

# Oszthatóság

## Osztó

Egy szám akkor lesz osztója egy másik számnak, ha elosztva vele egész számot kapunk (ha osztható vele)

Pl.: 6 osztói: A 6 osztói azok a számok, amikkel el tudjuk osztani a 6-ot maradék nélkül

6 osztói:

**1**      $6: 1 = 6$

**2**      $6: 2 = 3$

**3**      $6: 3 = 2$

**6**      $6: 6 = 1$

Egy számnak az 1 és a szám önmaga mindig az osztója lesz

Minden számnak legalább 2 osztója van (kivéve az 1-et)

A 0-nak minden szám az osztója

A 0 nem lesz egyik szám osztója sem (**0-val nem osztunk!**)

Az osztók mindig párban lesznek, ezeket a párokat osztópároknak nevezzük

Az osztók mindig **kisebbek**, mint a szám (kivéve az önmaga esetet)

Ha egy szám osztóit keressük, akkor mindig érdemes párban keresni ezeket

## Prímszámok

Azokat a számokat nevezzük prímszámoknak, amiknek **pontosan 2 osztójuk van** (1 és önmaguk)

Az egyetlen páros prímszám a 2, az összes többi páros szám osztható 2-vel

A 2-nél nagyobb prímszámok mind páratlanok

Prímszámok keresése: Páratlan számok közül megnézzük, hogy az adott szám osztható-e egy másik páratlan számmal, ha igen, akkor nem prímszám, ha nem tudunk ilyen számot találni, akkor prímszám

## Összetett számok

Azokat a számokat nevezzük összetett számoknak, amiknek **2-nél több osztójuk van** (amik nem prímek (kivéve az 1))

A 2 kivételével minden páros szám összetett szám

## Egyik sem

Egyetlen szám van, ami se nem prímszám, se nem összetett szám, ez pedig **az 1**

A prímszámoknak pontosan 2 osztójuk van, az 1-nek viszont csak 1 osztója van (az 1 és önmaga esetek megegyeznek egymással)

## Többszörös

Egy szám akkor lesz többszöröse egy másik számnak, ha annak egész számszorosa

Többszörös másik megfogalmazása: Egy szám többszörösei a szám szorzótábláján lévő számok

Egy számnak végtelen sok többszöröse van

Pl.:

2 többszörösei:

$$0 \quad 2 \cdot 0 = 0$$

$$2 \quad 2 \cdot 1 = 2$$

$$4 \quad 2 \cdot 2 = 4$$

$$6 \quad 2 \cdot 3 = 6$$

$$8 \quad 2 \cdot 4 = 8$$

...

Amennyivel szorozzuk a számot, annyiszorosa lesz

Egy számnak a legkisebb, 0-tól különböző többszöröse (1-szerese) önmaga lesz

A 0 minden szám többszöröse (0-szorosa)

Az 1-nek minden szám a többszöröse

A 0-nak a 0 az egyetlen többszöröse

A többszörösök mindig **nagyobbak**, mint a szám (kivéve a 0 és az önmaga esetet)

## Osztó és többszörös összehasonlítása

	Osztó	Többszörös
Mennyiség	Fix mennyiségű van (Legalább 2, kivéve az 1-et)	Végtelen sok van
Nagyság	<b>Kisebbek</b> , mint a szám (kivéve önmagát)	<b>Nagyobbak</b> , mint a szám (kivéve 0-t és önmagát)
A szám	Osztója önmagának	Többszöröse önmagának
1	Minden számnak az osztója	Csak önmagának a többszöröse
0	Minden szám az osztója Egyik számnak sem az osztója ( <b>0-val nem osztunk!</b> )	Minden szám többszöröse (0-szorosa) A 0-nak egyedül a 0 a többszöröse

## Oszthatósági szabályok

**2-vel való oszthatóság:** Egy szám osztható 2-vel, ha páros, vagyis, ha utolsó számjegye **0, 2, 4, 6, vagy 8**

**3-mal való oszthatóság:** Egy szám akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal

**4-gyel való oszthatóság:** Egy szám akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó 2 számjegyből képzett szám osztható 4-gyel

**5-tel való oszthatóság:** Egy szám akkor osztható 5-tel, ha **0-ra** vagy **5-re** végződik

**6-tal való oszthatóság:** Egy szám akkor osztható 6-tal, ha páros (utolsó számjegye 0, 2, 4, 6, vagy 8) **és** osztható 3-mal (számjegyeinek összege osztható 3-mal)

**8-cal való oszthatóság:** Egy szám akkor osztható 8-cal, ha utolsó 3 számjegyből képzett szám osztható 8-cal

**9-cel való oszthatóság:** Egy szám akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel

**10-zel való oszthatóság:** Egy szám akkor osztható 10-zel, ha **0-ra** végződik

# Törtek

Törtek segítségével megadhatjuk, egy szám, síkidom, test, valahányadrészét

Törtek elképzeléséhez legkönnyebb a pizzára vagy tortára gondolni (attól függően ki mennyire édesszájú)

Törteket meg lehet adni szóvegesen, és meg lehet adni őket számokkal is

Ahány egyenlő részre osztjuk annyiad rész lesz

Ha a tortát (pizzát) 4 egyenlő részre osztjuk, akkor 1 szelet a torta (pizza) negyed része lesz

Ha 4 egyenlő szeletre vágott tortából (pizzából) 3 szeletet kapunk meg, akkor a torta (pizza) **3 negyed** részét kaptuk meg

$$\begin{array}{l} \color{red}{3} \leftarrow \text{Számoló} \\ \color{green}{-} \leftarrow \text{Törtvonal} \\ \color{blue}{4} \leftarrow \text{Nevező} \end{array}$$

## Törtek bővítése

Miért bővítjük a törteket?

- Össze tudunk hasonlítani két törtet bővítés segítségével
- Törtek összeadását, kivonását tudjuk elvégezni bővítés segítségével
- Tizedes tört alakra tudjuk átírni a törteket bővítés segítségével

Hogyan fogunk bővíteni?

- A számlálót és a nevezőt is ugyanazzal az egész számmal fogjuk megszorozni
- Fontos, hogy a számláló és a nevező is meg legyen szorozva a számmal, ne csak az egyik
- Fontos, hogy a számláló és a nevező is ugyanazzal az egész számmal legyen megszorozva

## Törtek egyszerűsítése

Miért egyszerűsítjük a törteket?

