Jelölés: T.M., T.P.
- Megadja, hogy hol metszi a függvény az y tengelyt
- Vagy **0** vagy **1** tengelymetszet lehet, **több nem!**
- Kiszámítása: $f(0) = \cdots$

Monotonitás

- Minden függvény, vagy Sz.m.n. vagy Sz.m.cs. (kivéve konstans függvény ($y = 1$))
- Összefügg a szélső értékkel:
- Ha nő és utána csökken, akkor ahol a váltás történik ott maximum lesz
- Ha csökken és utána nő, akkor ahol a váltás történik ott minimum lesz

Folytonosság

- Folytonos egy függvény, ha végig tudjuk rajta húzni a ceruzánkat úgy, hogy nem kell közben felemelnünk.

Korlátosság

- Egy függvény lehet:
- Nem korlátos: Se felső se alsó korlátja nincsen (pl.: $f(x) = x$)
- Alulról korlátos: Ha van olyan y érték, ami alá nem megy le a függvény (pl.: $f(x) = x^2$)
- Felülről korlátos: Ha van olyan y érték, ami fölé nem megy a függvény (pl.: $f(x) = -x^2$)
- Alulról és felülről is korlátos: Ha vannak olyan y értékek, amik között mozog a függvény (pl.: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$)

Periodicitás

- Egy függvény periodikus, ha van olyan része, ami ismétlődik egymás után
- Periodikus függvények: Trigonometrikus függvények (sin, cos, tg, ctg)

Eltolások

$$f(x) = (x + \Delta) + \otimes$$

$\otimes$: *y irányú eltolás*

Δ: *x irányú eltolás*

$\otimes$: *logikusan*:

ha $\oplus$ *akkor* $\uparrow$

ha $\ominus$ *akkor* $\downarrow$

Δ: *fordítva*:

ha $\oplus$ *akkor* $\leftarrow$

ha $\ominus$ *akkor* $\rightarrow$

$x + \Delta = 0$ *egyenlet megoldása* $x - re$

Nyújtások

$f(x) = 2 \cdot (x) \rightarrow 2 - szeres\ nyújtás$ y irányban

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x) \rightarrow 2 - szeres$ összenyomás y irányban

$f(x) = (2x) \rightarrow 2 - szeres$ összenyomás x irányban

$f(x) = \left(\frac{1}{2}x\right) \rightarrow 2 - szeres\ nyújtás$ x irányban

Tükrözések

$f(x) = (-x) \rightarrow y\ tengelyre\ tükrözés$

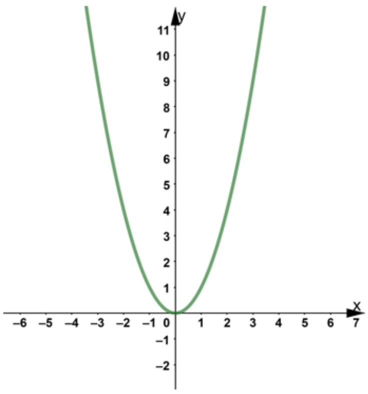
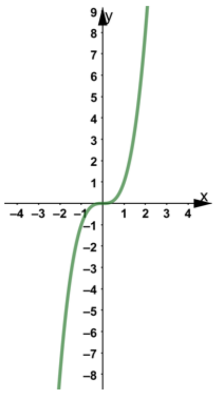
$f(x) = -(x) \rightarrow x\ tengelyre\ tükrözés$

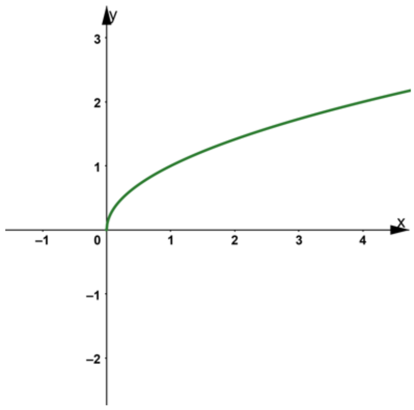
$f(x) = -(-x) \rightarrow x\ és\ y\ tengelyre\ is\ tükrözés$

Ezek a tükrözések mindig az eltolt tengelyre vonatkoznak!

Paritás

- Páros függvényeknél, ha y irányban toljuk csak el (fel / le), akkor marad páros, ha x irányban is eltoljuk, vagy csak x irányban toljuk el (jobbra / balra), akkor se páros se páratlan nem lesz a függvény.
- Páratlan függvényeknél bármerre is toljuk el, akár y irányban (fel / le), akár x irányban (jobbra / balra), akkor se páros se páratlan nem lesz a függvény.
- Nyújtásokkal nem változik a paritás.

	Páros	**Páratlan**
Definíció	Páros egy függvény, ha szimmetrikus az y tengelyre.	Páratlan egy függvény, ha szimmetrikus az origóra.
”Matematikusan”	$f(x) = f(-x)$	$f(x) = -f(-x)$
Példák	$f(x) = \lvert x \rvert, x^2, x^4 \dots, \cos x$	$f(x) = x, x^3 \dots, \sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x} \dots, \frac{1}{x}, \sin x$
Ábrázolás		

	Sem páros, sem páratlan függvények
Definíció	Olyan függvény, ami nem szimmetrikus, sem az y tengelyre, sem az origóra.
”Matematikusan”	$f(x) \neq f(-x), \quad f(x) \neq -f(-x)$
Példák	$f(x) = \sqrt{x}, \sqrt[4]{x} \dots, 2^x, 3^x \dots, \log_2 x, \log_3 x \dots$
Ábrázolás	

Konstans függvény

$f(x) = 2$

$D_f: x \in \mathbb{R}$

$R_f: y = 2$

Zérushely: $Nincs$

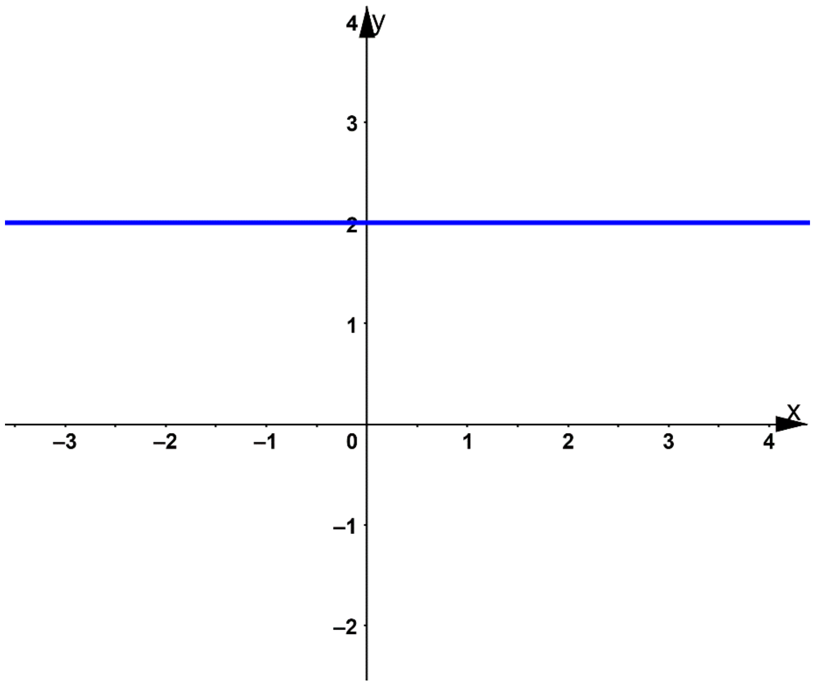
Tengelypont: $y = 2$

Monotonitás:

$Se\ Sz.m.n.,\ se\ Sz.m.cs.$

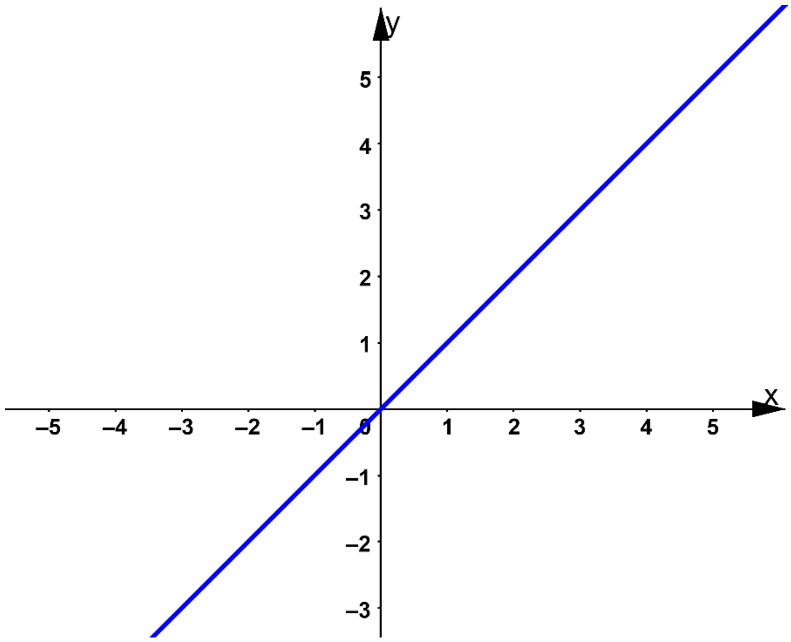
Szélsőérték: Nincs

Paritás: Páros



x	y
0	2
1	2
2	2
3	2
-1	2
-2	2
-3	2

Lineáris függvény



$f(x) = x$

D_f: $x \in \mathbb{R}$

R_f: $y \in \mathbb{R}$

Zérushely: $x = 0$

Tengelypont: $\mathrm{y} = 0$

Monotonitás: Sz.m.n.

Szélsőérték: Nincs

Paritás: Páratlan

Lineáris függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$
- Zérushely: $f(x) = 0$, mindig 1 zérushely van
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, mindig 1 tengelymetszet van
- Monotonitás:
- ➢ Ha nincs az x-es kifejezés előtt mínusz előjel → Sz.m.n.
- ➢ Ha van az x-es kifejezés előtt mínusz előjel → Sz.m.cs.
- Szélsőérték sosincs
- Paritás: Páratlan, ha nincs benne eltolás, sem páratlan sem páros, ha van benne eltolás
- Törtek meredeksége:

$$\frac{2}{5}x \rightarrow \frac{fel}{jobbra} \rightarrow 5-öt\ jobbra(\rightarrow)\ 2-t\ fel\ (\uparrow)$$

x	y
0	0
1	1
2	2
3	3
-1	-1
-2	-2
-3	-3

$f(x) = \Delta \cdot x + \otimes$

Δ: $meredekség$

$\otimes$: $y\ tengely\ metszet$

Lineáris függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük, hogy hol metszi az y tengelyt, azt bejelöljük**
- **Megnézzük a meredekséget, és annyit lépkedünk jobbra / balra és fel / le amennyi a meredekség**

Abszolútérték függvény

$f(x) = |x|$

D_f: $x \in \mathbb{R}$

R_f: $[0; \infty[$

Zérushely: $x = 0$

Tengelypont: $y = 0$

Monotonitás:

$]-\infty; 0[\rightarrow Sz.m.cs.$

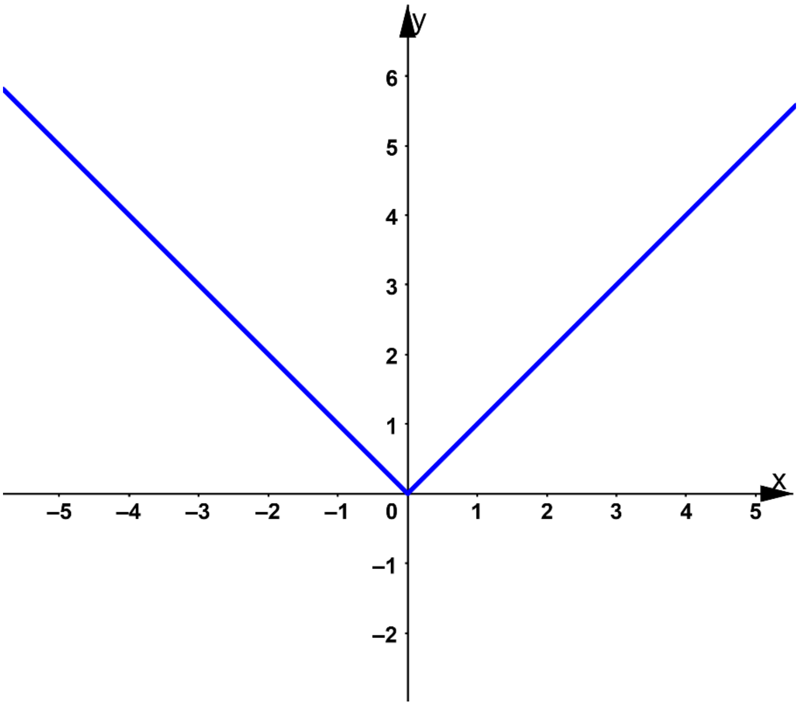
$]0; \infty[\rightarrow Sz.m.n.$

Szélsőérték: Minimum

$Minimum\ hely$: $x = 0$

$Minimum\ érték$: $y = 0$

Paritás: Páros



Abszolútérték függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: függőleges eltolástól függ pl.: $f(x) = |x| - 2 \rightarrow R_f$: $[-2; \infty[$
- Zérushely: $f(x) = 0$, lehet 0, 1, vagy 2 zérushely is (függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, mindig 1 tengelymetszet van
- Monotonitás:
  - ➢ Vízszintes eltolástól függ → Először Sz.m.cs. minimum helyig, aztán Sz.m.n.
  - ➢ Ha az abszolútértékjel előtt van mínusz előjel → Először Sz.m.n. maximum helyig, aztán Sz.m.cs.
- Szélsőérték: mindig van, ha nincs mínusz előjel az abszolútérték előtt, akkor minimum, ha van mínusz előjel, akkor maximum
- Paritás: Páros, ha nincs benne vízszintes eltolás, vagy csak nyújtás van benne, sem páros sem páratlan, ha van benne vízszintes eltolás
- Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
- Vízszintes eltolás megadja a monotonitási határokat, valamint a minimum/maximum helyét

Abszolútérték függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (minimum, vagy maximum)**
- **A csúcsból kiindulva a sima abszolútérték függvényt ábrázoljuk (1-et jobbra 1-et fel, 1-et balra 1-et fel)**

x	y
0	0
1	1
2	2
3	3
-1	1
-2	2
-3	3

Eltolások

$f(x) = |x + \Delta| + \otimes$

$\otimes$: $y\ irányú\ eltolás$

Δ: $x\ irányú\ eltolás$

$\otimes$: $logikusan$:

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

Δ: $fordítva$:

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Másodfokú függvény

$f(x) = x^2$

D_f: $x \in \mathbb{R}$

R_f: $[0; \infty[$

Zérushely: $x = 0$

Tengelypont: $\mathrm{y} = 0$

Monotonitás:

$]-\infty; 0[\rightarrow Sz.m.cs.$

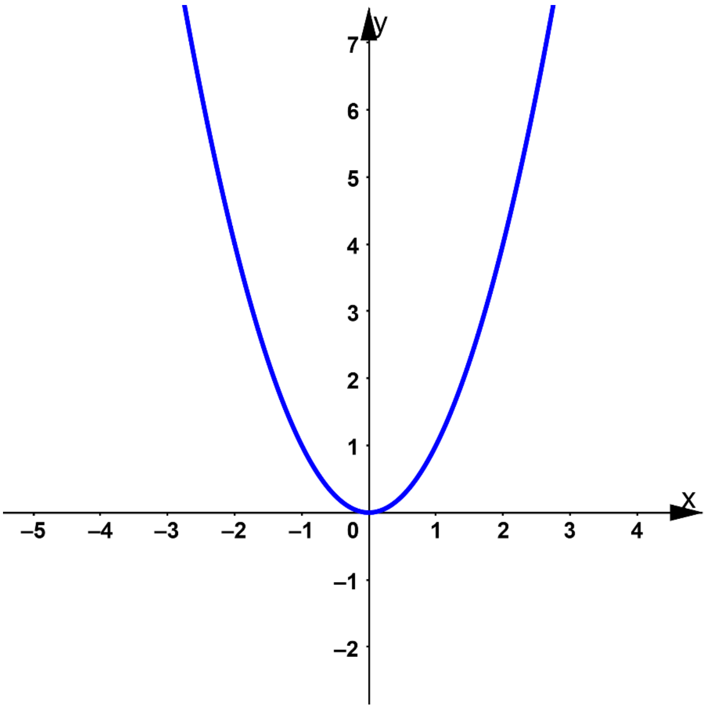
$]0; \infty[\rightarrow Sz.m.n.$

Szélsőérték: Minimum

$Minimum\ hely$: $x = 0$

$Minimum\ érték$: $y = 0$

Paritás: Páros



x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
-1	1
-2	4
-3	9

Másodfokú függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: függőleges eltolástól függ pl.: $f(x) = x^2 + 3 \rightarrow R_f$: $[3; \infty[$
- Zérushely: $f(x) = 0$, lehet 0, 1, vagy 2 zérushely is (függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, mindig 1 tengelymetszet van
- Monotonitás:
  - ➢ Vízszintes eltolástól függ → Először Sz.m.cs. minimum helyig, aztán Sz.m.n.
  - ➢ Ha a zárójel előtt van mínusz előjel → Először Sz.m.n. maximum helyig, aztán Sz.m.cs.
- Szélsőérték: mindig van, ha nincs mínusz előjel a zárójel előtt, akkor minimum, ha van mínusz előjel, akkor maximum
- Paritás: Páros, ha nincs benne vízszintes eltolás, vagy csak nyújtás van benne, sem páros sem páratlan, ha van benne vízszintes eltolás
- Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
- Vízszintes eltolás megadja a monotonitási határokat, valamint a minimum/maximum helyét

Másodfokú függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (minimum, vagy maximum)**
- **A csúcsból kiindulva a sima másodfokú függvényt ábrázoljuk**

Eltolások

$f(x) = (x + \Delta)^2 + \otimes$

$\otimes$: $y\ irányú\ eltolás$

Δ: $x\ irányú\ eltolás$

$\otimes$: $logikusan$:

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

Δ: $fordítva$:

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Négyzetgyök függvény

$f(x) = \sqrt{x}$

$D_f: [0; \infty[$

$R_f: [0; \infty[$

Zérushely: $x = 0$

Tengelypont: y = 0

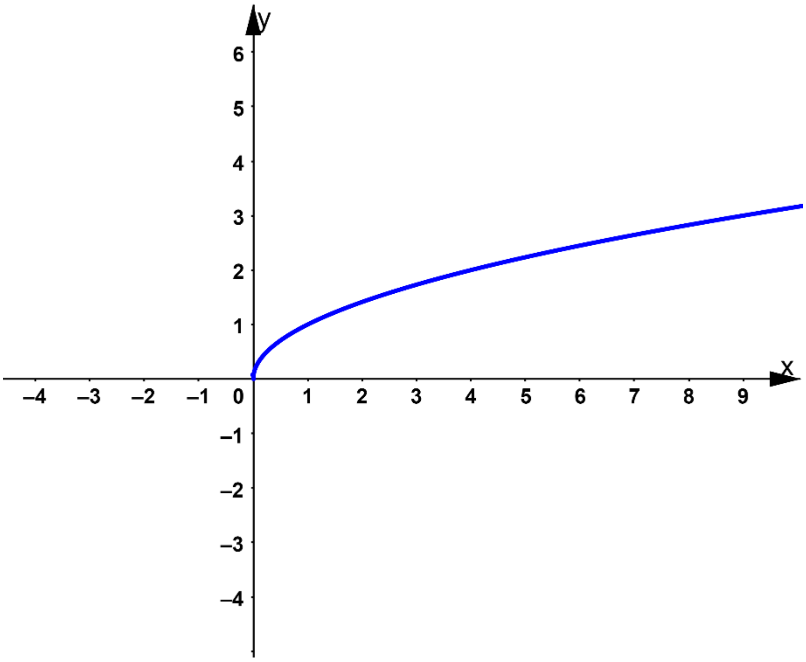
Monotonitás: Sz.m.n.

Szélsőérték: Minimum

$Minimum\ hely:\ x = 0$

$Minimum\ érték: y = 0$

Paritás: Sem páros, sem páratlan



Gyökfüggvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: Gyök alatti kifejezés≥ 0
- Értékkészlet: függőleges eltolástól függ pl.: $f(x) = \sqrt{x} - 2 \to R_f: [-2; \infty[$
- Zérushely: $f(x) = 0$, 0 vagy 1 zérushely lehet (függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 0 vagy 1 tengelymetszet lehet (vízszintes eltolástól függ)
- Monotonitás: Gyökjel előtti, valamint gyökön belüli mínusz előjelektől függ:
- $\sqrt{x}, -\sqrt{-x} \to Sz.m.n.\ ,\ \sqrt{-x}, -\sqrt{x} \to Sz.m.cs.$
- Szélsőérték: mindig van, az eltolások metszetében lesz, az hogy minimum vagy maximum, a gyökjel előtti, valamint gyökön belüli mínusz előjelektől függ
- Paritás: Sem páros sem páratlan
- Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
- Vízszintes eltolás megadja az értelmezési tartomány végét, valamint a minimum/maximum helyét

Gyökfüggvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (minimum, vagy maximum)**
- **A csúcsból kiindulva a sima gyökfüggvényt ábrázoljuk**

x	y
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4

Eltolások

$f(x) = \sqrt{x + \Delta} + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Tört függvény

$f(x) = \frac{1}{x}$

$D_f: x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$R_f: y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Zérushely: $Nincs$

Tengelypont: $Nincs$

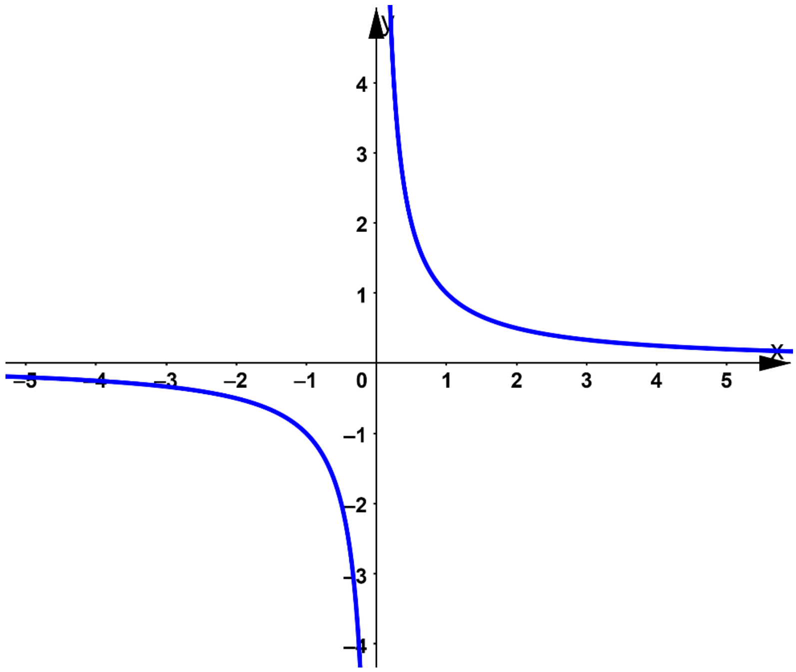
Monotonitás:

$]-\infty; 0[\rightarrow Sz.m.cs.$

$]0; \infty[\rightarrow Sz.m.cs.$

Szélsőérték: Nincs

Paritás: Páratlan



Törtfüggvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, kivéve ahol a nevező 0
- Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$ kivéve, amennyivel el van tolva a függvény függőlegesen
- Zérushely: $f(x) = 0$, 0 vagy 1 zérushely lehet (függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 0 vagy 1 tengelymetszet lehet (vízszintes eltolástól függ)
- Monotonitás: Csökkenő, ha nincs előtte mínuszjel, növekő, ha van előtte mínuszjel, két részben írjuk fel
- Szélsőérték: nincs
- Paritás: Páratlan, ha nincs benne semmilyen eltolás, vagy ha csak nyújtás van benne
- Függőleges eltolás megadja, hogy az értékkészletben hol van szakadás
- Vízszintes eltolás megadja, hogy az értelmezési tartományban, hol van szakadás

x	y
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{3}$

Törtfüggvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, azok lesznek az új koordináta tengelyek**
- **Az új koordináta tengelyekben megrajzoljuk a függvényt**

Eltolások

$f(x) = \frac{1}{x+\Delta} + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor\ \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor\ \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor\ \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor\ \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Exponenciális függvény

$f(x) = 2^x$

D_f: $x \in \mathbb{R}$

R_f: $]0; \infty[$

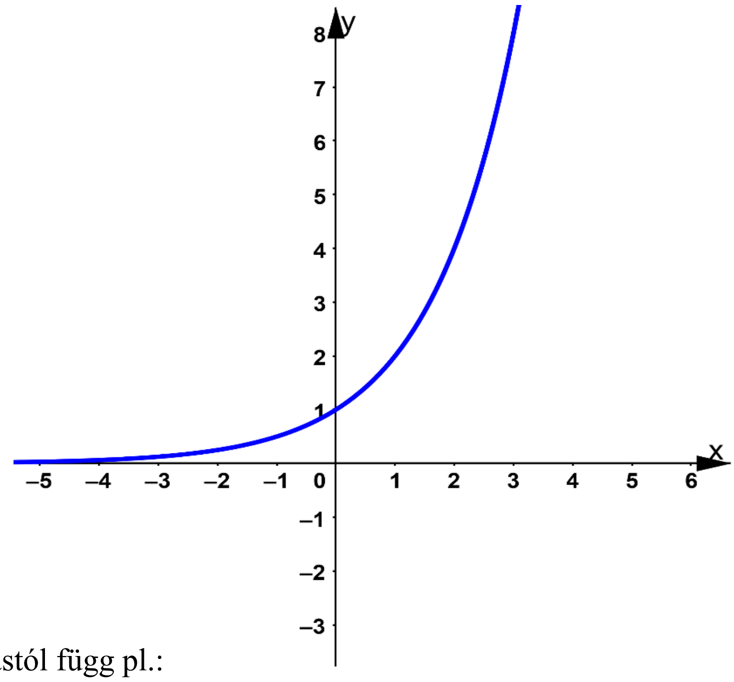
Zérushely: Nincs

Tengelypont: y = 1

Monotonitás: Sz.m.n.

Szélsőérték: Nincs

Paritás: Sem páros, sem páratlan



Exponenciális függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: függőleges eltolástól függ pl.: $f(x) = 2^x - 4 \rightarrow R_f:]-4; \infty[$
- Zérushely: $f(x) = 0$, 0 vagy 1 zérushely lehet (függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, mindig 1 tengelymetszet van, ha nincs benne eltolás, akkor y=1
- Monotonitás:
- ➢ Ha a hatvány alap 1-nél nagyobb → Sz.m.n.
- ➢ Ha a hatvány alap 1-nél kisebb → Sz.m.cs.
- Szélsőérték: Nincs
- Paritás: Sem páros sem páratlan
- Függőleges eltolás megadja az értékkészlet végét
- Vízszintes eltolás nem ad meg semmit

Exponenciális függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz az új origó, a függvény y=1-be metszi az új y tengelyt**
- **Ha bejelöltük az új tengelyen a metszetet ábrázoljuk az eredeti függvényt** $\left(2^x, 3^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x \ldots\right)$

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$

Eltolások

$f(x) = 2^{x+\Delta} + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor\ \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor\ \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor\ \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor\ \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x-re$

Logaritmus függvény

$f(x) = \log_2 x$

D_f: $]0; \infty[$

$R_f: y \in \mathbb{R}$

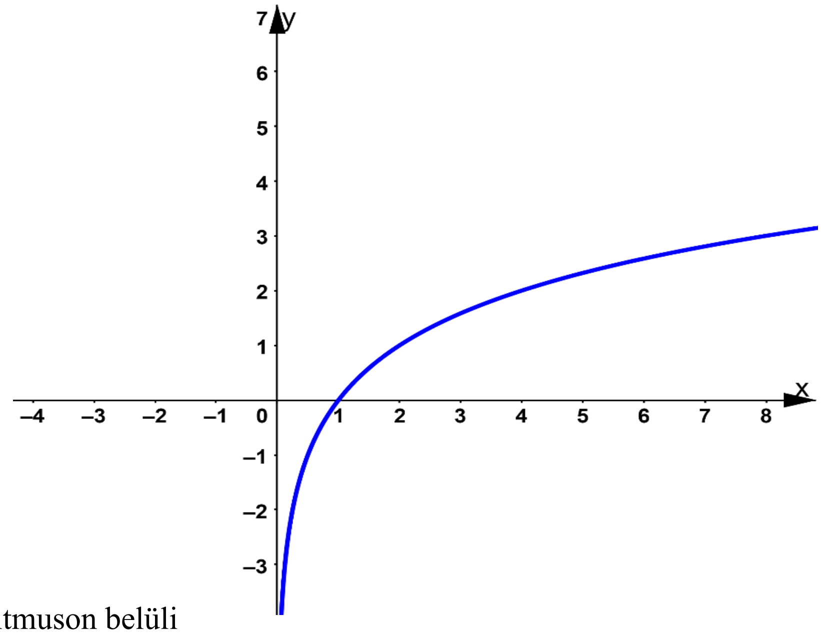
Zérushely: x = 1

Tengelypont: Nincs

Monotonitás: Sz.m.n.

