Függvények jellemzése

Értelmezési tartomány

- Jelölés: Középiskolában: É.T. ⟷ Egyetemen: D_f
- Megadja, hogy a függvény milyen x értékek mentén van értelmezve (vízszintesen nézzük)

Értékkészlet

- Jelölés: Középiskolában: É.K ⟷ Egyetemen: R_f
- Megadja, hogy a függvény milyen y értékeket vehet fel (függőlegesen nézzük)

Zérushely

- Jelölés: Z.H.
- Megadja, hogy hol metszi a függvény az x tengelyt
- **0, 1, 2, vagy akár több zérus hely is lehet** egy függvénynél (akár végtelen sok is, pl.: sin cos)
- Kiszámítása: $f(x) = 0$

Tengelymetszet, Tengelypont

- Jelölés: T.M., T.P.
- Megadja, hogy hol metszi a függvény az y tengelyt
- Vagy **0** vagy **1** tengelymetszet lehet, **több nem!**
- Kiszámítása: $f(0) = \cdots$

Monotonitás

- Minden függvény, vagy Sz.m.n. vagy Sz.m.cs. (kivéve konstans függvény ($y = 1$))
- Összefügg a szélső értékkel:
- Ha nő és utána csökken, akkor ahol a váltás történik ott maximum lesz
- Ha csökken és utána nő, akkor ahol a váltás történik ott minimum lesz

Folytonosság

- Folytonos egy függvény, ha végig tudjuk rajta húzni a ceruzánkat úgy, hogy nem kell közben felemelnünk.

Korlátosság

- Egy függvény lehet:
- Nem korlátos: Se felső se alsó korlátja nincsen (pl.: $f(x) = x$)
- Alulról korlátos: Ha van olyan y érték, ami alá nem megy le a függvény (pl.: $f(x) = x^2$)
- Felülről korlátos: Ha van olyan y érték, ami fölé nem megy a függvény (pl.: $f(x) = -x^2$)
- Alulról és felülről is korlátos: Ha vannak olyan y értékek, amik között mozog a függvény (pl.: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$)

Periodicitás

- Egy függvény periodikus, ha van olyan része, ami ismétlődik egymás után
- Periodikus függvények: Trigonometrikus függvények (sin, cos, tg, ctg)

Eltolások

$f(x) = (x + \Delta) + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Nyújtások

$f(x) = 2 \cdot (x) \rightarrow 2 - szeres\ nyújtás$ y irányban

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x) \rightarrow 2 - szeres$ összenyomás y irányban

$f(x) = (2x) \rightarrow 2 - szeres$ összenyomás x irányban

$f(x) = \left(\frac{1}{2}x\right) \rightarrow 2 - szeres\ nyújtás$ x irányban

Tükrözések

$f(x) = (-x) \rightarrow y\ tengelyre\ tükrözés$

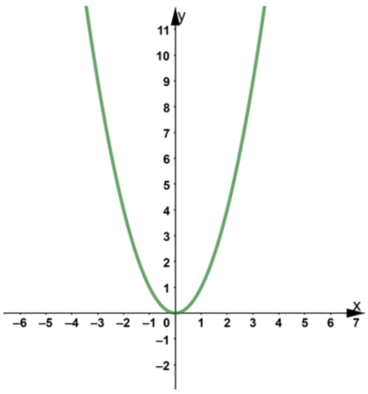
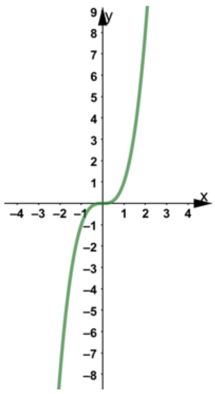
$f(x) = -(x) \rightarrow x\ tengelyre\ tükrözés$

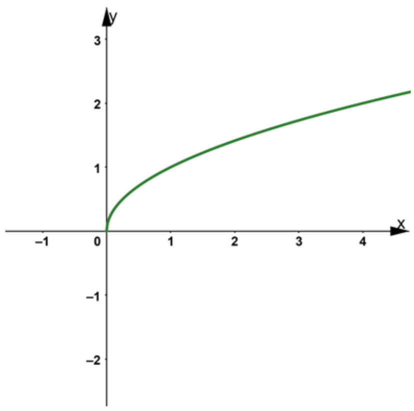
$f(x) = -(-x) \rightarrow x\ és\ y\ tengelyre\ is\ tükrözés$

Ezek a tükrözések mindig az eltolt tengelyre vonatkoznak!

Paritás

- Páros függvényeknél, ha y irányban toljuk csak el (fel / le), akkor marad páros, ha x irányban is eltoljuk, vagy csak x irányban toljuk el (jobbra / balra), akkor se páros se páratlan nem lesz a függvény.
- Páratlan függvényeknél bármerre is toljuk el, akár y irányban (fel / le), akár x irányban (jobbra / balra), akkor se páros se páratlan nem lesz a függvény.
- Nyújtásokkal nem változik a paritás.