- Össze tudunk hasonlítani két törtet egyszerűsítés segítségével
- Törtek összeadását, kivonását tudjuk elvégezni egyszerűsítés segítségével
- Törtek szorzását, osztását tudjuk könnyebben elvégezni egyszerűsítés segítségével
- Tizedes tört alakra tudjuk átírni a törteket egyszerűsítés segítségével

- Kisebb számokkal kell dolgoznunk a számolások során (könnyebb elvégezni a számolásokat egyszerűsítés után)
- Szébb alakra tudjuk hozni a végeredményt

Hogyan fogunk egyszerűsíteni?

- A számlálót és a nevezőt is ugyanazzal az egész számmal fogjuk elosztani
- Fontos, hogy a számláló és a nevező is el legyen osztva a számmal, ne csak az egyik
- Fontos, hogy a számláló és a nevező is ugyanazzal az egész számmal legyen elosztva

Bővíteni mindig tudunk, egyszerűsíteni viszont nem mindig

Akkor tudunk egyszerűsíteni, ha a tört számlálója és nevezője is osztható ugyanazzal a számmal

Mindig igyekszünk a lehető legnagyobb számmal egyszerűsíteni

Egy törtet lehet többször is egyszerűsíteni

Egyszerűsítés "jelölése": Áthúzzuk a számlálót és a nevezőt is és az egyszerűsített számokat írjuk a tört fölé és alá

## Törtek és az osztás művelet

A törtek osztás műveletet jelentenek

Ennek a tizedes törteknél lesz jelentősége

A törtet át tudjuk írni egy osztás műveletre, de az osztás műveletet is át tudjuk írni egy törtté:

- Az osztandó lesz a számláló
- Az osztó lesz a nevező

Tört esetén, ha a számláló osztható a nevezővel (a nevező osztója a számlálónak), akkor egész számot kapunk eredményül

## Törtek típusai nagyság szerint

Az, hogy a tört 1-nél kisebb lesz, 1-gyel egyenlő lesz, vagy 1-nél nagyobb lesz, mindig attól függ, hogy a számláló és a nevező közül melyik a nagyobb

- 1-nél kisebb törtek: Számláló < Nevező
- 1-gyel egyenlő törtek: Számláló = Nevező
- 1-nél nagyobb törtek: Számláló > Nevező

## Törtek vegyes alakja

1-nél nagyobb törteket átírhatunk vegyes tört alakba/vegyes tört alakban adhatjuk meg

A vegyes tört alak egy **egész számból** és egy **tört számból** áll, amiket egymás mellé írunk le

1-nél nagyobb törtek átírhatók vegyes tört alakba, de a vegyes tört alak is visszaírható tört alakba (oda-vissza működik)

Az egész szám és a törtrész között összeadásjel van, amit nem írunk ki

Hogy írjuk át a vegyes tört alakban lévő törtet sima (közönséges) tört alakra?

- Átírjuk az egész részt ugyanolyan nevezőjű törtként, mint a törtrész, majd összeadjuk őket

Hogy írjuk át a sima (közönséges) tört alakban lévő törtet vegyes tört alakra?

- A tört egy osztás műveletnek felel meg
- Megnézzük, hogy a számlálóban hányszor van meg a nevező, ez lesz egész rész, a maradék lesz a törtrész számlálójában

## Törtek összeadása és kivonása

Törteket akkor tudunk összeadni egymással és kivonni őket egymásból, ha a két törtnek közös a nevezője (ugyanannyi szeletre vannak vágva a pizzák)

Ilyenkor csak össze kell adni a számlálókat (összeadásnál), valamint ki kell vonni egymásból őket (kivonásnál)

Mi van, ha nem ugyanaz a két tört nevezője?

- Ilyenkor közös nevezőre kell hoznunk a két törtet

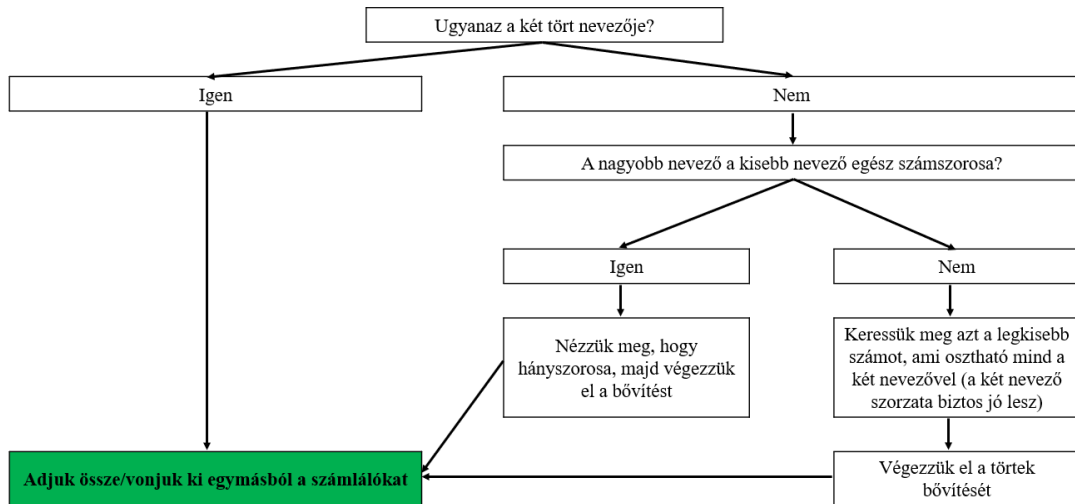
Hogy hozzuk közös nevezőre a törteket?

- Vagy egyik vagy mind a két törtet bővíteni fogjuk
- Ha az egyik nevező a másik nevező egész számszorosa, akkor a kisebb nevezőt fogjuk bővíteni a nagyobb nevezőre
- Ha a nevezők nem egymás egész számszorosai, akkor közös nevezőre hozzuk őket (mind a két törtet bővíteni fogjuk)
- Ilyenkor két dolgot tehetünk:
  - ❖ Az egyik, hogy összeszorozzuk a nevezőket, és az lesz az új közös nevező (ez mindig működni fog, viszont van, hogy nagy számokkal kell dolgoznunk)

- ❖ A másik, hogy keresünk egy olyan számot, ami osztható az egyik és osztható a másik nevezőével is (van, hogy ez a szám a két szám szorzata lesz (előző eset), de van, hogy lesz kisebb szám is, ez azért előnyösebb, mint az összeszorzás, mert így nem kell nagy számokkal számolnunk)

A végén, ha tudunk, egyszerűsítünk (nem kötelező)

## Törtek összeadásának és kivonásának lépései



## Törtek összeadása és kivonása Pillangó módszer segítségével

Pillangó módszert akkor alkalmazzuk, ha a két tört nevezője különböző

Először összeszorozzuk a nevezőket, ez lesz a végeredmény nevezője

Ezután keresztbe szorozzuk az egyik tört számlálóját a másik tört nevezőjével, majd a másik tört számlálóját az egyik tört nevezőjével