Szélsőérték: Nincs

Paritás: Sem páros, sem páratlan



Logaritmus függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: logaritmuson belüli kifejezés > 0
- Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$
- Zérushely: $f(x) = 0$, mindig 1 zérushely van (függőleges eltolástól függ), ha nincs benne eltolás, akkor x=1
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 0 vagy 1 tengelymetszet lehet, vízszintes eltolástól függ
- Monotonitás:
  - ➢ Ha a logaritmus alap 1-nél nagyobb → Sz.m.n.
  - ➢ Ha a logaritmus alap 1-nél kisebb → Sz.m.cs.
- Szélsőérték: Nincs
- Paritás: Sem páros sem páratlan
- Függőleges eltolás nem ad meg semmit
- Vízszintes eltolás megadja az értelmezési tartomány végét

x	y
1	0
2	1
4	2
8	3
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2

Logaritmus függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz az új origó, a függvény x=1-be metszi az új x tengelyt**
- **Ha bejelöltük az új tengelyen a metszetet ábrázoljuk az eredeti függvényt** $\left(\boldsymbol{log_2, log_3, log_{\frac{1}{3}}} \ldots\right)$

Eltolások

$f(x) = \log_2(x + \Delta) + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

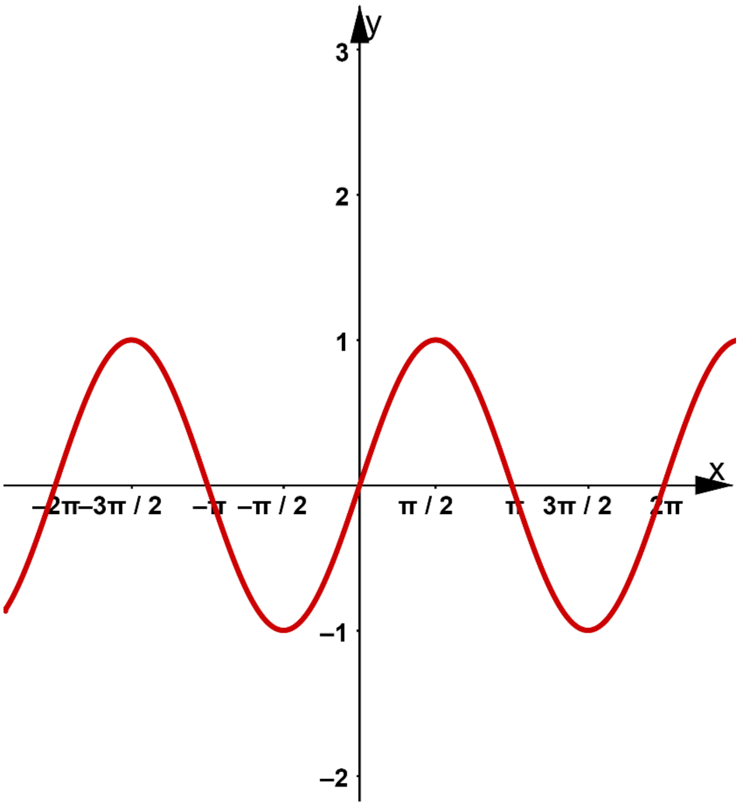
$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Szinusz (Sin) függvény



$f(x) = \sin x$

$D_f\colon x \in \mathbb{R}$

$R_f\colon [-1; 1]$

Zérushely:$x = 0 + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Tengelypont: $y = 0$

Monotonitás:

$\left]0 + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right[\rightarrow Sz.m.n.$

$\left]\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right[\rightarrow Sz.m.cs.$

$\left]\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi\right[\rightarrow Sz.m.n.$

Szélsőérték: Minimum, Maximum

$Minimum\ hely\colon x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

$Minimum\ érték\colon y = -1$

$Maximum\ hely\colon x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

$Maximum\ hely\colon y = 1$

Paritás: Páratlan

Periodicitás: Periodikus, periódusa: 2π

$\boldsymbol{x}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\boldsymbol{y}$	0	1	0	-1	0

Eltolások

$f(x) = sin(x + \Delta) + \otimes$

$\otimes\colon y\ irányú\ eltolás$

$\Delta\colon x\ irányú\ eltolás$

$\otimes\colon logikusan\colon$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta\colon fordítva\colon$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Sin függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: $[-1; 1]$
- Zérushely: $f(x) = 0$, végtelen sok zérushely van, periódus: $k \cdot \pi$
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 1 tengelymetszet van
- Monotonitás: 3 részből áll
- Szélsőérték: Végtelen minimum és végtelten maximum van, periódus: $k \cdot 2\pi$
- Paritás: Sin → Páratlan
- Függőleges eltolás megadja az értékkészletet
- Vízszintes eltolás nem ad meg semmit

Sin függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz az új origó**
- **Innentől pedig ábrázoljuk az eredeti Sin függvényt**

Koszinusz (Cos) függvény

$f(x) = \cos x$

D_f: $x \in \mathbb{R}$

R_f: $[-1; 1]$

Zérushely: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Tengelypont: y = 1

Monotonitás:

$]0 + k \cdot 2\pi; \pi + k \cdot 2\pi[\rightarrow Sz.m.cs.$

$]\pi + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi[\rightarrow Sz.m.n.$

Szélsőérték: Minimum, Maximum

$Minimum\ hely: x = \pi + k \cdot 2\pi$

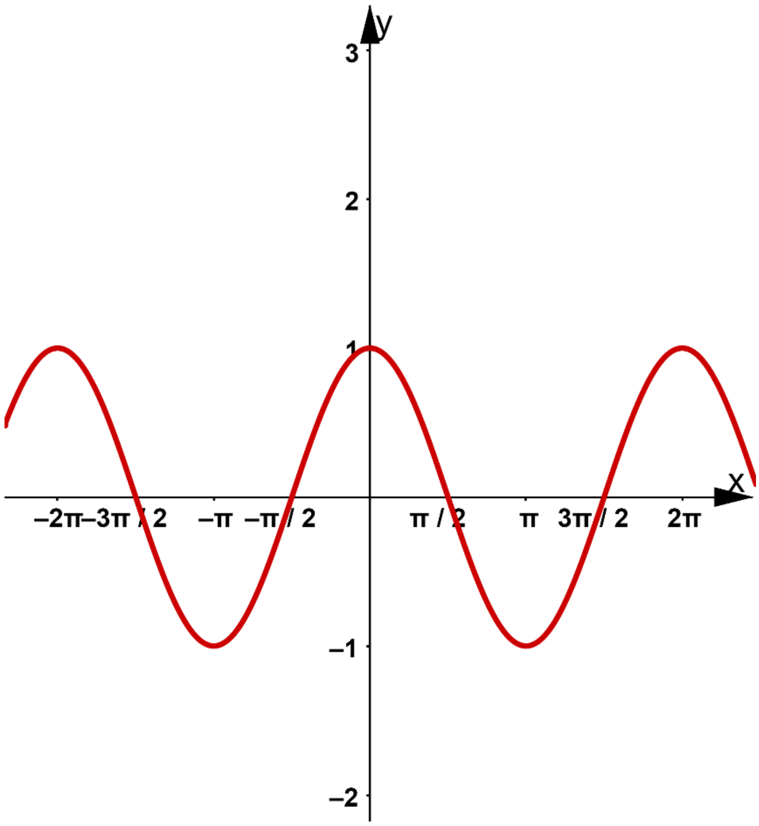
$Minimum\ érték: y = -1$

$Maximum\ hely: x = 0 + k \cdot 2\pi$

$Maximum\ hely: y = 1$

Paritás: Páros

Periodicitás: Periodikus, periódusa: 2π



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1

Eltolások

$f(x) = cos(x + \Delta) + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Cos függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: $[-1; 1]$
- Zérushely: $f(x) = 0$, végtelen sok zérushely van, periódus: $k \cdot \pi$
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 1 tengelymetszet van
- Monotonitás: 2 részből áll
- Szélsőérték: Végtelen minimum és végtelten maximum van, periódus: $k \cdot 2\pi$
- Paritás: Cos → Páros
- Függőleges eltolás megadja az értékkészletet
- Vízszintes eltolás nem ad meg semmit

Cos függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz az új origó**
- **Innentől pedig ábrázoljuk az eredeti Cos függvényt**

Tangens (Tg) függvény

$f(x) = \text{tg}\, x$

D_f: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}$

R_f: $y \in \mathbb{R}$

Zérushely:$x = 0 + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Tengelypont: y = 0

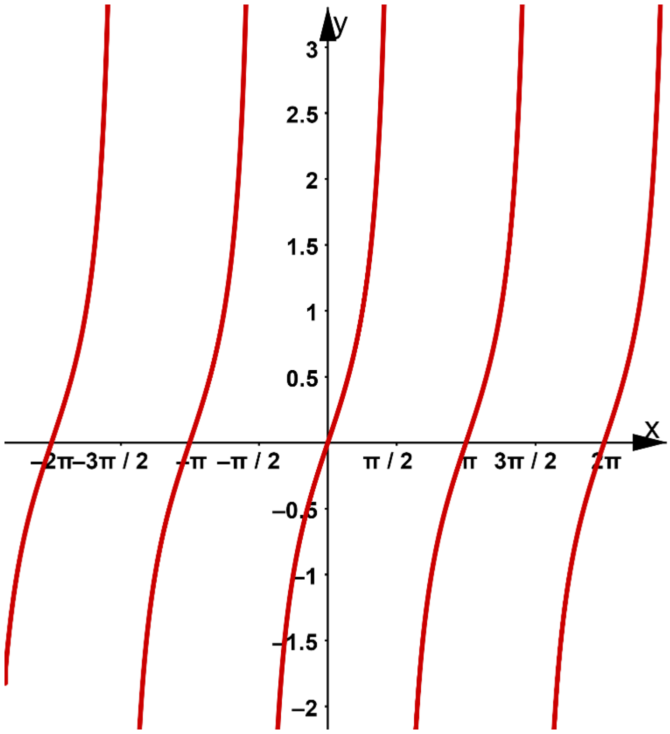
Monotonitás:

$\left]-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right[\rightarrow Sz.m.n.$

Szélsőérték: Nincs

Paritás: Páratlan

Periodicitás: Periodikus, periódusa: π



x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	$-$	-1	0	1	$-$

Eltolások

$f(x) = tg(x + \Delta) + \otimes$

$\otimes$: y *irányú eltolás*

Δ: x *irányú eltolás*

$\otimes$: *logikusan*:

ha $\oplus$ *akkor* $\uparrow$

ha $\ominus$ *akkor* $\downarrow$

Δ: *fordítva*:

ha $\oplus$ *akkor* $\leftarrow$

ha $\ominus$ *akkor* $\rightarrow$

$x + \Delta = 0$ *egyenlet megoldása* $x - re$

Tg függvény tudnivalók

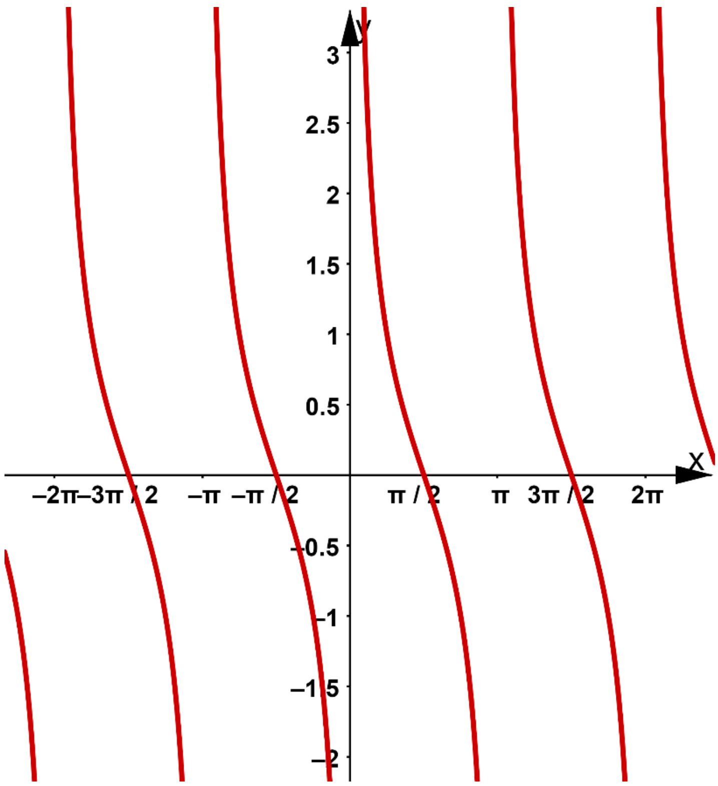
- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}$
- Értékkészlet:$y \in \mathbb{R}$
- Zérushely: $f(x) = 0$, végtelen sok zérushely van, periódus: $k \cdot \pi$
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 1 tengelymetszet van
- Monotonitás: Tg → Sz.m.n.
- Szélsőérték: Nincs
- Paritás: Páratlan
- Függőleges eltolás nem ad meg semmit
- Vízszintes eltolás megadja a szakadási helyeket

Tg függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz az új origó**
- **Innentől pedig ábrázoljuk az eredeti Tg függvényt**

Kotangens (Ctg) függvény

$f(x) = \text{ctg}\, x$
D_f: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0 + k \cdot \pi\}$
R_f: $y \in \mathbb{R}$
Zérushely: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$
Tengelypont: $Nincs$
Monotonitás:
$]0 + k \cdot \pi; \pi + k \cdot \pi[\rightarrow Sz.m.cs.$
Szélsőérték: Nincs
Paritás: Páratlan
Periodicitás: Periodikus, periódusa: π



x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	-1	$-$	1	0

Eltolások

$f(x) = tg(x + \Delta) + \otimes$

$\otimes$: y *irányú eltolás*

Δ: x *irányú eltolás*

$\otimes$: *logikusan*:

ha $\oplus$ *akkor* $\uparrow$

ha $\ominus$ *akkor* $\downarrow$

Δ: *fordítva*:

ha $\oplus$ *akkor* $\leftarrow$

ha $\ominus$ *akkor* $\rightarrow$

$x + \Delta = 0$ *egyenlet megoldása* $x - re$

Ctg függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0 + k \cdot \pi\}$
- Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$
- Zérushely: $f(x) = 0$, végtelen sok zérushely van, periódus: $k \cdot \pi$
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 1 tengelymetszet van (Ctg-nek nincs)
- Monotonitás: Ctg → Sz.m.cs.
- Szélsőérték: Nincs
- Paritás: Páratlan
- Függőleges eltolás nem ad meg semmit
- Vízszintes eltolás megadja a szakadási helyeket

Ctg függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz az új origó**
- **Innentől pedig ábrázoljuk az eredeti Ctg függvényt**

Hatványozás azonosságok

Elnevezés	Azonosság	Példák	
E1	$a^{n} \cdot a^{m} = a^{n+m}$	$2^{3} \cdot 2^{5} = 2^{3+5} = 2^{8}$ $x^{4} \cdot x^{7} = 2^{4+7} = x^{11}$	$2^{x+2} = 2^{x} \cdot 2^{2}$ $x^{y+4} = x^{y} \cdot x^{4}$
E2	$\frac{a^{n}}{a^{m}} = a^{n-m}$	$\frac{2^{7}}{2^{2}} = 2^{7-2} = 2^{5}$ $\frac{x^{2}}{x^{4}} = 2^{2-4} = x^{-2}$	$2^{x-3} = \frac{2^{x}}{2^{3}}$ $x^{y-5} = \frac{x^{y}}{x^{5}}$
E3	$a^{n} \cdot b^{n} = (a \cdot b)^{n}$	$2^{x} \cdot 3^{x} = (2 \cdot 3)^{x} = 6^{x}$ $x^{2} \cdot y^{2} = (x \cdot y)^{2}$	$10^{x} = (2 \cdot 5)^{x} = 2^{x} \cdot 5^{x}$ $(x \cdot y)^{4} = x^{4} \cdot y^{4}$
E4	$\frac{a^{n}}{b^{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}$	$\frac{3^{x}}{5^{x}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x}$ $\frac{x^{5}}{y^{5}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{5}$	$\left(\frac{7}{8}\right)^{x} = \frac{7^{x}}{8^{x}}$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{3} = \frac{x^{3}}{y^{3}}$
E5	$(a^{n})^{m} = (a^{m})^{n} = a^{n \cdot m}$	$(3^{2})^{5} = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$ $(x^{3})^{4} = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$ $(4^{7})^{9} = (4^{9})^{7}$	$5^{2 \cdot 4} = (5^{2})^{4}$ $x^{7 \cdot 5} = (x^{7})^{5}$ $(x^{3})^{8} = (x^{8})^{3}$
E6	$a^{1} = a$	$2^{1} = 2$ $x^{1} = x$	$5 = 5^{1}$ $y = y^{1}$
E7	$a^{0} = 1$	$3^{0} = 1$ $x^{0} = 1$	$1 = 6^{0}$ $1 = x^{0}$
E8	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$ $x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{3} = 3^{-1}$ $\frac{1}{y} = y^{-1}$
E9	$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$	$4^{-2} = \frac{1}{4^{2}} = \frac{1}{16}$ $x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$	$\frac{1}{5^{4}} = 5^{-4}$ $\frac{1}{y^{5}} = y^{-5}$