	Páros	**Páratlan**
Definíció	Páros egy függvény, ha szimmetrikus az y tengelyre.	Páratlan egy függvény, ha szimmetrikus az origóra.
”Matematikusan”	$f(x) = f(-x)$	$f(x) = -f(-x)$
Példák	$f(x) = \lvert x \rvert, x^2, x^4 \ldots, \cos x$	$f(x) = x, x^3 \ldots, \sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x} \ldots, \frac{1}{x}, \sin x$
Ábrázolás		

	Sem páros, sem páratlan függvények
Definíció	Olyan függvény, ami nem szimmetrikus, sem az y tengelyre, sem az origóra.
”Matematikusan”	$f(x) \neq f(-x), \quad f(x) \neq -f(-x)$
Példák	$f(x) = \sqrt{x}, \sqrt[4]{x} \ldots, 2^x, 3^x \ldots, \log_2 x, \log_3 x \ldots$
Ábrázolás	

Konstans függvény

$f(x) = 2$

$D_f: x \in \mathbb{R}$

$R_f: y = 2$

Zérushely: $Nincs$

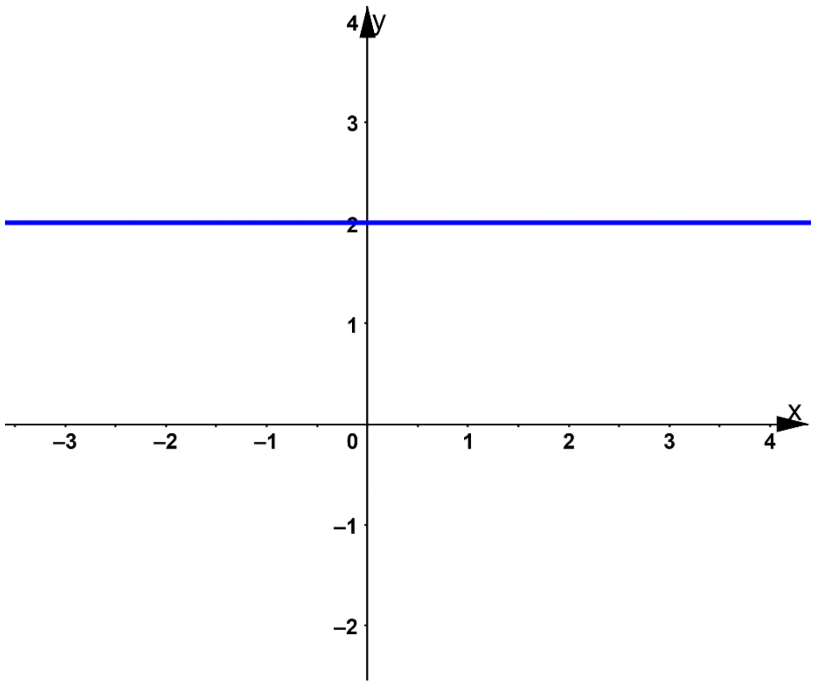
Tengelypont: $y = 2$

Monotonitás:

$Se\ Sz.m.n.,\ se\ Sz.m.cs.$

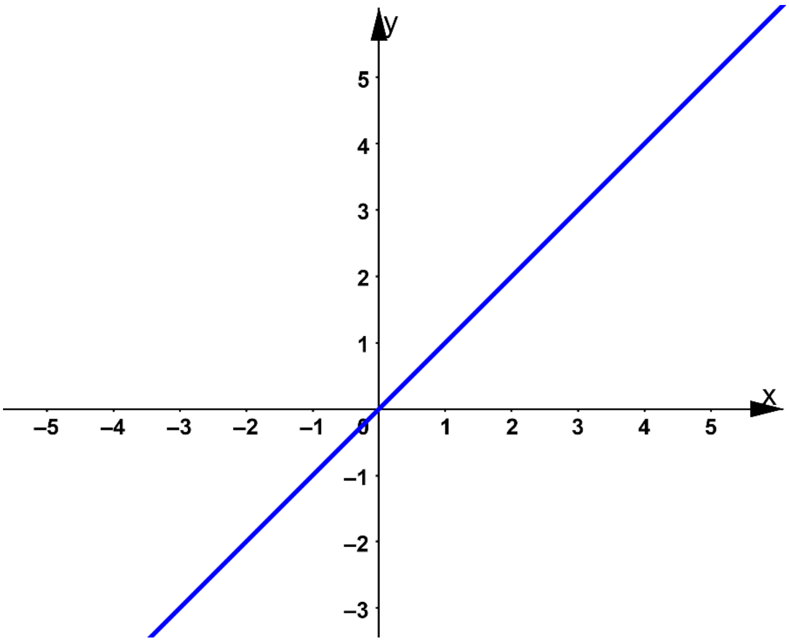
Szélsőérték: Nincs

Paritás: Páros



x	y
0	2
1	2
2	2
3	2
-1	2
-2	2
-3	2

Lineáris függvény



$f(x) = x$

D_f: $x \in \mathbb{R}$

R_f: $y \in \mathbb{R}$

Zérushely: $x = 0$

Tengelypont: $\mathrm{y} = 0$

Monotonitás: Sz.m.n.

Szélsőérték: Nincs

Paritás: Páratlan

Lineáris függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$
- Zérushely: $f(x) = 0$, mindig 1 zérushely van
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, mindig 1 tengelymetszet van
- Monotonitás:
- ➢ Ha nincs az x-es kifejezés előtt mínusz előjel → Sz.m.n.
- ➢ Ha van az x-es kifejezés előtt mínusz előjel → Sz.m.cs.
- Szélsőérték sosincs
- Paritás: Páratlan, ha nincs benne eltolás, sem páratlan sem páros, ha van benne eltolás
- Törtek meredeksége:

$$\frac{2}{5}x \to \frac{fel}{jobbra} \to 5 - öt\ jobbra(\to)\ 2 - t\ fel\ (\uparrow)$$

x	y
0	0
1	1
2	2
3	3
-1	-1
-2	-2
-3	-3

$f(x) = \Delta \cdot x + \otimes$

$\Delta: meredekség$

$\otimes: y\ tengely\ metszet$

Lineáris függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük, hogy hol metszi az y tengelyt, azt bejelöljük**
- **Megnézzük a meredekséget, és annyit lépkedünk jobbra / balra és fel / le amennyi a meredekség**