A kapott eredményt a törtek fölé írjuk

Végül elvégezzük a kapott szorzatok összeadását/kivonását attól függően, hogy a két tört között összeadás jel vagy kivonás jel szerepelt

**Ez a módszer csak kis számok (egyjegyű számok) esetén alkalmazható!!!**

$$\begin{array}{c}
 8 + 9 \\
 \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8 + 9}{3 \cdot 4}
 \end{array}$$

## Törtek és egész számok összeadása és kivonása

Törtet és egész számot úgy adunk össze, vagy úgy vonjuk ki egymásból őket, hogy az egész számot felírjuk olyan nevezőjű törtként, mint a tört nevezője

## Vegyes törtek összeadása és kivonása

Vegyes törtek összeadását kétféleképpen végezhetjük el:

- Összeadjuk az egészrészeket, és összeadjuk a törtrészeket, ha a törtrészek összegéből 1-nél nagyobb tört jön ki, akkor azt hozzáadjuk az egészrészhez
- Átírjuk mind a két vegyes törtet közös nevezőre, és úgy végezzük el az összeadást

Vegyes törtek kivonását is kétféleképpen végezhetjük el:

- Kivonjuk egymásból az egészrészeket és kivonjuk egymásból a törtrészeket, ez a módszer akkor előnyös, ha a törtrészek különbsége pozitív lesz (a kisebbítendő tört nagyobb, mint a kivonandó tört)
- Átírjuk mind a két vegyes törtet közös nevezőre, és úgy végezzük el a kivonást (ez mindig használható)

Vegyes tört és közös nevezőre tört összeadása/kivonása során vagy összeadjuk a törtrészeket, vagy a vegyes törtet írjuk át közös nevezőre, és úgy végezzük el a műveleteket

## Törtek szorzása egész számmal

Törteket úgy tudunk szorozni egész számmal, hogy a tört számlálóját megszorozzuk a számmal (ez a módszer mindig működni fog)

Ennél a módszernél ugyanúgy, mint összeadás vagy kivonás esetén, a végén, ha tudunk, akkor egyszerűsítünk

A szorzást úgy is elvégezhetjük, hogy az egész számot és a tört nevezőjét egyszerűsítjük egymással (ez csak akkor alkalmazható, ha az egész számnak és a tört nevezőjének van közös osztója)

Ennél a módszernél az eredményt a lehető legegyszerűbb alakban fogjuk megkapni, így a végén nem kell egyszerűsítünk (mert közben elvégeztük)

## Vegyes törtek szorzása egész számmal

Vegyes törteket úgy tudunk szorozni egész számmal, hogy szorozzuk az egész részt is az egész számmal, valamint a tört részt is, ha a tört részre, 1-nél nagyobb tört jön ki, akkor azt hozzáadjuk az egész részhez

Úgy is elvégezhetjük a szorzást, hogy a vegyes törtet átírjuk közös nevezőre, onnantól pedig ugyanúgy végezzük el a szorzást, mint tört és egész szám szorzása esetén

## Törtek osztása egész számmal

Törteket úgy tudunk osztani egész számmal, hogy a tört **nevezőjét** megszorozzuk a számmal (ez a módszer mindig működni fog)

Ennél a módszernél ugyanúgy, mint összeadás vagy kivonás esetén, a végén, ha tudunk, akkor egyszerűsítünk

Az osztást úgy is elvégezhetjük, hogy a tört számlálóját és az egész számot elosztjuk/egyszerűsítjük egymással (ez csak akkor alkalmazható, ha a tört számlálójának és az egész számnak van közös osztója)

Ennél a módszernél az eredményt a lehető legegyszerűbb alakban fogjuk megkapni, így a végén nem kell egyszerűsíteni (mert közben elvégeztük)

## Vegyes törtek osztása egész számmal

Vegyes törteket úgy tudunk osztani egész számmal, hogy a vegyes törtet átírjuk közös nevezőre, onnantól pedig ugyanúgy végezzük el az osztást, mint tört és egész szám osztása esetén

Amennyiben a vegyes tört egészrésze és az egész szám oszthatóak egymással, azokat elosztjuk egymással, majd a törtrészt is elosztjuk az egész számmal (ez az eset elég ritka)

## Törtek szorzásának és osztásának összehasonlítása

**Szorzás:**

A tört **számlálóját** és az egész számot **szorozzuk** egymással:

$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

A tört **nevezőjét** és az egész számot **egyszerűsítjük** egymással:

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{24}$$

$$\frac{7}{8} \cdot 8 = 7$$

**Osztás:**

A tört **nevezőjét** és az egész számot **szorozzuk** egymással:

$$\frac{5}{4} : 2 = \frac{5}{8}$$

$$\frac{7}{9} : 3 = \frac{7}{27}$$

A tört **számlálóját** és az egész számot **egyszerűsítjük** egymással:

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$$

$$\frac{5}{9} : \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

## Tört szorzása törttel

Törtet úgy tudunk szorozni törttel, hogy a számlálót a számlálóval, a nevezőt a nevezővel szorozzuk

Szorzás esetén **nem kell közös nevezőre hozni** a két törtet, mint összeadásnál vagy kivonásnál

Ennél a módszernél a végén, ha tudunk, akkor egyszerűsítünk

A szorzás elvégzése előtt is egyszerűsíthetünk:

- Egyszerűsíthetjük a törtet külön-külön is (ha tudjuk)
- A számlálót és a nevezőt keresztbe tudjuk egyszerűsíteni (az egyik tört számlálóját a másik tört nevezőjével)
- Ha tudunk a törtön belül, valamint keresztbe is egyszerűsíteni, akkor mindegy a sorrend

Érdemes mindig elvégezni az egyszerűsítést, mert így kisebb számokkal kell dolgoznunk, és a végén a lehető legegyszerűbb alakban kapjuk meg az eredményt

## Vegyes tört szorzása törttel vagy vegyes törttel

Vegyes törtet úgy tudunk szorozni törttel, hogy átírjuk közösleges tört alakra, majd elvégezzük a szorzást (számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel szorozzuk, és ha tudunk, akkor a törtéken belül vagy keresztbe egyszerűsítünk)

Vegyes törtet úgy tudunk szorozni vegyes törttel, hogy átírjuk mind a két vegyes törtet közösleges tört alakra, majd elvégezzük a szorzást (számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel szorozzuk, és ha tudunk, akkor a törtéken belül vagy keresztbe egyszerűsítünk)

## Törtek reciproka

Egy tört reciprokát úgy kapjuk meg, hogy megcseréljük egymással a tört számlálóját és nevezőjét

Mire lesz jó, mikor fogjuk használni?