Logaritmus azonosságok

Elnevezés	Azonosság	Példák
L1	$\log_a b = c \rightarrow a^c = b$	$\log_2 x = 5 \rightarrow 2^5 = x$ $\log_3 27 = x \rightarrow 3^x = 27$ $\log_x 16 = 4 \rightarrow x^4 = 16$
L2	$\log_{10} x = \lg x = \log x$	-
L3	$\log_e x = \ln x$	-
L4	$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$	$\log_3(2 \cdot x) = \log_3 2 + \log_3 x$ $\log_5 7 + \log_5 y = \log_5(7 \cdot y)$
L5	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	$\log_8\left(\frac{3}{10}\right) = \log_8 3 - \log_8 10$ $\log_4 2 - \log_4 8 = \log_4\left(\frac{2}{8}\right)$
L6	$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$	$\log_5 x^3 = 3 \cdot \log_5 x$ $4 \cdot \log_3 x = \log_3 x^4$
L7	$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$	$\log_9 \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} \cdot \log_9 3$ $\frac{1}{3} \cdot \log_2 8 = \log_2 \sqrt[3]{8}$
L8	$\log_a a = 1$	$\log_2 2 = 1$ $\qquad 1 = \log_5 5$ $\log_x x = 1$ $\qquad 1 = \log_y y$
L9	$\log_a 1 = 0$	$\log_2 1 = 0$ $\qquad 0 = \log_5 1$ $\log_x 1 = 0$ $\qquad 0 = \log_x 1$
L10	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_5 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 5}$
L11	$b = \log_a a^b$	$2 = \log_3 3^2$
L12	$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$	$2^{\log_4 x} = x^{\log_4 2}$

Gyökvonás azonosságok

Elnevezés	Azonosság	Példák
GY1	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$ $\sqrt{5\cdot x}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{x}$
GY2	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{x}{7}}$ $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{16}{4}}=\sqrt{4}=2$
GY3	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	$\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{8\cdot x}$ $\sqrt[8]{2\cdot 9}=\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[8]{9}$
GY4	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ $\frac{\sqrt[7]{1}}{\sqrt[7]{x}}=\sqrt[7]{\frac{1}{x}}$
GY5	$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[5]{2}=2^{\frac{1}{5}}$ $\quad$ $10^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{10}$ $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ $\quad$ $x^{\frac{1}{9}}=\sqrt[9]{x}$
GY6	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[7]{2^2}=2^{\frac{2}{7}}$ $\quad$ $3^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{3^5}$ $\sqrt[3]{x^5}=x^{\frac{5}{3}}$ $\quad$ $x^{\frac{10}{7}}=\sqrt[\text{ű}]{x^{10}}$
GY7	$\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	$\sqrt[3]{8^6}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^6$
GY8	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}=\sqrt[n\cdot m]{a^{n+m}}$	$\sqrt[2]{x}\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[2\cdot 3]{x^{2+3}}=\sqrt[6]{x^5}$
GY9	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a^{m-n}}$	$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[7]{x}}=\sqrt[7\cdot 3]{x^{7-3}}=\sqrt[21]{x^4}$

Nevezetes azonosságok

Elnevezés	Azonosság	Példák
A1	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(2x+3)^2 = 4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 9$
A2	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9$
A3	$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$	$(x+2) \cdot (x-2) = x^2 - 4$ $x^2 - 9 = (x+3) \cdot (x-3)$
A4	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(x+2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 4 + 8$
A5	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(x-3)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 9 - 27$

Egyéb azonosságok

Elnevezés	Azonosság
A6	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
A7	$(a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
A8	$(a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Binomiális tétel

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

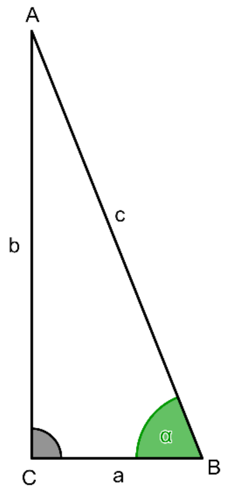
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

Trigonometria



$\sin\alpha = \dfrac{szöggel\ szemközti\ befogó}{átfogó} = \left(\dfrac{b}{c}\right)$ $\boldsymbol{-1 < \sin\alpha < 1}$

$\cos\alpha = \dfrac{szög\ melletti\ befogó}{átfogó} = \left(\dfrac{a}{c}\right)$ $\boldsymbol{-1 < \cos\alpha < 1}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{szöggel\ szemközti\ befogó}{szög\ melletti\ befogó} = \left(\dfrac{b}{a}\right)$ $-\infty < \boldsymbol{tg\ \alpha} < \infty$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{szög\ melletti\ befogó}{szöggel\ szemközti\ befogó} = \left(\dfrac{a}{b}\right)$ $-\infty < \boldsymbol{ctg\ \alpha} < \infty$

Nevezetes szögek

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Képletek:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

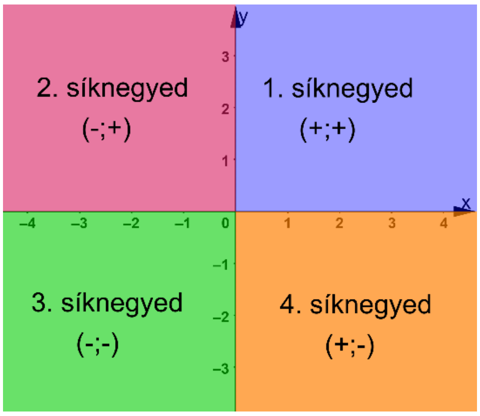
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \cos(\alpha - 90°)$$

$$\cos\alpha = \sin(\alpha + 90°)$$

Nevezetes szögek

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



Átváltás fokból radiánba $(° \to rad)$	Átváltás radiánból fokba $(rad \to °)$
$\alpha° \cdot \frac{2\pi}{360} = \alpha_{rad}$ $\alpha° \cdot \frac{\pi}{180} = \alpha_{rad}$	$\alpha_{rad} \cdot \frac{360}{2\pi} = \alpha°$ $\alpha_{rad} \cdot \frac{180}{\pi} = \alpha°$
Váltószám: $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ $1\ radián \sim 57,3°$	

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
α_{rad}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Addíciós tételek

$\boldsymbol{\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta}$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

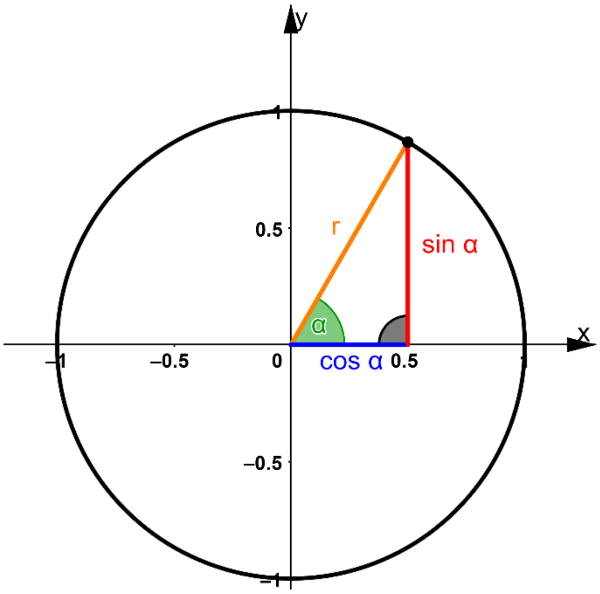
$\boldsymbol{\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta}$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

Egységkör

- Kör középpontja: origó (0;0)
- Sugara: r=1 egység
- $\cos\alpha$ lesz az x koordináta
- $\sin\alpha$ lesz az y koordináta
- Sin egyenletnél vízszintesen húzzuk be
- Cos egyenletnél függőlegesen húzzuk be
- Mindig 2 megoldás
- Kivéve $\sin x = \pm 1$ $\cos x = \pm 1$ →ott csak 1
- Megoldások után mindig odaírjuk a periódust is
- 1. síknegyedben maga a szög
- 2. síknegyedben 180°-ból vonjuk ki
- 3. síknegyedben 180°-hoz adjuk hozzá
- 4. síknegyedben 360°-ból vonjuk ki



Geometria

Görög ABC

Görög betű	Kiejtés	Miket jelölhet?
α	$alfa$	- Saját körfrekvencia
β	$béta$	- Szöggyorsulás
γ	$gamma$	-
δ	$delta$	- Deriválás
ε	$epszilon$	- Szöggyorsulás - Nyúlás - Hibahatár
μ	$mű$	- Súrlódás
ω	$omega$	- Szögsebesség - Körfrekvencia
ζ	$dzéta$	- Elforgatott koordináta rendszer (x)
η	$éta$	- Hatásfok - Dinamikai viszkozitás - Elforgatott koordináta rendszer (y)
θ	$théta$	- Tehetetlenségi nyomaték - Gömbi koordináta rendszer szöge

Görög betű	Kiejtés	Miket jelölhet?
κ	$kappa$	- Adiabatikus kitevő
λ	$lambda$	- Hullámhossz - Hasonlóság aránya
ν	$nű$	- Kinematikai viszkozitás
ξ	$kszí$	- Statisztikában használják
π	$pí$	- Matematika állandó (3,14) - Szorzássorozat - Közgazdaságtanban profit
ρ	$ró$	- Sűrűség
σ	$szigma$	- Mechanikai feszültség - Valószínűségszámítás szórás
τ	tau	- Nyírófeszültség - Időállandó
φ	$fí$	- Mágneses fluxus - Relatív páratartalom - Szög
χ	$khí$	- Statisztika Khí-négyzet
ψ	$pszí$	- Hőátbocsátási tényező

Háromszögek

- Csúcsok ABC nagy betűi
- Oldalak ABC kisbetűi:
  - A csúccsal szemben a oldal
  - B csúccsal szemben b oldal
  - C csúccsal szemben c oldal
- Szögek, a görög ABC betűi:
  - A csúcsnál α
  - B csúccsal β
  - C csúccsal γ
- Háromszög belső szögeinek összege 180° → $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
- Háromszög belső és külső szögeinek összege is 180°:

  $\alpha + \alpha' = 180°$

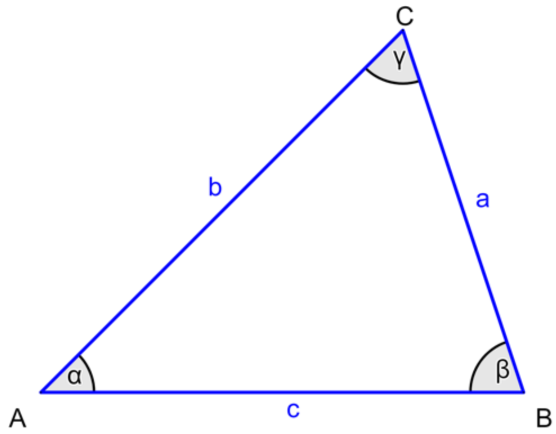
  $\beta + \beta' = 180°$

  $\gamma + \gamma' = 180°$
- Két oldal összege mindig nagyobb a harmadik oldalnál:

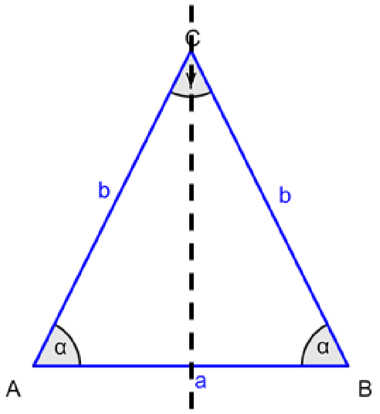
  $a + b > c$

  $a + c > b$

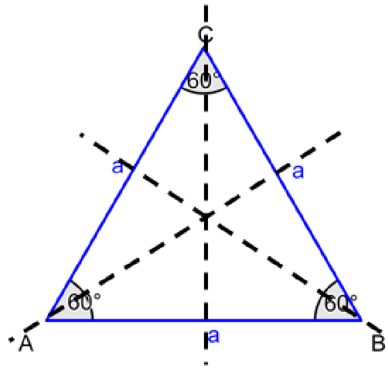
  $b + c > a$



Egyenlőszárú háromszög	Szabályos háromszög
Van 2 egyenlő szára γ: $szárszög$ Alapon fekvő szögei ugyanakkorák 1 szimmetria tengelye van	Minden oldala egyenlő Minden szöge 60° 3 szimmetria tengelye van



Szimmetria tengelye = az alap
oldalfelező merőlegesével

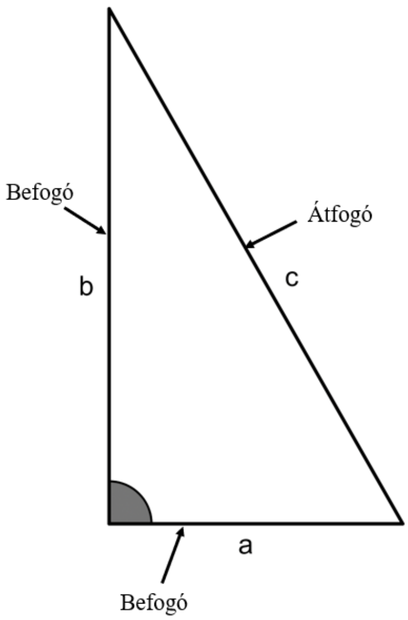


Szimmetria tengelyei = az oldalak
oldalfelező merőlegeseivel
+1: Ezek egy pontban metszik egymást

Pitagorasz tétel

$befogó1^2 + befogó2^2 = átfogó^2$

$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$



Háromszögek kerülete

- Kerület jele: K

$\boldsymbol{K = a + b + c}$

- Félkerület jele: s

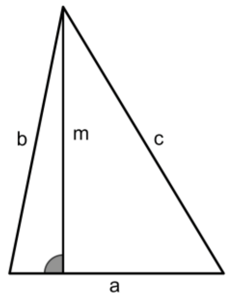
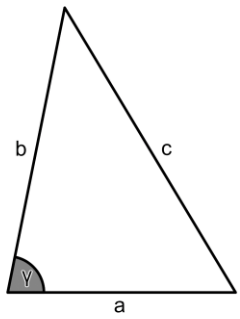
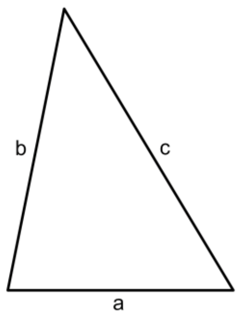
$$\boldsymbol{s} = \frac{K}{2} = \frac{\boldsymbol{a+b+c}}{\boldsymbol{2}}$$

- Speciális háromszögek kerületei:

➢ Egyenlőszárú háromszög: $\boldsymbol{K = a + 2b}$

➢ Szabályos háromszög: $\boldsymbol{K = 3a}$

Háromszögek területe

Hagyományos módszer	Szöggel számítva	Héron képlet
		
$T = \frac{alap \cdot magasság}{2}$ $\boldsymbol{T = \frac{a \cdot m}{2}}$	$\boldsymbol{T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}}$	$\boldsymbol{T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}$ s: *félkerület* $s = \frac{a+b+c}{2}$

+2 Képlet:

$\boldsymbol{T = s \cdot r}$

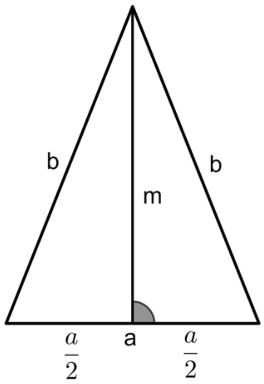
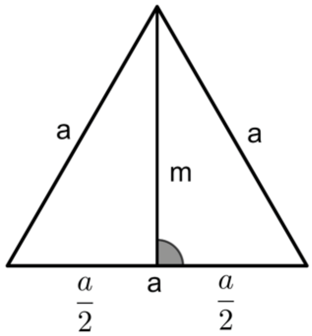
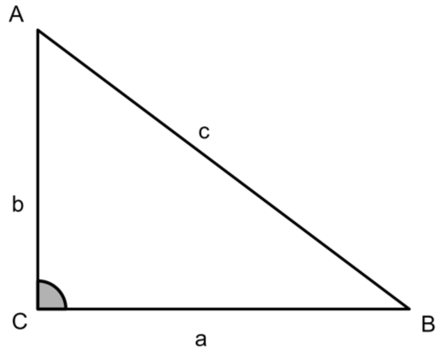
s: *félkerület* $\rightarrow s = \frac{a+b+c}{2}$

r: *beírható kör sugara*

$$\boldsymbol{T = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}}$$

R: *köré írható kör sugara*

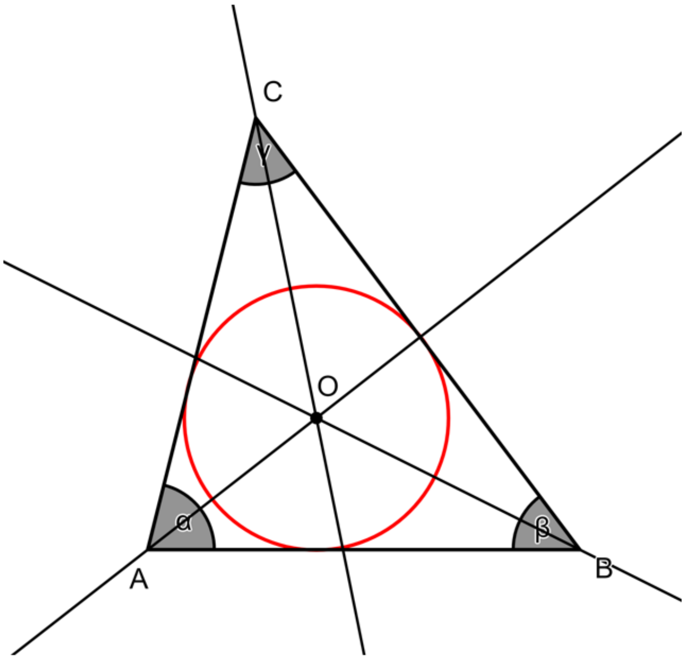
Háromszögek magassága

<table>
<tr><th>Egyenlőszárú háromszög</th><th>Szabályos háromszög</th><th>Derékszögű háromszög</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Pitagorasz tétel:
$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 = b^2$
$\boldsymbol{m^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$\boldsymbol{T = \frac{a \cdot m}{2}}$</td>
<td>Pitagorasz tétel:
$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 = a^2$
$m^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$
$m^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$
$m^2 = \frac{3a^2}{4}$
$\boldsymbol{m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a}$
$\boldsymbol{T} = \frac{a \cdot m}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2}$</td>
<td>$\boldsymbol{m = b}$
$\boldsymbol{T = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{a \cdot b}{2}}$</td>
</tr>
</table>

Háromszögek vonalai

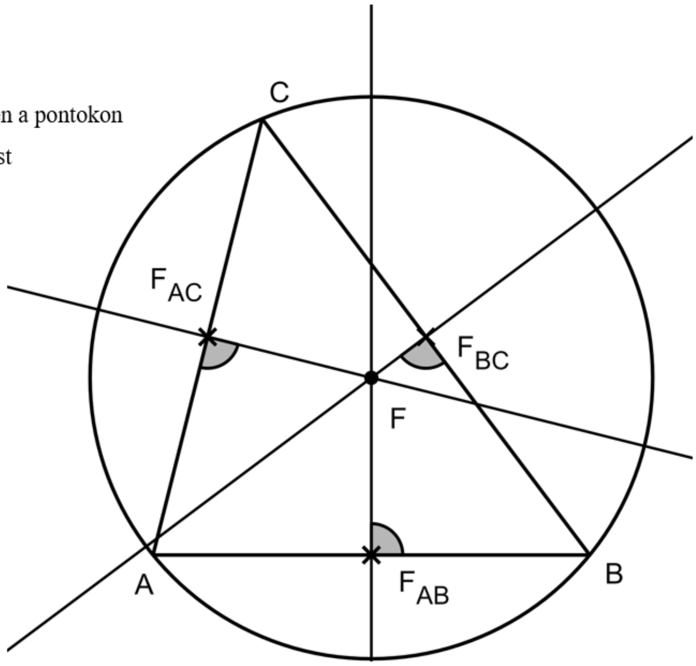
Szögfelező egyenesek

- Felezi a szöget
- A 3 szögfelező egyenes egy pontban metszi egymást
- Ez a metszéspont a háromszögbe írható kör középpontja



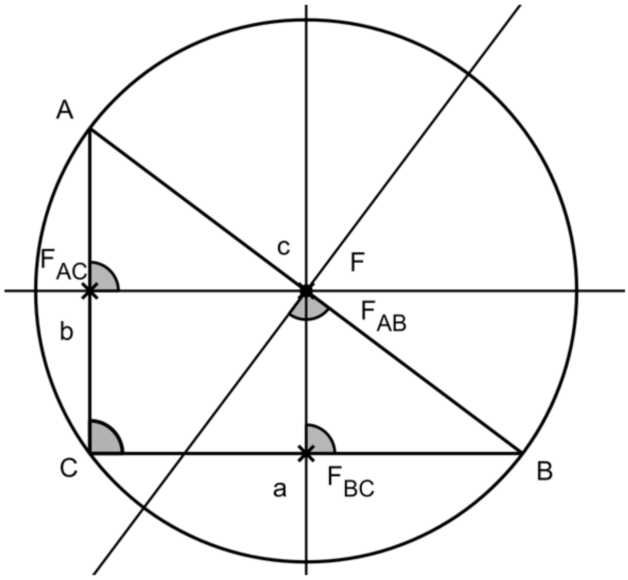
Oldalfelező merőleges egyenesek

- Jelöljük be az oldalfelező pontokat
- Állítsunk merőlegest a oldalakra, úgy hogy átmenjen ezeken a pontokon
- Az oldalfelező merőlegesek is egy pontban metszik egymást
- Ez a pont lesz a köré írható kör középpontja



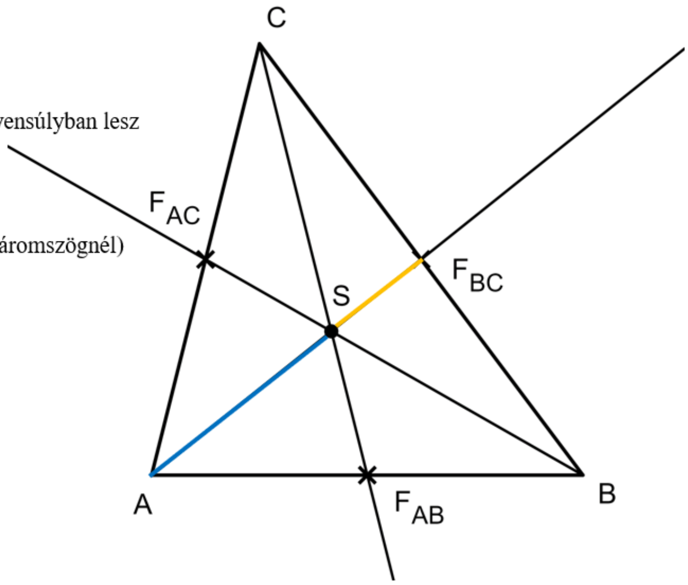
Derékszögű háromszög oldalfelező merőleges egyenesek

- Jelöljük be az oldalfelező pontokat
- Állítsunk merőlegest az oldalakra, amik a felezőkön mennek át
- Itt is egy pontban metszik egymást
- A metszéspont pont az átfogó felezőpontjára esik
- A köré írható kör középpontja mindig az átfogó felére esik
- A köré írható kör sugara mindig az átfogó fele lesz: $R = \frac{c}{2}$



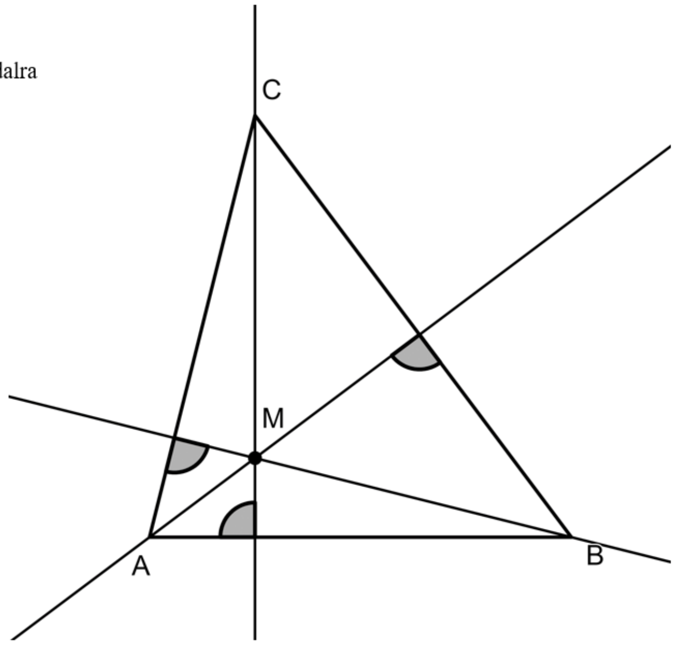
Súlyvonalak

- Jelöljük be az oldalfelező pontokat
- Kössük össze őket a szemközti csúcsokkal
- Ezek is egy pontban metszik egymást (Súlypont)
- Súlypont: Az a pont, ahol ha megtámasztjuk a testet, az egyensúlyban lesz
- Súlypont 2:1 arányban osztja fel a súlyvonalakat
- Súlypont a súlyvonalak harmadolópontja
- Súlyvonalak nem ugyanolyan hosszúak! (Csak szabályos háromszögnél)



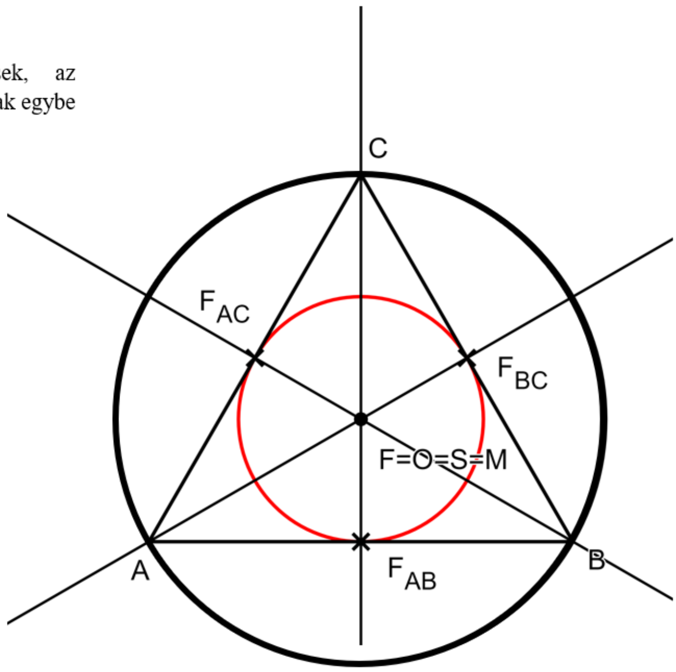
Magasságvonalak

- Állítsunk merőlegest minden csúcsból a vele szemközti oldalra
- Ezek is egy pontban metszik egymást (Magasságpont)

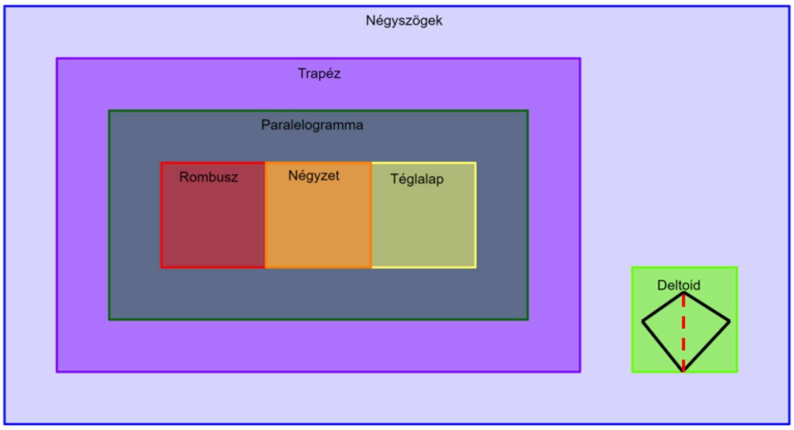


Szabályos háromszög

- Szabályos háromszögekben a szögfelező egyenesek, az oldalfelező merőlegesek, a súlyvonalak, a magasságvonalak egybe esnek, ezáltal a metszéspontjaik is
- A súlypont itt is 1:2 arányban osztja fel a súlyvonalakat
- A súlyvonalak egyenlő hosszúak lesznek



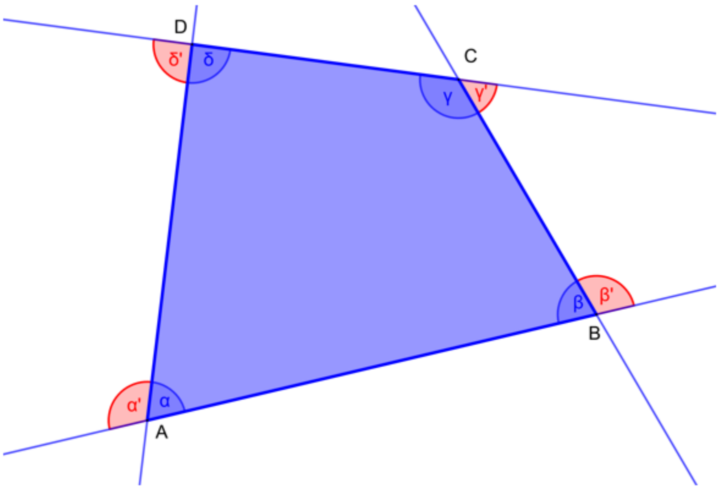
Négyszögek



Négyszög: Olyan síkidom, aminek 4 oldala és 4 csúcsa van.
Trapéz: Olyan négyszög, aminek van két egymással párhuzamos oldala.
Paralelogramma: Olyan négyszög, aminek szemközti oldalai párhuzamosak.
Rombusz: Olyan négyszög, aminek minden oldala egyenlő.
Téglalap: Olyan négyszög, aminek minden szöge derékszög.
Négyzet: Olyan négyszög, aminek minden szöge derékszög, és minden oldala egyenlő.
Deltoid: Olyan négyszög, aminek egyik átlója szimmetriatengely.