Abszolútérték függvény

$f(x) = |x|$

D_f: $x \in \mathbb{R}$

R_f: $[0; \infty[$

Zérushely: $x = 0$

Tengelypont: $y = 0$

Monotonitás:

$]-\infty; 0[\rightarrow Sz.m.cs.$

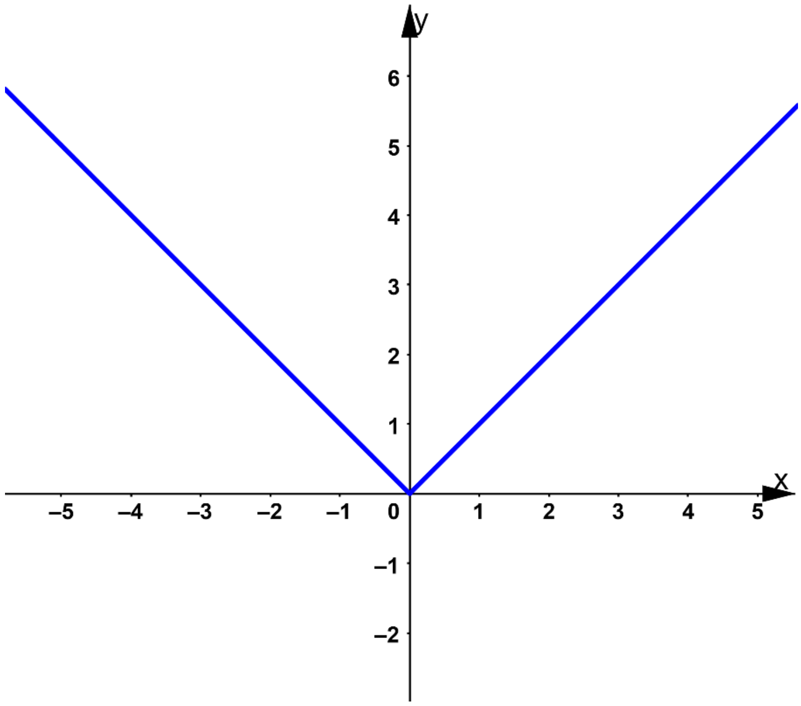
$]0; \infty[\rightarrow Sz.m.n.$

Szélsőérték: Minimum

$Minimum\ hely$: $x = 0$

$Minimum\ érték$: $y = 0$

Paritás: Páros



Abszolútérték függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: függőleges eltolástól függ pl.: $f(x) = |x| - 2 \rightarrow R_f$: $[-2; \infty[$
- Zérushely: $f(x) = 0$, lehet 0, 1, vagy 2 zérushely is (függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, mindig 1 tengelymetszet van
- Monotonitás:
  - Vízszintes eltolástól függ → Először Sz.m.cs. minimum helyig, aztán Sz.m.n.
  - Ha az abszolútértékjel előtt van mínusz előjel → Először Sz.m.n. maximum helyig, aztán Sz.m.cs.
- Szélsőérték: mindig van, ha nincs mínusz előjel az abszolútérték előtt, akkor minimum, ha van mínusz előjel, akkor maximum
- Paritás: Páros, ha nincs benne vízszintes eltolás, vagy csak nyújtás van benne, sem páros sem páratlan, ha van benne vízszintes eltolás
- Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
- Vízszintes eltolás megadja a monotonitási határokat, valamint a minimum/maximum helyét

Abszolútérték függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (minimum, vagy maximum)**
- **A csúcsból kiindulva a sima abszolútérték függvényt ábrázoljuk (1-et jobbra 1-et fel, 1-et balra 1-et fel)**

x	y
0	0
1	1
2	2
3	3
-1	1
-2	2
-3	3

Eltolások

$f(x) = |x + \Delta| + \otimes$

$\otimes$: $y\ irányú\ eltolás$

Δ: $x\ irányú\ eltolás$

$\otimes$: $logikusan$:

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

Δ: $fordítva$:

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Másodfokú függvény

$f(x) = x^2$

$D_f\colon\ x \in \mathbb{R}$

$R_f\colon [0;\infty[$

Zérushely: $x = 0$

Tengelypont: $y = 0$

Monotonitás:

$]-\infty;0[\rightarrow Sz.m.cs.$

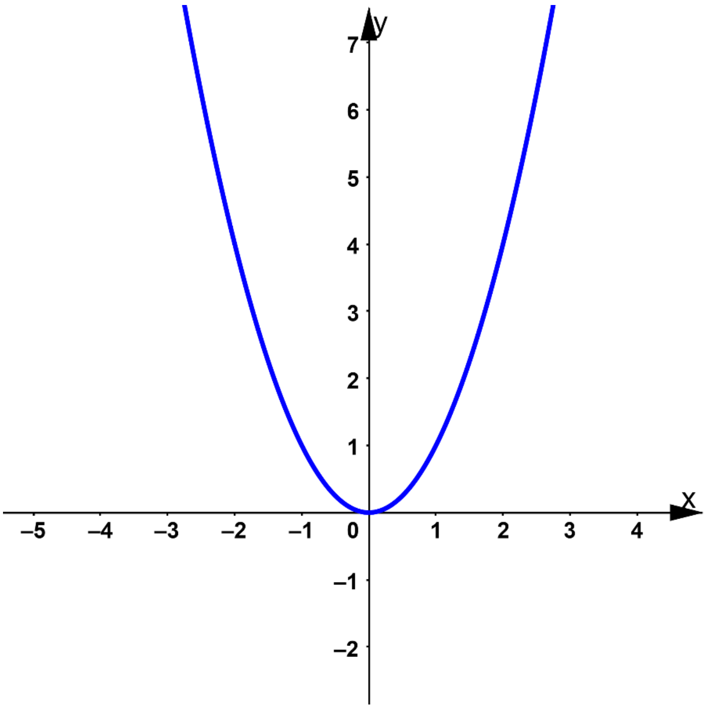
$]0;\infty[\rightarrow Sz.m.n.$

Szélsőérték: Minimum

$Minimum\ hely\colon\ x = 0$

$Minimum\ érték\colon y = 0$

Paritás: Páros



x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
-1	1
-2	4
-3	9

Másodfokú függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: függőleges eltolástól függ pl.: $f(x) = x^2 + 3 \rightarrow R_f\colon [3;\infty[$
- Zérushely: $f(x) = 0$, lehet 0, 1, vagy 2 zérushely is (függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, mindig 1 tengelymetszet van
- Monotonitás:
  - ➢ Vízszintes eltolástól függ → Először Sz.m.cs. minimum helyig, aztán Sz.m.n.
  - ➢ Ha a zárójel előtt van mínusz előjel → Először Sz.m.n. maximum helyig, aztán Sz.m.cs.
- Szélsőérték: mindig van, ha nincs mínusz előjel a zárójel előtt, akkor minimum, ha van mínusz előjel, akkor maximum
- Paritás: Páros, ha nincs benne vízszintes eltolás, vagy csak nyújtás van benne, sem páros sem páratlan, ha van benne vízszintes eltolás
- Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
- Vízszintes eltolás megadja a monotonitási határokat, valamint a minimum/maximum helyét

Másodfokú függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (minimum, vagy maximum)**
- **A csúcsból kiindulva a sima másodfokú függvényt ábrázoljuk**

Eltolások

$f(x) = (x + \Delta)^2 + \otimes$

$\otimes\colon y\ irányú\ eltolás$

$\Delta\colon x\ irányú\ eltolás$

$\otimes\colon logikusan\colon$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta\colon fordítva\colon$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Négyzetgyök függvény

$f(x) = \sqrt{x}$

D_f: $[0; \infty[$

R_f: $[0; \infty[$

Zérushely: $x = 0$

Tengelypont: $y = 0$

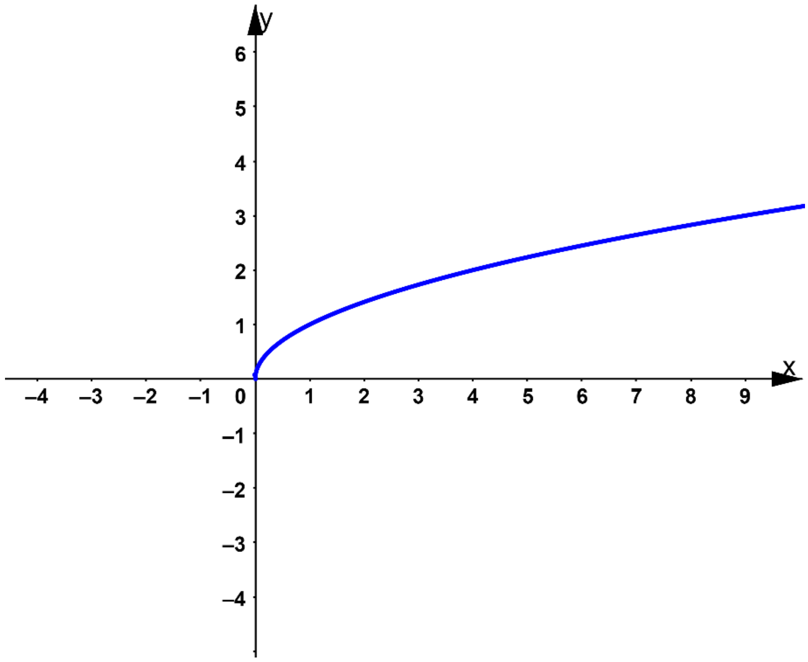
Monotonitás: Sz.m.n.

Szélsőérték: Minimum

$Minimum\ hely$: $x = 0$

$Minimum\ érték$: $y = 0$

Paritás: Sem páros, sem páratlan



Gyökfüggvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: Gyök alatti kifejezés≥ 0
- Értékkészlet: függőleges eltolástól függ pl.: $f(x) = \sqrt{x} - 2 \rightarrow R_f: [-2; \infty[$
- Zérushely: $f(x) = 0$, 0 vagy 1 zérushely lehet (függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 0 vagy 1 tengelymetszet lehet (vízszintes eltolástól függ)
- Monotonitás: Gyökjel előtti, valamint gyökön belüli mínusz előjelektől függ:
- $\sqrt{x}, -\sqrt{-x} \rightarrow Sz.m.n.$, $\sqrt{-x}, -\sqrt{x} \rightarrow Sz.m.cs.$
- Szélsőérték: mindig van, az eltolások metszetében lesz, az hogy minimum vagy maximum, a gyökjel előtti, valamint gyökön belüli mínusz előjelektől függ
- Paritás: Sem páros sem páratlan
- Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
- Vízszintes eltolás megadja az értelmezési tartomány végét, valamint a minimum/maximum helyét

Gyökfüggvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (minimum, vagy maximum)**
- **A csúcsból kiindulva a sima gyökfüggvényt ábrázoljuk**

x	y
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4

Eltolások

$f(x) = \sqrt{x + \Delta} + \otimes$

$\otimes$: $y\ irányú\ eltolás$

Δ: $x\ irányú\ eltolás$

$\otimes$: $logikusan$:

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

Δ: $fordítva$:

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Tört függvény

$f(x) = \frac{1}{x}$

$D_f: x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$R_f: y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Zérushely: $Nincs$