- Akkor, amikor törttel osztunk

Mi a helyzet egész számokkal?

- Egész számok felírhatóak eggyedekként, úgy már tudjuk venni a reciprokukat  
1-nek a reciproka 1, ez az egyetlen pozitív szám, aminek a reciproka önmaga lesz

Negatív törtek, negatív számok esetén ugyanazt csináljuk, mint pozitív törtek és számok esetén, csak rakunk eléjük egy mínusz előjelet

### **A 0-nak nincs reciproka**

Tört és reciprokának szorzata mindig 1 (a számlálót és a nevezőt is teljesen le tudjuk egyszerűsíteni keresztbe)

Ha a tört **számlálójában** 1 van, akkor a tört reciproka egész szám lesz

## **Törtek osztása törtekkel**

Törtet úgy tudunk osztani törttel, hogy az osztó tört (osztásjel utáni tört) reciprokával szorzunk

Az első törttel (osztandó) nem csinálunk semmit, a második törtnek vesszük a reciprokát (megcseréljük a számlálót és a nevezőt), az osztás jelet pedig szorzásjelre cseréljük

Ha ezekkel a lépésekkel megvagyunk, akkor visszavezettük a példát két tört szorzására, innentől ugyanazt csináljuk, mint törtek szorzása esetén:

- A **számlálót** a **számlálóval**, a **nevezőt** a **nevezővel** szorozzuk
- Egyszerűsíthetjük a törteket külön-külön is (ha tudjuk)
- A **számlálót** és a **nevezőt** keresztbe is tudjuk egyszerűsíteni (az egyik tört számlálóját a másik tört nevezőjével)
- Egyszerűsítést érdemes a reciprokkal való szorzás átírása után elvégezni (ne kavardjunk bele később)

## **Egész számok, törtek, vegyes törtek osztása**

Tört osztása egész számmal: A tört nevezőjét szorozzuk az egész számmal, vagy ha tudjuk, akkor a számlálót és az egész számot egyszerűsítjük (Ha egyszerűbb, akkor az egész számot átírhatjuk eggyed tört alakra, onnantól pedig tört osztása törttel)

Egész szám osztása törttel: A tört reciprokával szorozzuk az egész számot (Ha egyszerűbb, akkor az egész számot átírhatjuk eggyed tört alakra, onnantól pedig tört osztása törttel)

Vegyes tört osztása törttel/Tört osztása vegyes törttel: A vegyes törtet átírjuk közös nevezőre, innentől a tört osztása törttel lépéseit követjük

Vegyes tört osztása vegyes törttel: Átírjuk mind a két vegyes törtet közös nevezőre, innentől a tört osztása törttel lépéseit követjük

## Emeletes törtek

Emeletes törteknek nevezzük azokat a törteket, ahol egy törtet osztunk el egy másik törttel

Az emeletes tört alakot átírhatjuk két tört osztására, inentől pedig a tört osztása törttel szabályait alkalmazzuk

## Tizedes törtek



Tizedesvessző helyett szokás pontot (**tizedespont**) is használni (leggyakrabban informatikában, programozásban) **36.12**

## Tizedes törtek helyi értéke

Eggyedek nem lesznek

A tizedesvessző utáni 1. számjegy lesz a tized

A tizedesvessző utáni 2. számjegy lesz a század

A tizedesvessző utáni 3. számjegy lesz az ezred

Ezt lehet folytatni tovább is (4. számjegy tízezred, 5. számjegy százezred ...)

Helyi érték								Szám
ezres (E)	század (sz)	tized (t)	egyes (e)	,	tized (t)	század (sz)	ezred (E)	
1	1	4	5	,	8	6	7	1145,867

Egész számok esetén a tizedesvessző után 0 szerepel (ezt nem szoktuk kiírni)

Pl.:  $2 = 2,0$

A tizedesvessző utáni számjegy mögé bármennyi 0-t írhatunk, nem fog változni a szám értéke

Pl.:  $2,2 = 2,20 = 2,200$

Ha a tizedesvessző és a törtrész között van 0, vagy vannak 0-k, azt nem hagyhatjuk el sosem

Pl.:  $3,08 \neq 3,8$      $4,002 \neq 4,02 \neq 4,2$

Tizedes törtek kimondása: Kimondjuk a tizedesvessző előtti számot (**egészrész**), utána azt mondjuk, hogy egész, ezután kimondjuk a tizedesvessző utáni számot, és utána a **törtrész** elnevezést (tized, század, ezred)

Ha a tizedesvessző után 1 számjegy van, akkor tizedet mondunk, ha 2 számjegy, akkor századot, ha 3 számjegy, akkor ezredet

Tizedes törteket felsorolás esetén pontos vesszővel ( ; ) választjuk el:  
**1, 2; 3, 5; 6, 85; 9, 791**

## Törtek, vegyes törtek és tizedes törtek

A törteket át tudjuk írni tizedes tört alakra, és a tizedes törteket is át tudjuk írni tört alakra (oda-vissza működik)

1-nél kisebb törtek vagy tizedes törtek esetén nagyon egyszerű dolgunk lesz, csak ki kell mondani a törtet vagy a tizedes törtet és már kész is vagyunk

1-nél nagyobb tizedes tört átírásakor az egészrészt és a törtrészt is átírjuk tört alakra, és a kettőt összeadjuk

1-nél nagyobb törtek esetén megnézzük, mennyi lesz az egészrész és mennyi törtrész marad, majd elvégezzük az átírást

Vegyes törtek esetén nagyon egyszerű dolgunk lesz, csak felírjuk az egészrészt, és a tizedesvessző után a törtrészt

## Tizedes törtek összehasonlítása

Tizedes törtek összehasonlítása esetén (Melyik a nagyobb?) először mindig az egészrészeket hasonlítjuk össze

Amelyiknek nagyobb az egészrésze, az lesz a nagyobb

Ha az egészrészek megegyeznek, akkor összehasonlítjuk a törtrészeket (tizedesvessző utáni részt)

Először a tizedeket nézzük meg, és amelyik szám tized helyi értékén nagyobb számjegy szerepel, az a szám lesz a nagyobb

Ha megegyezik a tized helyi értéken álló két számjegy, akkor a századokat nézzük meg, és amelyik szám század helyi értékén nagyobb számjegy szerepel, az a szám lesz a nagyobb

Ha a század helyi értéken álló két számjegy is megegyezik, akkor az ezredeket nézzük meg, és amelyik szám ezred helyi értékén nagyobb számjegy szerepel, az a szám lesz a nagyobb

Ha az egyik számban kevesebb számjegy van a tizedesvessző után, mint a másikban, akkor 0-kat képzelünk oda