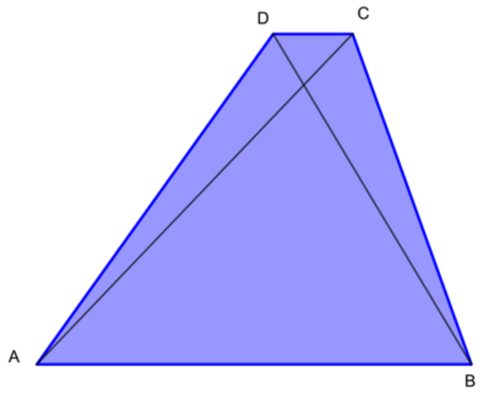
- Csúcsok: ABC nagy betűi figyelve körül járásra
- Szögek: Hasonlóan, mint háromszögeknél, D csúcsnál δ
- Oldalak: Nincs rá szabály
- Belső szögek összege: $360° \rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
- Belső és külső szögek: Ugyanúgy, mint háromszögeknél, az összegük 180°

$\alpha + \alpha' = 180°$
$\beta + \beta' = 180°$
$\gamma + \gamma' = 180°$
$\delta + \delta' = 180°$

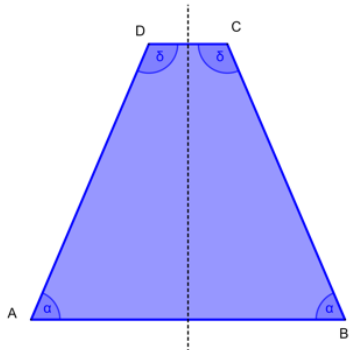


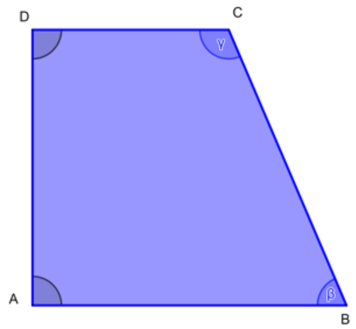
Trapéz

- Azonos száron fekvő szögei összege 180°
- Átlói nem egyenlő hosszúak, nem felezik egymást



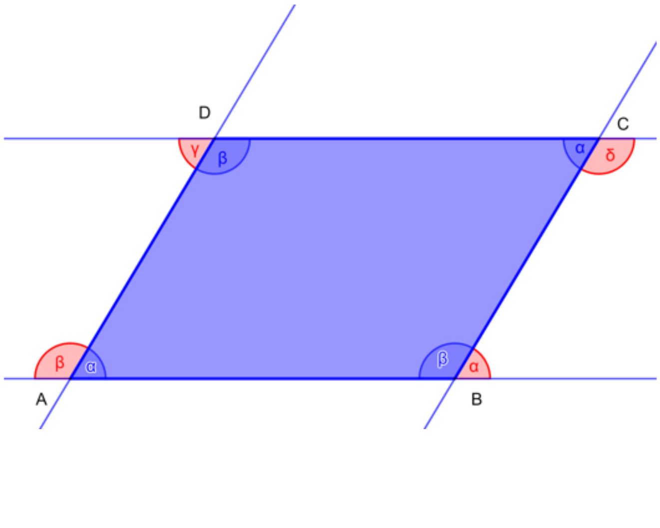
Szimmetrikus trapéz (húrtrapéz)	Derékszögű trapéz
• A két szára egyenlő hosszú • Az átlói egyenlő hosszúak • 1 szimmetria tengelye van • Alapon fekvő szögei egyenlőek	• Van 2 derékszöge • Átlók nem egyenlő hosszúak • Nincs szimmetria tengelye





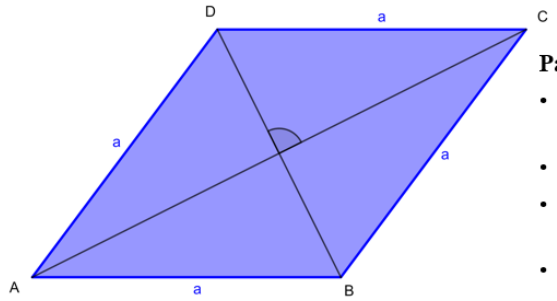
Paralelogramma

- Szemközti oldalai párhuzamosak és ugyanolyan hosszúak
- Átlói felezik egymást
- Az egy oldalon fekvő szögeinek az összege 180°
- A szemközti szögei egyenlőek



Rombusz

- Paralelogramma és a trapéz minden tulajdonsága igaz rá
- Minden oldala egyenlő
- Átlói merőlegesek egymásra

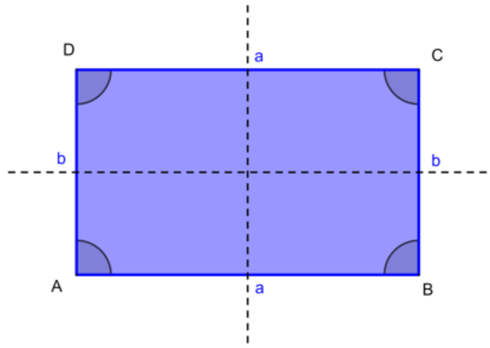


Paralelogramma

- Szemközti oldalai párhuzamosak és ugyanolyan hosszúak
- Átlói felezik egymást
- Az egy oldalon fekvő szögeinek az összege 180°
- A szemközti szögei egyenlőek

Téglalap

- Paralelogramma és a trapéz minden tulajdonsága igaz rá
- Minden szöge derékszög
- 2 szimmetria tengelye van, az oldalak felezők pontjainál

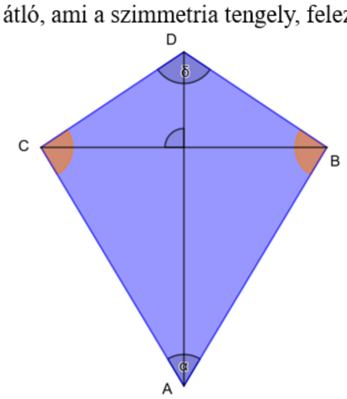


Paralelogramma

- Szemközti oldalai párhuzamosak és ugyanolyan hosszúak
- Átlói felezik egymást
- Az egy oldalon fekvő szögeinek az összege 180°
- A szemközti szögei egyenlőek

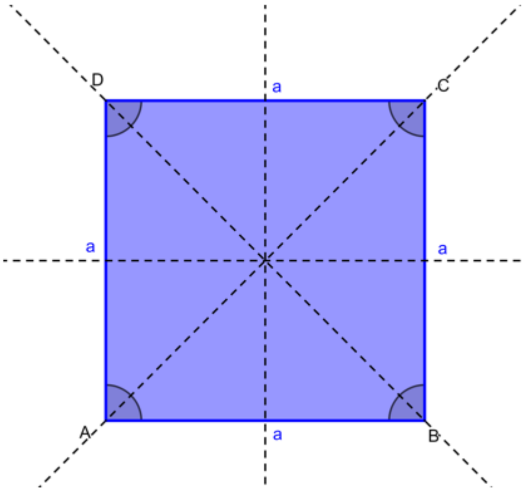
Deltoid

- Az egyik átlója szimmetria tengely
- Szomszédos oldalai ugyanolyan hosszúak
- Szemközti szögei ugyanakkorák (szimmetria tengely különböző oldalain lévők)
- Szimmetria tengely felezni fogja azokat a szögeket, amiken átmegy
- Átlók merőlegesek egymásra
- Az az átló, ami a szimmetria tengely, felezni fogja a nem szimmetria tengely átlót



Négyzet

- Trapéz, paralelogramma, téglalap, rombusz, deltoid minden tulajdonsága igaz rá
- Átlói felezik a szögeket
- Összesen 4 szimmetriatengelye van:
- a 2 oldalfelező, és a 2 átló



Deltoid

- Az egyik átlója szimmetria tengely
- Szimmetria tengely felezni fogja azokat a szögeket, amiken átmegy

Téglalap

- Minden szöge derékszög
- 2 szimmetria tengelye van, az oldalak felezők pontjainál

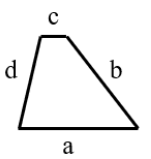
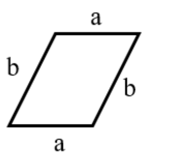
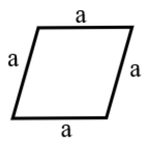
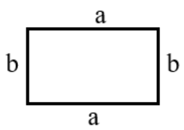
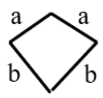
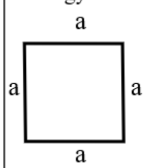
Rombusz

- Minden oldala egyenlő
- Átlói merőlegesek egymásra

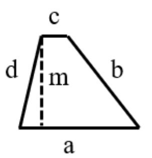
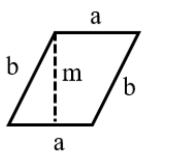
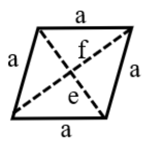
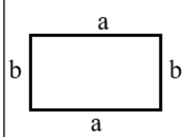
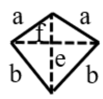
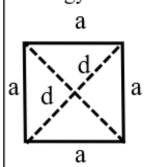
Paralelogramma

- Szemközti oldalai párhuzamosak és ugyanolyan hosszúak
- Átlói felezik egymást
- Az egy oldalon fekvő szögeinek az összege 180°
- A szemközti szögei egyenlőek

Négyszögek kerülete

Négyszög	Trapéz 	Paralelogramma 	Rombusz 	Téglalap 	Deltoid 	Négyzet 
Kerület	$K = a + b + c + d$	$K = a + a + b + b$ $K = 2a + 2b$ $K = 2 \cdot (a + b)$	$K = 4a$	$K = a + a + b + b$ $K = 2a + 2b$ $K = 2 \cdot (a + b)$	$K = a + a + b + b$ $K = 2a + 2b$ $K = 2 \cdot (a + b)$	$K = 4a$

Négyszögek területe

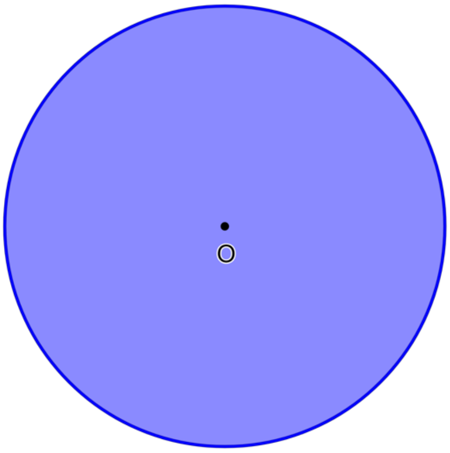
Négyszög	Trapéz 	Paralelogramma 	Rombusz 	Téglalap 	Deltoid 	Négyzet 
Kerület	$T = \frac{a + c}{2} \cdot m$	$T = a \cdot m$ $T = a \cdot b \cdot \sin\alpha$	$T = a^2 \cdot \sin\alpha$ $T = \frac{e \cdot f}{2}$	$T = a \cdot b$	$T = \frac{e \cdot f}{2}$	$T = a \cdot a$ $T = a^2$ $T = \frac{d^2}{2}$

$$\boldsymbol{d = \sqrt{2} \cdot a}$$

Kör

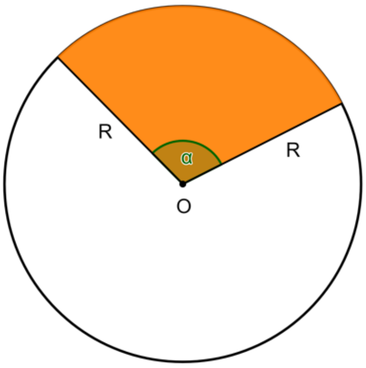
Kör

- Középpont: O vagy K
- Sugár: r vagy R
- Átmérő: d vagy D
- $D = 2 \cdot R$
- Kerület: K
- $\boldsymbol{K = 2 \cdot R \cdot \pi = D \cdot \pi}$
- Terület: T
- $\boldsymbol{T = R^2 \cdot \pi} = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \pi = \boldsymbol{\frac{D^2}{4} \cdot \pi}$



Körcikk

- Ívhossz: i
- $\boldsymbol{i = \frac{\alpha}{360°} \cdot K = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot R \cdot \pi} = \frac{\alpha}{180°} \cdot R \cdot \pi$
- Körcikk: T_{KC}
- $T_{KC} = \boldsymbol{\frac{\alpha}{360°} \cdot T = \frac{\alpha}{360°} \cdot R^2 \cdot \pi}$
- $T_{KC} = \boldsymbol{\frac{i \cdot R}{2}}$

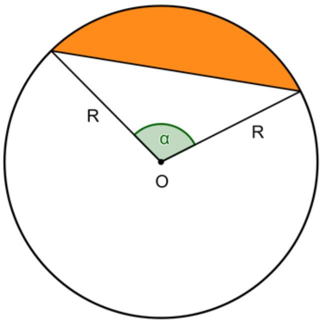


Körszelet

- Körszelet: T_{KSZ}
- $T_{KSZ} = \boldsymbol{T_{KC}} - \boldsymbol{T_{\Delta}} = \boldsymbol{\frac{\alpha}{360°} \cdot R^2 \cdot \pi} - \boldsymbol{\frac{R^2 \cdot \sin\alpha}{2}}$

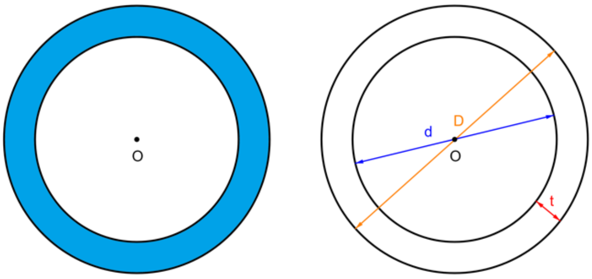
Ha ismert két oldal és az általuk bezárt szög:

$$\boldsymbol{T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}}$$



Körgyűrű

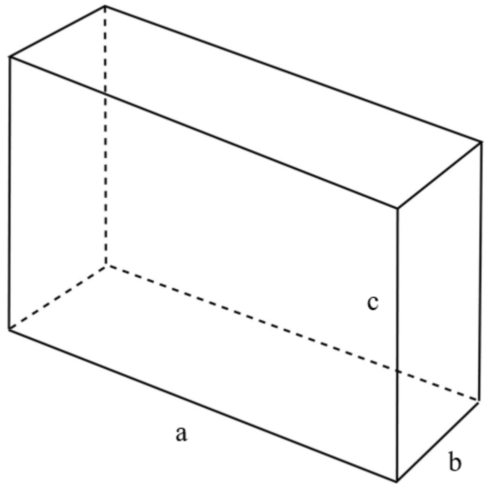
- Körgyűrű: T_{KGY}
- $T_{GY}\ (átmérő) = \boldsymbol{T_N - T_K = \frac{D^2}{4} \cdot \pi - \frac{d^2}{4} \cdot \pi = \frac{D^2 - d^2}{4} \cdot \pi}$
- $T_{GY}\ (sugár) = \boldsymbol{R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi = (R^2 - r^2) \cdot \pi}$
- Nagy kör átmérője: D
- Kis kör átmérője: d
- Falvastagság: t
- $t = \frac{D-d}{2} = R - r$
- $\boldsymbol{T_{GY}} \neq \boldsymbol{t^2 \cdot \pi}$!!!!