Tengelypont: $Nincs$

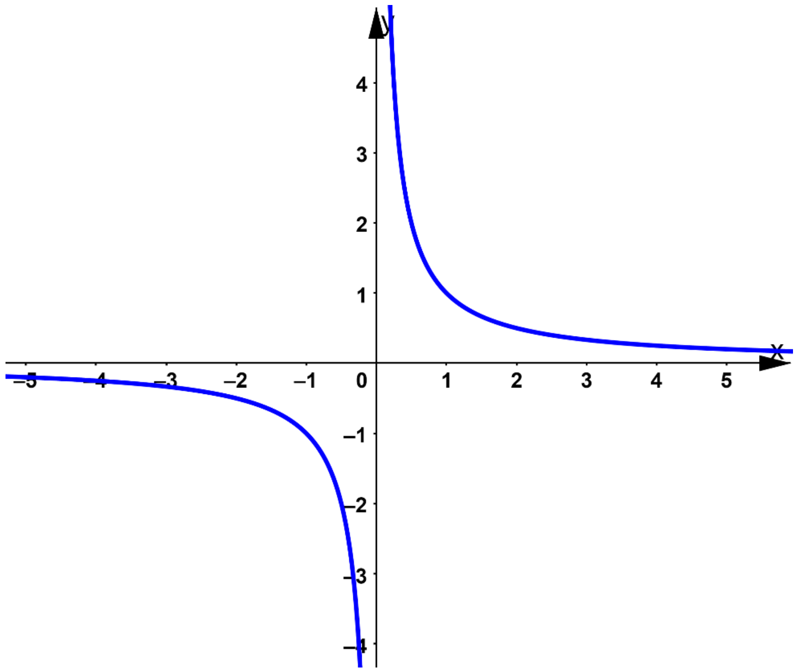
Monotonitás:

$]-\infty; 0[\rightarrow Sz.m.cs.$

$]0; \infty[\rightarrow Sz.m.cs.$

Szélsőérték: Nincs

Paritás: Páratlan



Törtfüggvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, kivéve ahol a nevező 0
- Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$ kivéve, amennyivel el van tolva a függvény függőlegesen
- Zérushely: $f(x) = 0$, 0 vagy 1 zérushely lehet (függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 0 vagy 1 tengelymetszet lehet (vízszintes eltolástól függ)
- Monotonitás: Csökkenő, ha nincs előtte mínuszjel, növekő, ha van előtte mínuszjel, két részben írjuk fel
- Szélsőérték: nincs
- Paritás: Páratlan, ha nincs benne semmilyen eltolás, vagy ha csak nyújtás van benne
- Függőleges eltolás megadja, hogy az értékkészletben hol van szakadás
- Vízszintes eltolás megadja, hogy az értelmezési tartományban, hol van szakadás

x	y
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{3}$

Törtfüggvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, azok lesznek az új koordináta tengelyek**
- **Az új koordináta tengelyekben megrajzoljuk a függvényt**

Eltolások

$f(x) = \frac{1}{x + \Delta} + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Exponenciális függvény

$f(x) = 2^x$

D_f: $x \in \mathbb{R}$

R_f: $]0; \infty[$

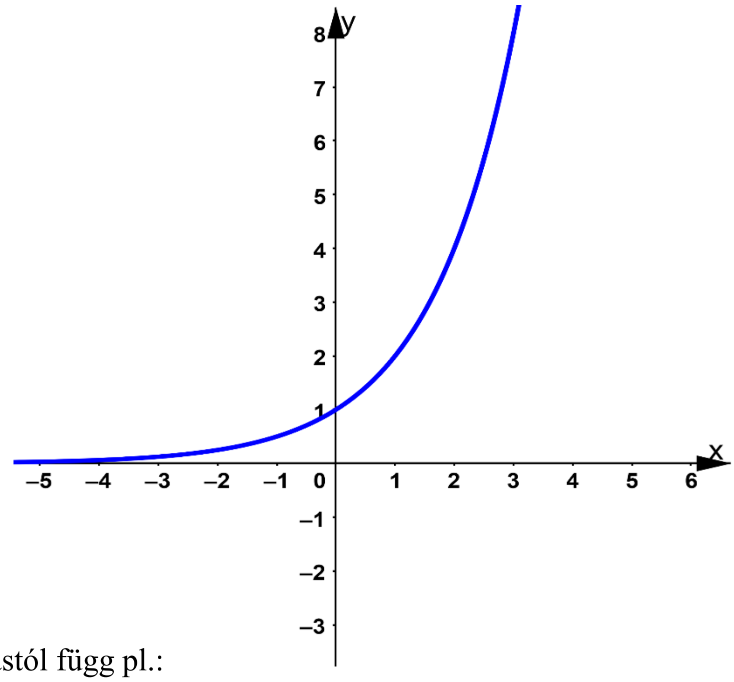
Zérushely: Nincs

Tengelypont: y = 1

Monotonitás: Sz.m.n.