## Tizedes törtek kerekítése

### Egészre kerekítés

Egészre kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb egész szomszédját, és eldöntjük, a kettő közül melyikhez van közelebb

A két egész szomszéd között félúton lévő szám mindig az 5, 50, 500 lesz (Félúton: Ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)

Ha a tized helyén 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor **lefelé** (↓) kerekítünk

Ha a tized helyén 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek szerepelnek, akkor **felfelé** (↑) kerekítünk

Ha egész számot kell egészre kerekíteni, akkor a szám és a kerekített értéke megegyezik

### Tizedre kerekítés (1 tizedesjegyre)

Tizedre kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb tized szomszédját, és eldöntjük, a kettő közül melyikhez van közelebb

A két tized szomszéd között félúton lévő szám mindig a ,05 ,050 lesz (Félúton: Ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)

Ha a század helyén 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor **lefelé** (↓) kerekítünk

Ha a század helyén 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek szerepelnek, akkor **felfelé** (↑) kerekítünk

Ha egész számot vagy 1 tizedesjegyű számot kell tizedre kerekíteni, akkor a szám és a kerekített értéke megegyezik

### Századra kerekítés (2 tizedesjegyre)

Századra kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb század szomszédját, és eldöntjük, a kettő közül melyikhez van közelebb

A két század szomszéd között félúton lévő szám mindig az ,005 lesz (Félúton: Ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)

Ha az ezred helyén 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor **lefelé** (↓) kerekítünk

Ha az ezred helyén 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek szerepelnek, akkor **felfelé** (↑) kerekítünk

Ha egész számot, vagy 1 tizedesjegyű, vagy 2 tizedesjegyű számot kell századra kerekíteni, akkor a szám és a kerekített értéke megegyezik

## Ezredre kerekítés (3 tizedesjegyre)

Ezredre kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb ezred szomszédját, és eldöntjük, a kettő közül melyikhez van közelebb

A két ezred szomszéd között félúton lévő szám mindig az ,0005 lesz (Félúton: Ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)

Ha a tízezred helyén 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor **lefelé** (↓) kerekítünk

Ha a tízezred helyén 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek szerepelnek, akkor **felfelé** (↑) kerekítünk

Ha egész számot, vagy 1 tizedesjegyű, vagy 2 tizedesjegyű, vagy 3 tizedesjegyű számot kell ezredre kerekíteni, akkor a szám és a kerekített értéke megegyezik

## Tizedes törtek összeadása és kivonása

Tizedes törtek összeadása és kivonása esetén az egészrészeket az egészrészekkel adjuk össze, vagy vonjuk ki őket egymásból, valamint a törtrészeket a törtrészekkel adjuk össze, vagy vonjuk ki őket egymásból

Ha szép számokról van szó, akkor ezt fejben is el lehet végezni, ha csúnyább (nehezebb, nagyobb) számokról van szó, akkor írásban fogjuk elvégezni a műveleteket úgy, hogy először mindig a törtrészek műveletét végezzük el, utána pedig az egészrészek műveletét

$$\text{Pl.: } 3,2 + 4,6 = \mathbf{7,8} \qquad 13,12 + 11,23 = \mathbf{24,35}$$

Ha a tizedesek összeadásakor az összeg pontosan 10 tized, 100 század, vagy 1000 ezred, akkor egész számot fogunk kapni, az egészrészhez még 1-et fogunk hozzáadni (ilyenkor nem kell tizedesvesszőt írni, elég csak leírni az egész számot)

$$\text{Pl.: } 2,3 + 5,7 = \mathbf{8} \qquad 16,88 + 13,12 = \mathbf{30}$$

Kivonásnál, ha megegyeznek a tizedesek, akkor egész számot fogunk kapni (ilyenkor nem kell tizedesvesszőt írni, elég csak leírni az egész számot)

$$\text{Pl.: } 8,4 - 3,4 = \mathbf{5} \qquad 18,36 - 12,36 = \mathbf{6}$$

Ha a tizedesek összeadásakor az összeg nagyobb, mint 10 tized, 100 század, vagy 1000 ezred, akkor egy egészet fogunk még hozzáadni az egészrészhez

$$\text{Pl.: } 3,5 + 4,7 = \mathbf{8,2} \qquad 14,67 + 12,52 = \mathbf{27,19}$$

Ha nem ugyanannyi tizedesjegy szerepel a két szám esetén, akkor 0-t vagy 0-kat fogunk képzeletben odarakni a kevesebb tizedesjegyű szám utolsó tizedesjegye mögé

$$\text{Pl.: } 5,5\mathbf{0} + 3,12 = \mathbf{8,62} \qquad 12,\mathbf{300} + 14,168 = \mathbf{26,468}$$

Ha az összeadás vagy kivonás művelet elvégzése után a tizedek 0-ra végződnek, akkor a 0-t nem muszáj kiírunk

$$\text{Pl.: } 5,12 + 4,28 = \mathbf{9,4}$$

$$11,127 + 13,273 = \mathbf{24,4}$$

Kivonás esetén, ha a kisebbítendő törtrésze kisebb, mint a kivonandó törtrésze, akkor az egészrészből fogunk "kölsönkérni", (maradék) és úgy végezzük el a kivonást

$$\text{Pl.: } 5,1 - 3,4 = \mathbf{1,7}$$

$$15,26 - 12,42 = \mathbf{2,84}$$

Ha egész számot és tizedes törtet adunk össze, akkor összeadjuk az egészrészeket, és mögé írjuk a törtrészt

$$\text{Pl.: } 4 + 5,9 = \mathbf{9,9}$$

$$17,36 + 12 = \mathbf{29,36}$$

Ha tizedes törtből vonunk ki egész számot, akkor csak kivonjuk egymásból az egészrészeket és mögé írjuk a törtrészt

$$\text{Pl.: } 8,3 - 2 = \mathbf{6,3}$$

$$16,46 - 14 = \mathbf{2,46}$$

Ha egész számból vonunk ki tizedes törtet, akkor az egészrészből "kölsön kell kérnünk", és úgy tudjuk elvégezni a kivonást, vagy elvégezzük az egészrészek kivonását, és a kapott eredményből még kivonjuk a törtrészt

$$\text{Pl.: } 7 - 5,2 = \mathbf{1,8}$$

$$15 - 11,46 = \mathbf{3,54}$$

## Tizedes törtek szorzása 10-zel, 100-zal, 1000-rel

Ha a tizedes törteket 10-zel, 100-zal, 1000-rel szorozzuk meg, akkor annyiszor fogjuk **jobbra** (→) vinni a tizedesvesszőt, amennyi 0 az 1-es mögött szerepel (**10-nél 1-gyel**, **100-nál, 2-vel**, **1000-nél 3-mal**, és így tovább...)