Térgeometria

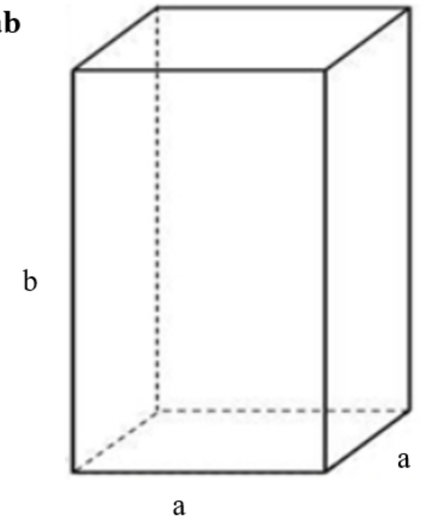
Téglatest

- **Felszín (A):**
- 3-féle oldal, minden oldalból 2 db (egymással szemben)
- Alsó és felső lapok területe: $a \cdot b$
- Jobb és bal lapok területe: $b \cdot c$
- Szemközti és hátsó lapok területe: $a \cdot c$
- $\boldsymbol{A} = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c = \mathbf{2} \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})$
- **Térfogat (V):**
- $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$



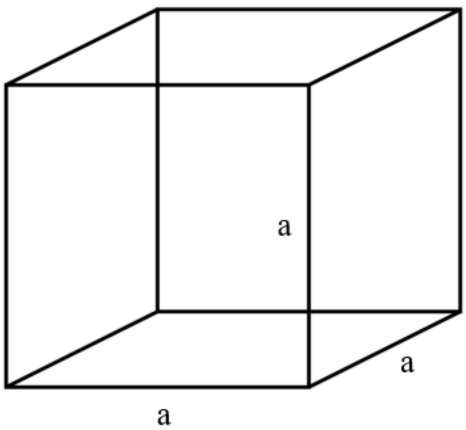
Négyzet alapú téglatest a.k.a. Négyzet alapú hasáb

- **Felszín (A):**
- 2-féle oldal → Alaplap 2 db, Oldallap 4 db
- Alaplapok területe: $a \cdot a = a^2$
- Oldallapok területe: $a \cdot b$
- $\boldsymbol{A} = \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} + \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$
- **Térfogat (V):**
- $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{b}$



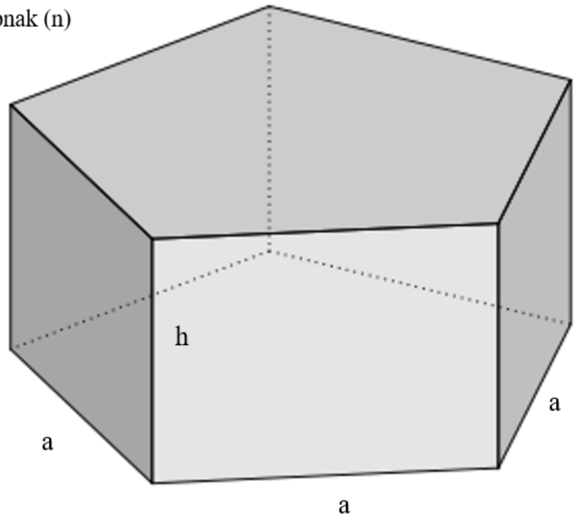
Kocka

- **Felszín (A):**
- 1-féle oldal → 6 db
- Lapok területe: $a \cdot a = a^2$
- $\boldsymbol{A} = \mathbf{6} \cdot \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}$
- **Térfogat (V):**
- $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}$



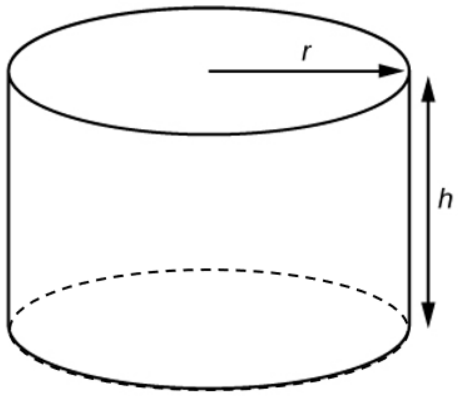
Hasáb

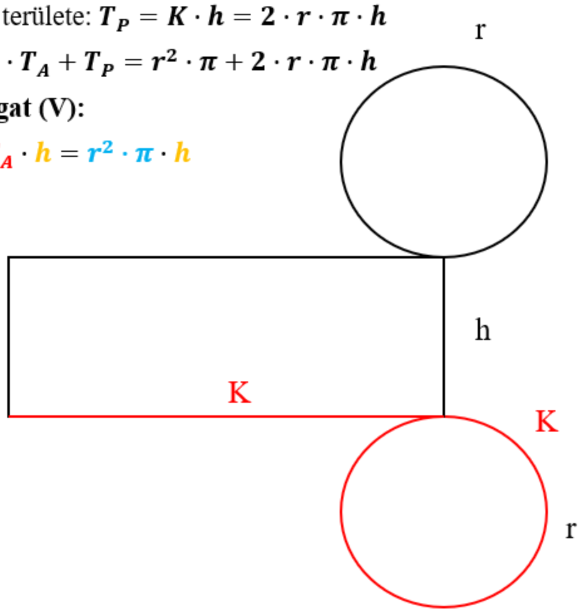
- Elnevezés: Alaptól függ (Háromszög alapú hasáb, Ötszög alapú hasáb, Hatszög alapú hasáb stb.)
- **Felszín (A):**
- 2-féle oldal → 2 db Alaplap, annyi oldallap, ahány csúcsa van az alaplapnak (n)
- Alaplapok területe: T_A
- Oldallapok területe: $\mathrm{T_O} = a \cdot h$
- Palást: Oldallapok területének összege → $T_P = n \cdot T_O$
- $\boldsymbol{A = 2 \cdot T_A + T_P}$
- **Térfogat (V):**
- $\boldsymbol{V = T_A \cdot h}$



Henger

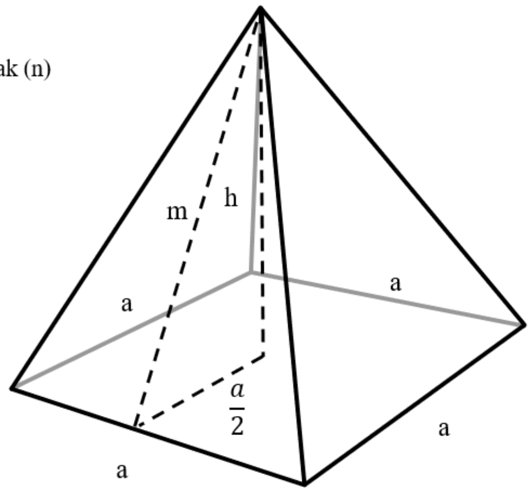
- Alapja: Kör
- **Felszín (A):**
- Alaplapok területe: $\boldsymbol{T_A = r^2 \cdot \pi} \left(= \frac{d^2}{4} \cdot \pi\right)$
- Palást területe: $\boldsymbol{T_P = K \cdot h = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h}$
- $\boldsymbol{A = 2 \cdot T_A + T_P = r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h}$
- **Térfogat (V):**
- $\boldsymbol{V = T_A \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h}$



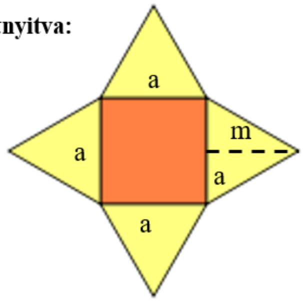


Gúla

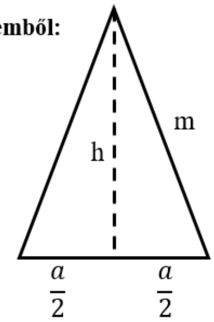
- Elnevezés: Alaptól függ (Háromszög alapú gúla, Négyzet alapú gúla stb.)
- **Felszín (A):**
- 2-féle oldal → 1 db Alaplap, annyi oldallap, ahány csúcsa van az alaplapnak (n)
- Alaplap területe: $\boldsymbol{T_A}$
- Oldallapok területe: $\mathbf{T_O} = \frac{\boldsymbol{a\cdot m}}{\mathbf{2}}$
- Palást: Oldallapok területének összege → $\boldsymbol{T_P = n \cdot T_O}$
- $\boldsymbol{A = 2 \cdot T_A + T_P}$
- **Térfogat (V):**
- $\boldsymbol{V = \frac{T_A \cdot h}{3}}$



Szétnyitva:

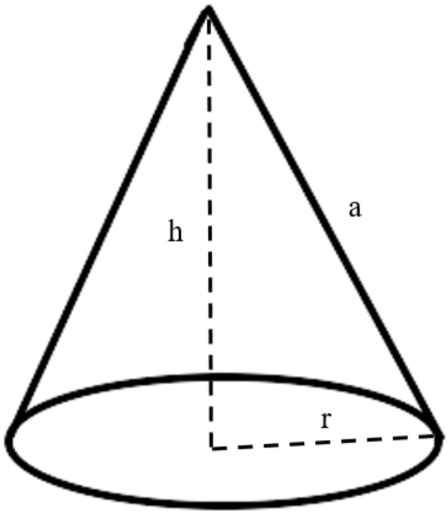


Szemből:

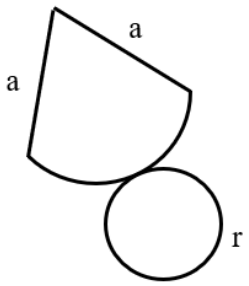


Kúp

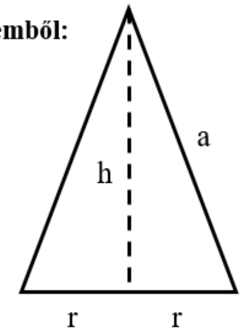
- **Felszín (A):**
- 2-féle oldal → 1 db Alaplap, 1 db palást
- a: alkotó
- Alaplap területe: $\boldsymbol{T_A = r^2 \cdot \pi}$
- Palást: $\boldsymbol{T_P = \frac{i\cdot r}{2} = \frac{K\cdot a}{2} = \frac{\cancel{2}\cdot r\cdot \pi\cdot a}{\cancel{2}} = r \cdot \pi \cdot a}$
- $\boldsymbol{A = T_A + T_P = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot a}$
- **Térfogat (V):**
- $\boldsymbol{V = \frac{T_A \cdot h}{3}}$



Szétnyitva:

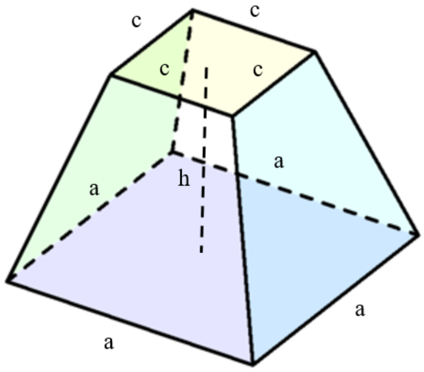


Szemből:

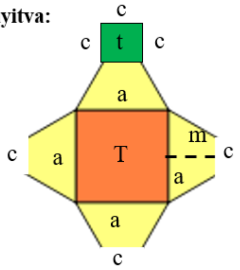


Csonkagúla

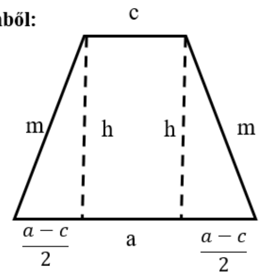
- **Felszín (A):**
- 3-féle oldal → 1 db Nagy alaplap, 1 db Kis alaplap, annyi oldallap, ahány csúcsa van az alaplapnak (n)
- Nagy alaplap területe: $\boldsymbol{T}$
- Kis alaplap területe: $\boldsymbol{t}$
- Oldallapok területe: $\mathbf{T_O} = \frac{a+c}{2} \cdot \boldsymbol{m}$
- Palást: Oldallapok területének összege → $\boldsymbol{T_P} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T_O}$
- $\boldsymbol{A = T + t + T_P}$
- **Térfogat (V):**
- $\boldsymbol{V} = \frac{(T+\sqrt{T\cdot t}+t)\cdot h}{3}$



Szétnyitva:

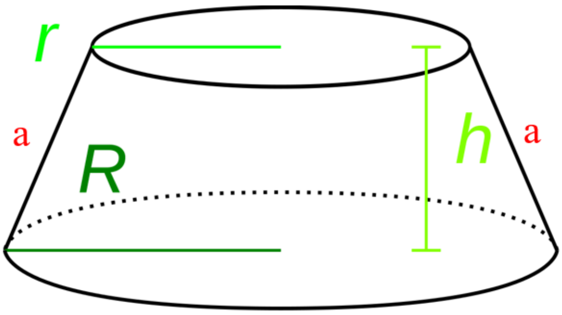


Szemből:

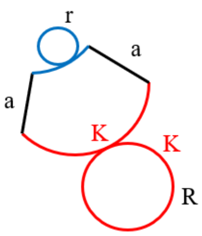


Csonkakúp

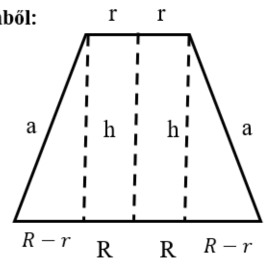
- **Felszín (A):**
- 3-féle oldal → 1 db Nagy alaplap, 1 db Kis alaplap, 1 db palást
- Nagy alaplap területe: $\boldsymbol{T = R^2\pi}$
- Kis alaplap területe: $\boldsymbol{t = r^2\pi}$
- Palást: $\boldsymbol{T_P} = \boldsymbol{(R + r) \cdot a \cdot \pi}$
- $\boldsymbol{A = T + t + T_P = R^2\pi + r^2\pi + (R + r) \cdot a \cdot \pi}$
- **Térfogat (V):**
- $\boldsymbol{V} = \frac{(R^2+R\cdot r+r^2)\cdot h\cdot \pi}{3}$



Szétnyitva:

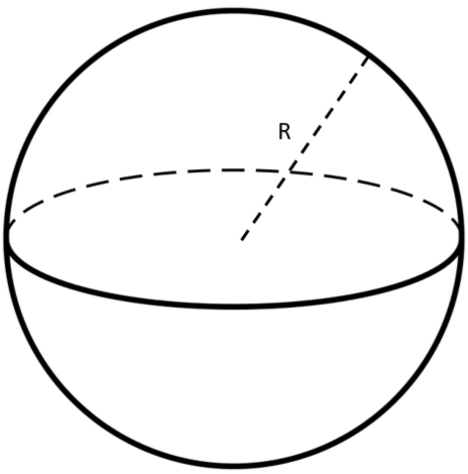


Szemből:



Gömb

- **Felszín (A):**
- $\boldsymbol{A = 4 \cdot R^2 \cdot \pi}$
- **Térfogat (V):**
- $\boldsymbol{V} = \frac{4\cdot R^3\cdot \pi}{3}$



Vektorok

Jelölés:

a

$\underline{a}$

$\vec{a}$

Vektorok megadása:

$\underline{a}(2; 1)$

$\underline{a} = (2; 1)$

$\underline{a} = \left(2\underline{i} + 1\underline{j} + 0\underline{k}\right)$

$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Művelet	Szabály	Példa
Összeadás	$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$ $\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x + b_x} \\ \boldsymbol{a_y + b_y} \end{bmatrix}$	$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{7} \end{bmatrix}$
Kivonás	$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$ $\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x - b_x} \\ \boldsymbol{a_y - b_y} \end{bmatrix}$ $\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_x - a_x} \\ \boldsymbol{b_y - a_y} \end{bmatrix}$ $\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}} = -\left(\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}}\right)$	$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-3} \end{bmatrix}$ $\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{3} \end{bmatrix}$

Művelet	Szabály	Példa
Két pont távolsága	$A = \begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}B_x\\B_y\end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix}B_x\\B_y\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B_x - A_x\\B_y - A_y\end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}B_x\\B_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_x - B_x\\A_y - B_y\end{bmatrix}$ Kétpont távolsága: $\lvert \boldsymbol{AB} \rvert = \lvert \boldsymbol{BA} \rvert = \sqrt{\boldsymbol{AB_x}^2 + \boldsymbol{AB_y}^2}$	$A = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-4\end{bmatrix}$ Kétpont távolsága: $\lvert \boldsymbol{AB} \rvert = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$
Vektor hossza	$\underline{a} = \begin{bmatrix}a_x\\a_y\end{bmatrix}$ $\lvert \underline{a} \rvert = \sqrt{\boldsymbol{a_x}^2 + \boldsymbol{a_y}^2}$	$\underline{a} = \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ $\lvert \underline{a} \rvert = \sqrt{4^2 + 1^1} = \sqrt{\mathbf{17}}$
Skaláris szorzat	$\underline{a} = \begin{bmatrix}a_x\\a_y\end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix}b_x\\b_y\end{bmatrix}$ $\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a_x} \cdot \boldsymbol{b_x} + \boldsymbol{a_y} \cdot \boldsymbol{b_y}$	$\underline{a} = \begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ $\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 5 = \mathbf{41}$
Két vektor által bezárt szög	$\underline{a} = \begin{bmatrix}a_x\\a_y\end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix}b_x\\b_y\end{bmatrix}$ $\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a_x} \cdot \boldsymbol{b_x} + \boldsymbol{a_y} \cdot \boldsymbol{b_y}$ $\lvert \underline{a} \rvert = \sqrt{\boldsymbol{a_x}^2 + \boldsymbol{a_y}^2}$ $\lvert \underline{b} \rvert = \sqrt{\boldsymbol{b_x}^2 + \boldsymbol{b_y}^2}$ **Képlet:** $\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = \lvert \underline{a} \rvert \cdot \lvert \underline{b} \rvert \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}$ Rendezés $\cos \alpha$-ra **Ha a skaláris szorzat:** • **Pozitív → $0° < \alpha < 90°$** • **$0 \rightarrow \alpha = 90°$** **Negatív → $90° < \alpha < 180°$**	$\underline{a} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ $\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 = \mathbf{-7}$ $\lvert \underline{a} \rvert = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{\mathbf{10}}$ $\lvert \underline{b} \rvert = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{\mathbf{13}}$ **Képlet:** $\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = \lvert \underline{a} \rvert \cdot \lvert \underline{b} \rvert \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}$ $\mathbf{-7} = \sqrt{\mathbf{10}} \cdot \sqrt{\mathbf{13}} \cdot \cos \alpha$ $\frac{-7}{\sqrt{130}} = \cos \alpha$ $-0{,}614 = \cos \alpha$ $\mathbf{127{,}875°} = \boldsymbol{\alpha}$
Felezőpont	$A = \begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}B_x\\B_y\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{F_x} = \frac{\boldsymbol{A_x} + \boldsymbol{B_x}}{\mathbf{2}}$ $\boldsymbol{F_y} = \frac{\boldsymbol{A_y} + \boldsymbol{B_y}}{\mathbf{2}}$	$A = \begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{F_x} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = \mathbf{4}$ $\boldsymbol{F_y} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$ $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}$