Szélsőérték: Nincs

Paritás: Sem páros, sem páratlan



Exponenciális függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: függőleges eltolástól függ pl.: $f(x) = 2^x - 4 \to R_f:]-4; \infty[$
- Zérushely: $f(x) = 0$, 0 vagy 1 zérushely lehet (függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, mindig 1 tengelymetszet van, ha nincs benne eltolás, akkor y=1
- Monotonitás:
- ➢ Ha a hatvány alap 1-nél nagyobb → Sz.m.n.
- ➢ Ha a hatvány alap 1-nél kisebb → Sz.m.cs.
- Szélsőérték: Nincs
- Paritás: Sem páros sem páratlan
- Függőleges eltolás megadja az értékkészlet végét
- Vízszintes eltolás nem ad meg semmit

Exponenciális függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz az új origó, a függvény y=1-be metszi az új y tengelyt**
- **Ha bejelöltük az új tengelyen a metszetet ábrázoljuk az eredeti függvényt** $\left(2^x, 3^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x \ldots\right)$

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$

Eltolások

$f(x) = 2^{x+\Delta} + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Logaritmus függvény

$f(x) = \log_2 x$

D_f: $]0; \infty[$

$R_f: y \in \mathbb{R}$

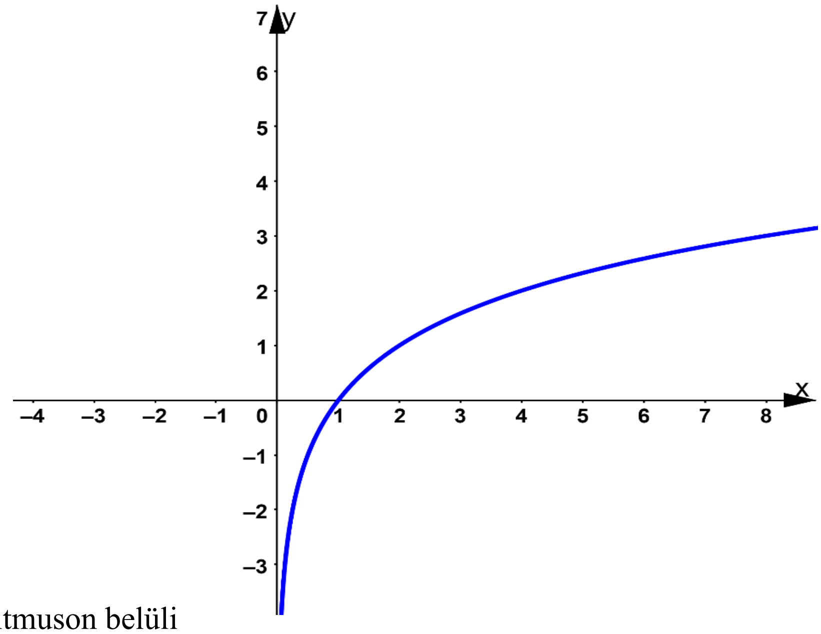
Zérushely: x = 1

Tengelypont: Nincs

Monotonitás: Sz.m.n.

Szélsőérték: Nincs

Paritás: Sem páros, sem páratlan



Logaritmus függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: logaritmuson belüli kifejezés > 0
- Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$
- Zérushely: $f(x) = 0$, mindig 1 zérushely van (függőleges eltolástól függ), ha nincs benne eltolás, akkor x=1
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 0 vagy 1 tengelymetszet lehet, vízszintes eltolástól függ
- Monotonitás:
  - Ha a logaritmus alap 1-nél nagyobb → Sz.m.n.
  - Ha a logaritmus alap 1-nél kisebb → Sz.m.cs.
- Szélsőérték: Nincs
- Paritás: Sem páros sem páratlan
- Függőleges eltolás nem ad meg semmit
- Vízszintes eltolás megadja az értelmezési tartomány végét

x	y
1	0
2	1
4	2
8	3
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2

Logaritmus függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz az új origó, a függvény x=1-be metszi az új x tengelyt**
- **Ha bejelöltük az új tengelyen a metszetet ábrázoljuk az eredeti függvényt** $\left(\boldsymbol{log_2, log_3, log_{\frac{1}{3}}} \ldots\right)$

Eltolások

$f(x) = \log_2(x + \Delta) + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Szinusz (Sin) függvény

$f(x) = \sin x$

$D_f\colon\ x \in \mathbb{R}$

$R_f\colon [-1; 1]$

Zérushely:$x = 0 + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Tengelypont: $y = 0$

Monotonitás:

$\left]0 + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right[\to Sz.m.n.$

$\left]\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right[\to Sz.m.cs.$

$\left]\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi\right[\to Sz.m.n.$

Szélsőérték: Minimum, Maximum

$Minimum\ hely\colon x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

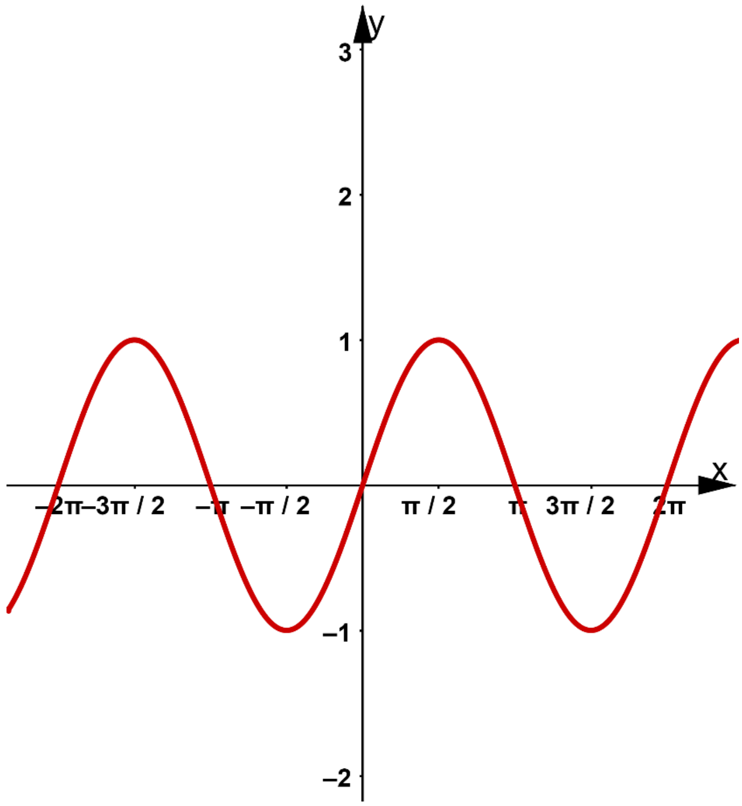
$Minimum\ érték\colon y = -1$

$Maximum\ hely\colon x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

$Maximum\ hely\colon y = 1$

Paritás: Páratlan

Periodicitás: Periodikus, periódusa: 2π



$\boldsymbol{x}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\boldsymbol{y}$	0	1	0	-1	0