Ha nem tudjuk már tovább **jobbra** (→) vinni a tizedesvesszőt (az utolsó szám mögé került), de még kellene, akkor a szám mögé 0-kat fogunk írni (még annyi 0-t, amennyiszer **jobbra** (→) kellene vinni a tizedesvesszőt)

Ilyen feladatok elején érdemes mindig megbecsülni az eredményt úgy, hogy a tizedes tört törtrésztét elhagyjuk, és úgy szorozzuk meg az egészrészt 10-zel, 100-zal, 1000-rel, így biztosan nem lesz benne hiba

## Tizedes törtek szorzása egész számmal, és tizedes törttel

Ha tizedes törtet egész számmal szorzunk meg, akkor szép számok esetén csinálhatjuk ugyanazt, mint összeadás vagy kivonás esetén (megszorozzuk az egészrészt, valamint a törtrészt is a számmal), de ezt ritkán fogjuk használni, leggyakrabban írásban fogjuk elvégezni a szorzást

$$\text{Pl.: } 124,3 \cdot 2 = \mathbf{248,6}$$

Tizedes törtet írásban ugyanúgy fogunk megszorozni egész számmal, mint ahogy két egész számot szorzunk össze egymással

A tizedesvesszőt mindig a szorzás végén írjuk oda a megfelelő helyre

A szabály az, hogy a végeredménynek ugyanannyi számjegye lesz a tizedesvessző után, mint amennyi a tizedes törtnek volt (Ha 1 tizedesjegy volt a tizedes törtnek, akkor az eredménynek is 1 tizedesjegy lesz, ha 2 volt, akkor az eredménynek is 2 lesz, ha 3 volt, akkor az eredménynek is 3 lesz)

Ami fontos ilyenkor, hogy a 0 is bele fog számítani (Ha a legutolsó egy vagy több számjegy 0 lesz)

A szorzás elvégzése előtt, vagy a tizedesvessző beírása előtt érdemes egy becslést elvégezni kerekítés segítségével, hogy biztosak legyünk abban, hogy hova kerül a tizedesvessző

A szorzás felcserélhető művelet, mindegy, hogy melyik tag szerepel az írásbeli szorzás jobb és bal oldalán

Ha tizedes törtet tizedes törttel szorzunk, akkor mindent ugyanúgy végzünk el, mintha ott sem lenne a tizedesvessző, csak a végén az eredménynél ugyanannyi számnak kell lennie a tizedesvessző mögött, mint eredetileg a két tizedes törtnek összesen (Pl.:  $26,36 \cdot 1,2$  esetén a 26, **36**-nál **2 szám** szerepel a tizedesvessző mögött, az 1, **2** esetén **1 szám** szerepel a tizedesvessző mögött, tehát **összesen 3**, a szorzás elvégzése után a végeredménynél úgy tesszük ki a tizedesvesszőt, hogy **3 szám** legyen mögötte)

Két tizedes tört szorzása esetén is érdemes elvégezni egy becslést, hogy tudjuk, hogy nagyságrendileg mekkora számnak kell kijönnie

## **Egész számok, tizedes törtek osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel**

Egész számokat úgy osztunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel, hogy a szám végéről annyi 0-t hagyunk el, amennyi 0 van az osztóban az 1-es után (10-nél **1**, 100-nál, **2**, 1000-nél **3** 0-t fogunk elhagyni a szám végéről)

Ha az egész szám nem 0-ra végződik, vagy nincs elegendő 0 a végén, akkor az utolsó szám mögé képzeletben odateszünk egy tizedesvesszőt, és annyszor fogjuk **balra** ( $\leftarrow$ ) vinni, amennyi 0 szerepel az osztóban az 1-es mögött (10-nél **1-gyel**, 100-nál, **2-vel**, 1000-nél **3-mal** fogjuk **balra** ( $\leftarrow$ ) vinni a tizedesvesszőt)

Ha tizedes törteket 10-zel, 100-zal, 1000-rel osztunk el, akkor pedig annyiszor fogjuk **balra** ( $\leftarrow$ ) vinni a tizedesvesszőt, amennyi 0 szerepel az osztóban az 1-es mögött (10-nél **1-gyel**, 100-nál, **2-vel**, 1000-nél **3-mal** fogjuk **balra** ( $\leftarrow$ ) vinni a tizedesvesszőt)

Ha már nem tudjuk többször balra vinni (az első számjegy elé került), akkor az első számjegy elé beírjuk, hogy 0,..., ha pedig még tovább kell vinnünk, akkor a tizedesvessző utáni első számjegy és a tizedesvessző közé még annyi 0-t írunk, amennyiszer még **balra** ( $\leftarrow$ ) kellene vinni a tizedesvesszőt (ha még 2-vel kellene **balra** ( $\leftarrow$ ) vinni, akkor 0,00...)

## Egész számok osztása egész számokkal (Maradékos osztás)

Korábban a maradékos osztás végén, ha volt maradék, nem csináltunk vele semmit, csak leírtuk, hogy: Maradék: ...

Így, hogy tanultunk a tizedes törtekről, tovább fogjuk vinni ezeket az osztásokat

Első lépésként az eredmény utolsó számjegye mögé teszünk egy tizedesvesszőt

Utána a maradék mellé egy 0-t fogunk írni, és az így kapott számot fogjuk elosztani az osztóval

Ha elvégeztük az osztást, és 0 a maradék, akkor kész vagyunk

Ha nem 0 a maradék, akkor az új maradék mögé megint írunk egy 0-t, és elvégezzük az osztást

Ezt egészen addig fogjuk csinálni, amíg a végén 0 maradékot nem kapunk, vagy nem veszünk észre valami ismétlődést

Az ismétlődést mindig pöttyel fogjuk jelölni a szám felett

Pöttyök típusai:

- 1 pötty:  $23,\dot{7} = 23,7777777777\dots$
- 2 pötty egymás mellett:  $19,\dot{2}\dot{5} = 19,2525252525\dots$
- 2 pötty nem egymás mellett:  $22,\dot{4}31\dot{9} = 22,431943194319\dots$

## Tizedes törtek osztása egész számokkal

Az elején ugyanúgy fogjuk végezni az osztást, mint amikor egész számot egész számmal osztunk, de ha eljutunk a tizedesvesszőig, akkor az eredménynél kitesszük a tizedesvesszőt, majd folytatjuk az osztást, és ha van maradék, akkor 0-t írunk mögé, és egészen addig folytatjuk az osztást, amíg 0 maradék nem lesz a végén, vagy nincs ismétlődés