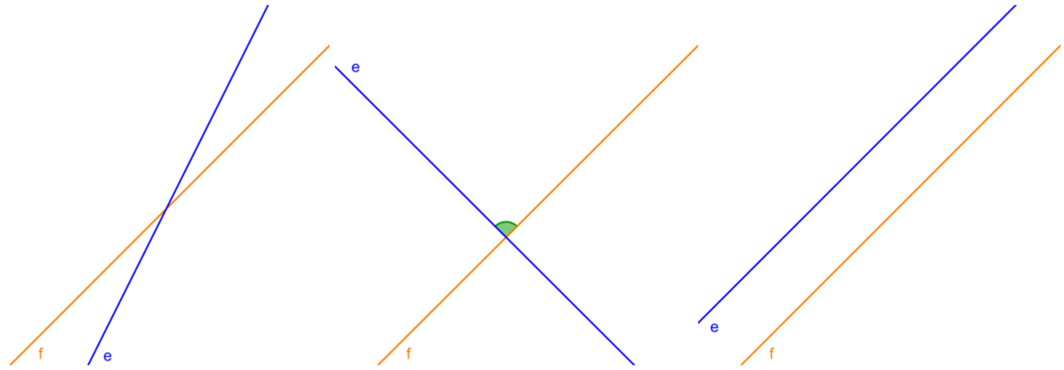
Művelet	Szabály	Példa
Harmadolópont	$A=\begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}B_x\\B_y\end{bmatrix}$ **A-hoz közelebbi:** $\boldsymbol{H_{1x}=\frac{2\cdot A_x+B_x}{3}}$ $\boldsymbol{H_{1y}=\frac{2\cdot A_y+B_y}{3}}$ **B-hez közelebbi:** $\boldsymbol{H_{2x}=\frac{A_x+2\cdot B_x}{3}}$ $\boldsymbol{H_{2y}=\frac{A_y+2\cdot B_y}{3}}$	$A=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ **A-hoz közelebbi:** $\boldsymbol{H_{1x}}=\frac{2\cdot1+4}{3}=\frac{6}{3}=\mathbf{2}$ $\boldsymbol{H_{1y}}=\frac{2\cdot2+5}{3}=\frac{9}{3}=\mathbf{3}$ **B-hez közelebbi:** $\boldsymbol{H_{2x}}=\frac{1+2\cdot4}{3}=\frac{6}{3}=\mathbf{3}$ $\boldsymbol{H_{2y}}=\frac{2+2\cdot5}{3}=\frac{12}{3}=\mathbf{4}$ $\boldsymbol{H_1}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{H_2}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$
n-edelő pont	$A=\begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}B_x\\B_y\end{bmatrix}$ **A-hoz közelebbi:** $\boldsymbol{T_{1x}=\frac{(n-1)\cdot A_x+B_x}{n}}$ $\boldsymbol{T_{1y}=\frac{(n-1)\cdot A_y+B_y}{n}}$ **B-hez közelebbi:** $\boldsymbol{T_{2x}=\frac{A_x+(n-1)\cdot B_x}{n}}$ $\boldsymbol{T_{2y}=\frac{A_y+(n-1)\cdot B_y}{n}}$	$A=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}$ 5-ödölő pont **A-hoz közelebbi:** $\boldsymbol{T_{1x}}=\frac{4\cdot3+8}{5}=\mathbf{4}$ $\boldsymbol{T_{1y}}=\frac{4\cdot2+2}{5}=\mathbf{2}$ **B-hez közelebbi:** $\boldsymbol{T_{2x}}=\frac{1+4\cdot8}{5}=\boldsymbol{\frac{33}{5}}$ $\boldsymbol{T_{2y}}=\frac{2+4\cdot2}{5}=\mathbf{2}$
Súlypont	$A=\begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}B_x\\B_y\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}C_x\\C_y\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{S_x=\frac{A_x+B_x+C_x}{3}}$ $\boldsymbol{S_y=\frac{A_y+B_y+C_y}{3}}$ $\boldsymbol{S=\begin{bmatrix}S_x\\S_y\end{bmatrix}}$	$A=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{S_x}=\frac{-2+1+4}{3}=\frac{3}{3}=\mathbf{1}$ $\boldsymbol{S_y}=\frac{4+5+(-3)}{3}=\frac{6}{3}=\mathbf{2}$ $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{bmatrix}$

Egyenes egyenlete

Művelet	Szabály	Példa
Irányvektor	$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x} \\ \boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{a_x} \\ -\boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$	$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$
Irányvektor 2 pontból	$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_1} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B_x - A_x} \\ \boldsymbol{B_y - A_y} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_2} = \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_x - B_x} \\ \boldsymbol{A_y - B_y} \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_1} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_2} = \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}$
Meredekség	$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x} \\ \boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{a_x} \\ -\boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{v_y}}{\boldsymbol{v_x}}$	$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$
Normálvektor	$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x} \\ \boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{a_x} \\ -\boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{n_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_y} \\ -\boldsymbol{v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_y} \\ -\boldsymbol{a_x} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{n_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{v_y} \\ \boldsymbol{v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{a_y} \\ \boldsymbol{a_x} \end{bmatrix}$	$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{n_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_y} \\ -\boldsymbol{v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-5} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{n_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{v_y} \\ \boldsymbol{v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{5} \end{bmatrix}$

Művelet	Szabály	Példa
Egyenes egyenlete	$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n_y} \\ \boldsymbol{n_y} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{y_0} \end{bmatrix}$ **P olyan pont, ami rajta van az egyenesen.** **Egyenes egyenlete:** $\boldsymbol{n_x \cdot x + n_y \cdot y = n_x \cdot x_0 + n_y \cdot y_0}$	$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$ **Egyenes egyenlete:** $5 \cdot x + 1 \cdot y = 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 2$ $5x + y = -15 + 2$ $\boldsymbol{5x + y = -13}$
Két egyenes metszéspontja	$e1$: $x + y = 3$ $e2$: $2x + 3y = 4$ Egyenletrendszerként oldjuk meg.	

Két egyenes viszonya



Metszik egymást → 1 metszéspont

$\boldsymbol{m_e \neq m_f}$
$\boldsymbol{v_e \neq v_f}$
$\boldsymbol{n_e \neq n_f}$

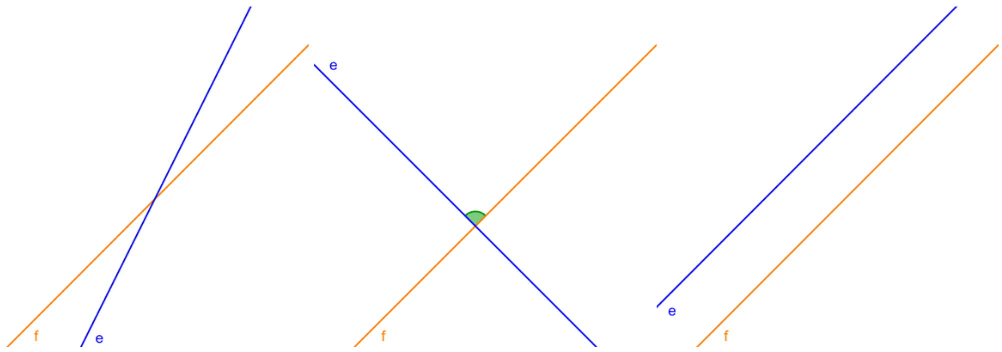
Egymásra merőlegesek→ 1 metszéspont

$\boldsymbol{m_e \neq m_f}$
$\boldsymbol{v_e = n_f}$
$\boldsymbol{n_e = v_f}$

Párhuzamosak→ 0 metszéspont

$\boldsymbol{m_e = m_f}$
$\boldsymbol{v_e = v_f}$
$\boldsymbol{n_e = n_f}$

Két egyenes távolsága



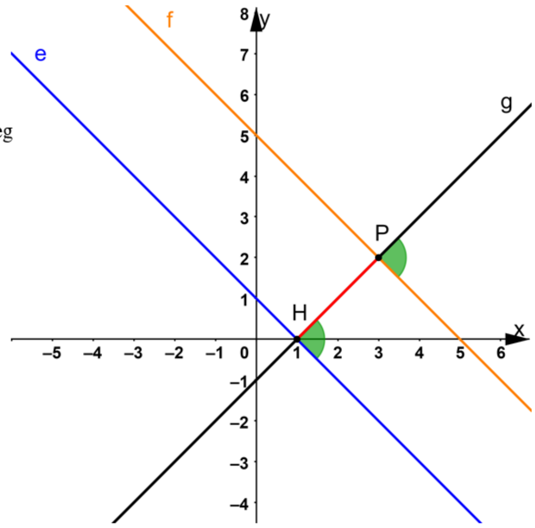
Metszik egymást → 1 metszéspont
Nem számolunk távolságot

Egymásra merőlegesek→ 1 metszéspont
Nem számolunk távolságot

Párhuzamosak→ 0 metszéspont
Csak itt számolunk távolságot

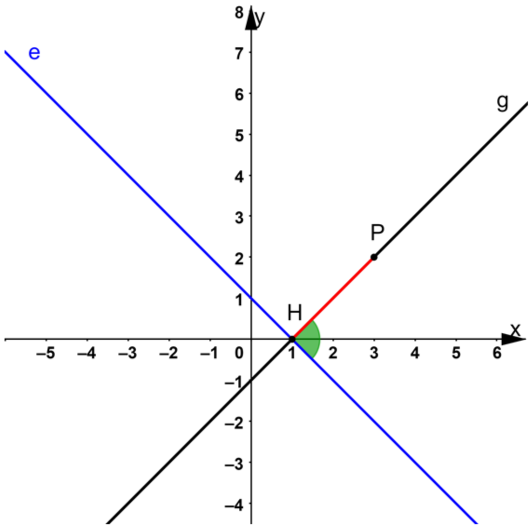
Két egyenes távolsága

- Felveszünk egy tetszőleges pontot az egyik egyenesen (P)
- Merőlegest állítunk erre a pontra, így megkapjuk g egyenletét
- e és g egyenesek metszéspontja lesz H
- A két egyenes távolsága H és P pontok távolságával egyezik meg



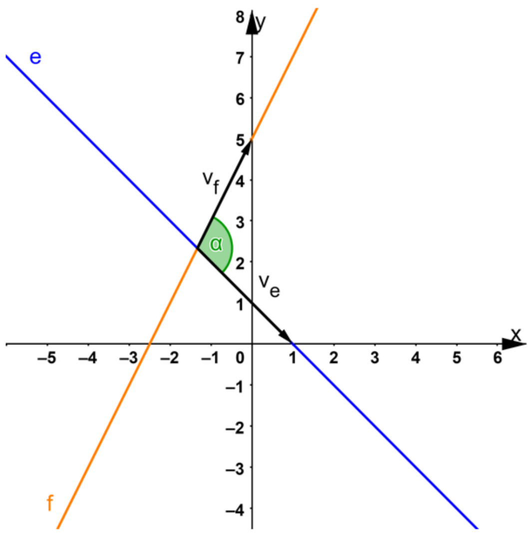
Pont és egyenes távolsága

- Ugyanaz, mint egyenes és egyenes távolsága, csak elején nem kell pontot felvenni
- Merőlegest állítunk erre a pontra, így megkapjuk g egyenletét
- e és g egyenesek metszéspontja lesz H
- A pont és egyenes távolsága H és P pontok távolságával egyezik meg



Két egyenes hajlásszöge

- Két egyenes által bezárt szög kiszámítását visszavezethetjük két vektor által bezárt szöghöz: $\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = |\underline{\boldsymbol{a}}| \cdot |\underline{\boldsymbol{b}}| \cdot \cos\alpha$
- $\boldsymbol{v_e} \cdot \boldsymbol{v_f} = |\boldsymbol{v_e}| \cdot |\boldsymbol{v_f}| \cdot \cos\alpha$
- $\boldsymbol{n_e} \cdot \boldsymbol{n_f} = |\boldsymbol{n_e}| \cdot |\boldsymbol{n_f}| \cdot \cos\alpha$



Oszthatóság

Egy szám osztható:

- 2-vel: Ha páros (utolsó számjegye 0 vagy 2 vagy 4 vagy 6 vagy 8).
- 3-mal: Ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.
- 4-gyel: Ha az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám osztható 4-gyel.
- 5-tel: Ha az utolsó számjegye 0 vagy 5.
- 6-tal: Ha az osztható 2-vel és 3-mal is → Páros (utolsó számjegye 0 vagy 2 vagy 4 vagy 6 vagy 8) és számjegyeinek összege osztható 3-mal. Mind a két feltételnek teljesülnie kell, nem elég, ha csak 2-vel osztható, de 3-mal nem, vagy fordítva. Először mindig a 2-vel való oszthatóságot nézzük meg, mert az ránézésre látszik, ha nem páros a 3-mal való oszthatóságot felesleges megvizsgálnunk.
- 7-tel: Van rá szabály, de nagyon macerás, itt írásban lehet megnézni, hogy osztható-e 7-tel.
- 8-cal: Ha az utolsó három számjegyéből képzett háromjegyű szám osztható 8-cal.
- 9-cel: Ha számjegyeinek összege osztható 9-cel.
- 10-zel: Ha az utolsó számjegye 0.

További oszthatóságok szorzatként jönnek ki:

- 12-vel: Ha osztható 3-mal és 4-gyel.
- 14-gyel: Ha osztható 2-vel és 7-tel.
- 15-tel: Ha osztható 3-mal és 5-tel.
- 18-cal: Ha osztható 2-vel és 9-cel.
- 24-gyel: Ha osztható 3-mal és 8-cal.

Oszthatósági szabályok 40-ig: Google → Oszthatósági szabályok

Számtani sorozat

$a_1 - első\ tag$

$d - differencia,\ különbség$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_n - n.\ tag$

$a_5 = a_1 + 4 \cdot d$

$S_n = \frac{(2a_1 + (n-1) \cdot d) \cdot n}{2} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_n - az\ első\ n\ tag$ összege

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

Mértani sorozat

$a_1 - első\ tag$

$q - kvóciens,$ hányados

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n - n.\ tag$

$a_3 = a_1 \cdot q^2$

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$S_n - az\ első\ n\ tag$ összege

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$