Eltolások

$f(x) = sin(x + \Delta) + \otimes$

$\otimes\colon y\ irányú\ eltolás$

$\Delta\colon x\ irányú\ eltolás$

$\otimes\colon logikusan\colon$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta\colon fordítva\colon$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Sin függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: $[-1; 1]$
- Zérushely: $f(x) = 0$, végtelen sok zérushely van, periódus: $k \cdot \pi$
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 1 tengelymetszet van
- Monotonitás: 3 részből áll
- Szélsőérték: Végtelen minimum és végtelten maximum van, periódus: $k \cdot 2\pi$
- Paritás: Sin → Páratlan
- Függőleges eltolás megadja az értékkészletet
- Vízszintes eltolás nem ad meg semmit

Sin függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz az új origó**
- **Innentől pedig ábrázoljuk az eredeti Sin függvényt**

Koszinusz (Cos) függvény

$f(x) = \cos x$

D_f: $x \in \mathbb{R}$

R_f: $[-1; 1]$

Zérushely: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Tengelypont: y = 1

Monotonitás:

$]0 + k \cdot 2\pi; \pi + k \cdot 2\pi[\rightarrow Sz.m.cs.$

$]\pi + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi[\rightarrow Sz.m.n.$

Szélsőérték: Minimum, Maximum

$Minimum\ hely: x = \pi + k \cdot 2\pi$

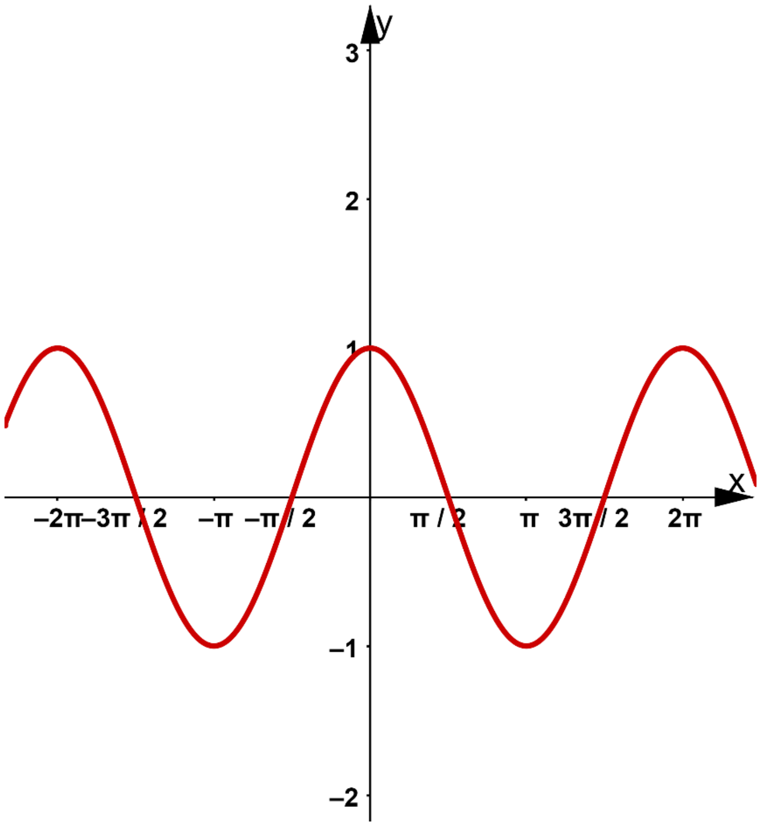
$Minimum\ érték: y = -1$

$Maximum\ hely: x = 0 + k \cdot 2\pi$

$Maximum\ hely: y = 1$

Paritás: Páros

Periodicitás: Periodikus, periódusa: 2π



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1

Eltolások

$f(x) = cos(x + \Delta) + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Cos függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: $[-1; 1]$
- Zérushely: $f(x) = 0$, végtelen sok zérushely van, periódus: $k \cdot \pi$
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 1 tengelymetszet van
- Monotonitás: 2 részből áll
- Szélsőérték: Végtelen minimum és végtelten maximum van, periódus: $k \cdot 2\pi$
- Paritás: Cos → Páros
- Függőleges eltolás megadja az értékkészletet
- Vízszintes eltolás nem ad meg semmit

Cos függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz az új origó**
- **Innentől pedig ábrázoljuk az eredeti Cos függvényt**

Tangens (Tg) függvény

$f(x) = \operatorname{tg} x$

D_f: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}$

R_f: $y \in \mathbb{R}$

Zérushely: $x = 0 + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Tengelypont: y = 0