## Osztás tizedes törtekkel

Ha egy számot (akár egész számot, akár tizedes törtet) tizedes törttel kell osztanunk, akkor a tizedes törtet meg kell szoroznunk annyival, hogy egész számot kapjunk (bármilyen számmal lehet szorozni, de 10-zel, 100-zal, 1000-rel szoktunk), ilyenkor, hogy a hányados ne változzon, az osztandót is ugyanezzel a számmal kell megszoroznunk (egész számokkal példa:  $20 : 4 = 5$  és  $200 : 40 = 5$ )

Ha mind a két szám (osztandó és osztó is) tizedes tört, akkor elegendő, ha csak az osztó lesz egész szám, az osztandó maradhat tizedes tört (tizedes törtet tudunk írásban osztani egész számmal)

## Egész számok szorzása, osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel

	Szorzás (→)	Osztás (←)
10-zel	1 db 0-t írunk a szám végére $35 \cdot 10 = 350$	Ha a szám 0-ra végződik, akkor 1 db 0-t elhagyunk $810 : 10 = 81$
		Ha a szám nem 0-ra végződik, akkor 1-gyel <b>balra</b> (←) visszük a tizedesvesszőt $38 : 10 = 3,8$
100-zal	2 db 0-t írunk a szám végére $47 \cdot 100 = 4700$	Ha a szám 00-ra végződik, akkor 2 db 0-t elhagyunk $3800 : 100 = 38$
		Ha a szám nem 00-ra végződik, akkor 2-vel <b>balra</b> (←) visszük a tizedesvesszőt $902 : 100 = 9,02$
1000-rel	3 db 0-t írunk a szám végére $61 \cdot 1000 = 61\ 000$	Ha a szám 000-ra végződik, akkor 3 db 0-t elhagyunk $9000 : 1000 = 9$
		Ha a szám nem 000-ra végződik, akkor 3-mal <b>balra</b> (←) visszük a tizedesvesszőt $530 : 1000 = 0,53$

## Tizedes törtek szorzása, osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel

	Szorzás (→)	Osztás (←)
10-zel	Ha 1 számjegy van a tizedesvessző után, akkor 1 <b>jobbra</b> (→) vitelnél egész számot kapunk eredményként $31,2 \cdot 10 = 312$	1-gyel <b>balra</b> (←) visszük a tizedesvesszőt $26,3 : 10 = 2,63$
	Ha 1-nél több számjegy van a tizedesvessző után, akkor 1-szer <b>jobbra</b> (→) visszük a tizedesvesszőt $16,75 \cdot 10 = 167,5$	Ha nem tudjuk <b>balra</b> (←) vinni a tizedesvesszőt (már az első számjegy előtt van), akkor 0,-et írunk a szám elé $2,7 : 10 = 0,27$
100-zal	Ha 1 számjegy van a tizedesvessző után, akkor 1 <b>jobbra</b> (→) vitel után 1 db 0-t írunk a szám mögé $25,7 \cdot 100 = 2570$	2-vel <b>balra</b> (←) visszük a tizedesvesszőt $153,9 : 100 = 1,539$
	Ha 2 vagy több számjegy van a tizedesvessző után, akkor 2-szer <b>jobbra</b> (→) visszük a tizedesvesszőt $17,937 \cdot 100 = 1793,7$	Ha nem tudjuk <b>balra</b> (←) vinni a tizedesvesszőt (már az első számjegy előtt van), akkor 0,-et írunk a szám elé $3,8 : 100 = 0,038$
1000-rel	Ha 1 vagy 2 számjegy van a tizedesvessző után, 1 vagy 2 <b>jobbra</b> (→) vitel után 1 vagy 2 db 0-t írunk a szám mögé $29,32 \cdot 1000 = 29\ 320$	3-mal <b>balra</b> (←) visszük a tizedesvesszőt $1693,7 : 1000 = 1,6937$
	Ha 3 vagy több számjegy van a tizedesvessző után, akkor 3-szor <b>jobbra</b> (→) visszük a tizedesvesszőt $13,5189 \cdot 1000 = 13\ 518,9$	Ha nem tudjuk <b>balra</b> (←) vinni a tizedesvesszőt (már az első számjegy előtt van), akkor 0,-et írunk a szám elé $29,5 : 1000 = 0,0295$

## Szorzás, osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel összefoglaló

### Szorzás (→):

➤ **Egész számok:**

Annyi 0-t fogunk írni a szám végére, amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (10-nél **1-et**, 100-nál, **2-t**, 1000-nél **3-at**)

➤ **Tizedes törtek:**

Annyiszor visszük a tizedesvesszőt **jobbra** (→), amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (10-nél **1-gyel**, 100-nál, **2-vel**, 1000-nél **3-mal**)

Ha már nem tudjuk **jobbra** (→) vinni, mert az utolsó számjegy mögött van, akkor 0-t vagy 0-kat fogunk a szám mögé írni (Ha 3-mal kellene **jobbra** (→) vinni a tizedesvesszőt, de az első **jobbra** (→) vitel után az utolsó számjegy mögé kerül, akkor még 2 db 0-t írunk a szám mögé, így kijön az  $1 + 2 = 3$  **jobbra** (→) vitel)

### Osztás (←):

➤ **Egész számok:**

Ha a szám végén megfelelő mennyiségű 0 van, akkor annyi 0-t fogunk elhagyni szám végéről, amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (10-nél **1-et**, 100-nál, **2-t**, 1000-nél **3-at**)

Ha a szám végén nincs megfelelő mennyiségű 0, akkor az utolsó számjegy mögé rakunk egy képzeletbeli tizedesvesszőt, és annyszor visszük **balra** (←), amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (10-nél **1-gyel**, 100-nál, **2-vel**, 1000-nél **3-mal**)

➤ **Tizedes törtek:**

Annyiszor visszük a tizedesvesszőt **balra** (←), amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (10-nél **1-gyel**, 100-nál, **2-vel**, 1000-nél **3-mal**)

Ha pont az első számjegy elé kerül a tizedesvessző a rakosgatás után, akkor elé írjuk, hogy 0, ...