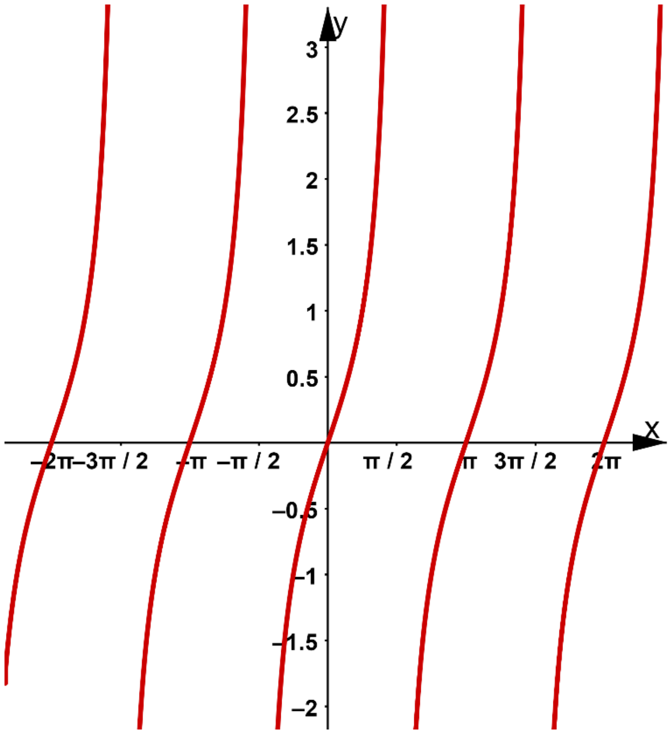
Monotonitás:

$\left]-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right[\rightarrow Sz.m.n.$

Szélsőérték: Nincs

Paritás: Páratlan

Periodicitás: Periodikus, periódusa: π



x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	$-$	-1	0	1	$-$

Eltolások

$f(x) = tg(x + \Delta) + \otimes$

$\otimes$: y *irányú eltolás*

Δ: x *irányú eltolás*

$\otimes$: *logikusan*:

ha $\oplus$ *akkor* $\uparrow$

ha $\ominus$ *akkor* $\downarrow$

Δ: *fordítva*:

ha $\oplus$ *akkor* $\leftarrow$

ha $\ominus$ *akkor* $\rightarrow$

$x + \Delta = 0$ *egyenlet megoldása* $x - re$

Tg függvény tudnivalók

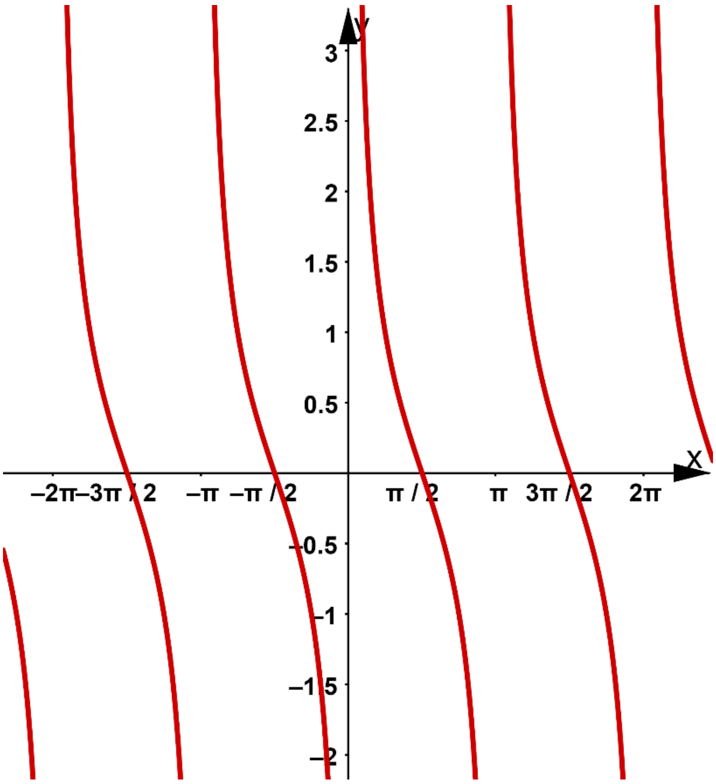
- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}$
- Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$
- Zérushely: $f(x) = 0$, végtelen sok zérushely van, periódus: $k \cdot \pi$
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 1 tengelymetszet van
- Monotonitás: Tg → Sz.m.n.
- Szélsőérték: Nincs
- Paritás: Páratlan
- Függőleges eltolás nem ad meg semmit
- Vízszintes eltolás megadja a szakadási helyeket

Tg függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz az új origó**
- **Innentől pedig ábrázoljuk az eredeti Tg függvényt**

Kotangens (Ctg) függvény

$f(x) = \text{ctg}\, x$
D_f: $x \in \mathbb{R}\backslash\{0 + k \cdot \pi\}$
R_f: $y \in \mathbb{R}$
Zérushely: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$
Tengelypont: $Nincs$
Monotonitás:
$]0 + k \cdot \pi; \pi + k \cdot \pi[\rightarrow Sz.m.cs.$
Szélsőérték: Nincs
Paritás: Páratlan
Periodicitás: Periodikus, periódusa: π



x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	-1	$-$	1	0

Eltolások

$f(x) = tg(x + \Delta) + \otimes$

$\otimes$: $y\ irányú\ eltolás$

Δ: $x\ irányú\ eltolás$

$\otimes$: $logikusan$:

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

Δ: $fordítva$:

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Ctg függvény tudnivalók

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}\backslash\{0 + k \cdot \pi\}$
- Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$
- Zérushely: $f(x) = 0$, végtelen sok zérushely van, periódus: $k \cdot \pi$
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 1 tengelymetszet van (Ctg-nek nincs)
- Monotonitás: Ctg → Sz.m.cs.
- Szélsőérték: Nincs
- Paritás: Páratlan
- Függőleges eltolás nem ad meg semmit
- Vízszintes eltolás megadja a szakadási helyeket

Ctg függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz az új origó**
- **Innentől pedig ábrázoljuk az eredeti Ctg függvényt**