Ha az első számjegy elé került a tizedesvessző, de még tovább kellene vinni, akkor a 0, ... és a szám közé még annyi 0-t írunk, amennyivel még **balra** (←) kellene vinni azt

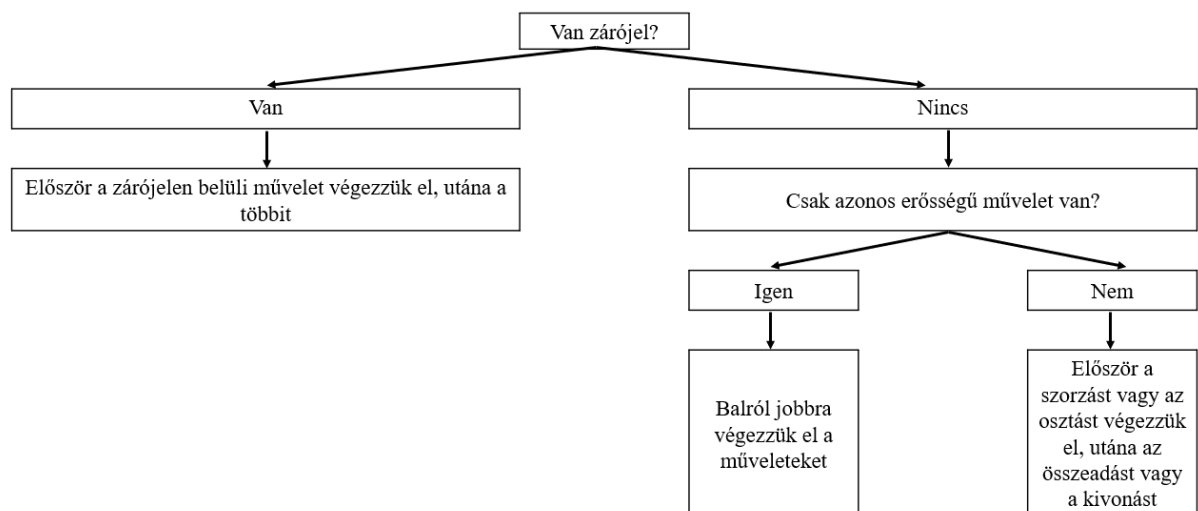
# Műveletek sorrendje

- 1) Zárójelben lévő műveletek
- 2) Szorzás, osztás
- 3) Összeadás, kivonás

- Mindig balról jobbra haladva végezzük el a műveleteket!
- Figyelembe véve azt is, hogy melyiknek van „elsőbbsége”.
- A zárójel, ha van, mindig elsőbbséget élvez.
- Ezen túl meg a szorzás és osztás élvez elsőbbséget
- És legvégül az összeadásokat és kivonásokat végezzük el.



## Műveletek sorrendje folyamatábra



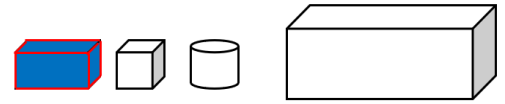
# Test, felület, vonal, pont

## Test:

Van hosszúsága, mélysége, magassága (vastagsága)

Felület határolja / Felületek határolják

Pl.: Téglatest, Kocka, Henger, Gömb



## Felület:

Csak szélessége és magassága van, vastagsága nincs

Vonal határolja / Vonalak határolják

Pl.: Téglalap, Négyzet, Kör, Háromszög



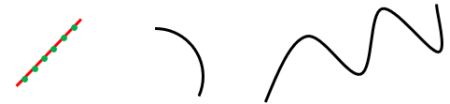
## Vonal:

Csak hosszúsága van, magassága és vastagsága nincs

Pontok sokaságából áll

Lehet egyenes vagy görbe

Cérnaként vagy hajszálként tekintünk rá



## Pont:

Nincs sem hosszúsága, sem magassága, sem vastagsága

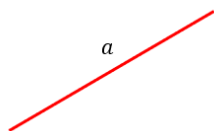
Porszemként tekintünk rá



# Egyenes vonalak típusai

Az  $ABC$  kis betűivel szoktuk jelölni

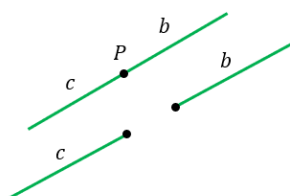
➤ **Egyenes:**



Tetszőleges hosszúságú (úgy képzeljük el, mintha folytatódna a végtelenségig)

Emiatt nem tudjuk lemérni, nincs hossza

➤ **Félegyenes:**

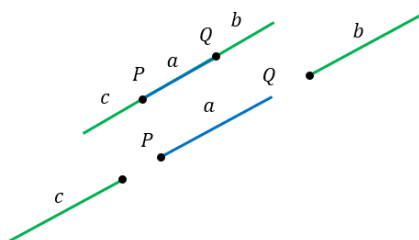


Ha egy egyenesre berajzolunk egy pontot, akkor két félegyeneset kapunk

A félegyenesnek van egy kezdőpontja, de ugyanúgy a végtelenségig folytatódik

Nem tudjuk lemérni, nincs hossza

➤ **Szakasz:**



Ha egy egyenesre berajzolunk két pontot, akkor kapunk két félegyeneset ( $c$  és  $b$ ), a két félegyenes közötti részt ( $a$ ) pedig szakasznak hívjuk

A szakaszt le tudjuk mérni, van hossza

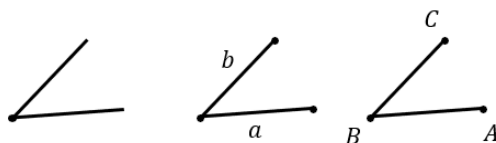
Szakaszt az  $ABC$  kisbetűivel vagy a két végpontjával adhatunk meg ( $a$  szakasz,  $PQ$  szakasz)

Vonalzó vagy körző segítségével mérhetjük le a szakaszt

# Szögek

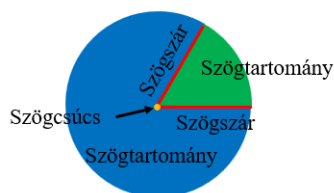
Hogy kapunk meg egy szöget?

- Két félegyenesből, amiknek ugyanaz a kezdőpontja
- Két szakaszból, amiknek az egyik végpontja közös
- Három pontból



## Szögek részei:

- Szögcsúcs
- Szögcsár
- Szögtartomány



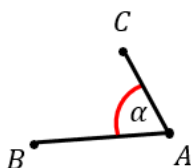
## Szögek jelölése:

- Körívvel szoktuk jelölni a szögeket az ábrán
- A derékszögnek van külön jelölése, egy pontot rakunk a köríven belülré



## Szögek elnevezése:





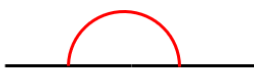
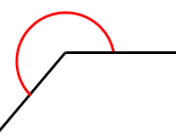
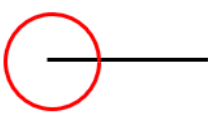
- A szögeket a görög  $ABC$  betűivel szoktuk jelölni:  
( $\alpha$  (alfa),  $\beta$  (béta),  $\gamma$  (gamma),  $\delta$  (delta))
- Ha három pontból kaptuk meg a szöget, akkor a három pont **megfelelő** felsorolásával is jelölhetjük ( $ABC\hat{\phantom{a}}$ ,  $CBA\hat{\phantom{a}}$ ,  $BAC\hat{\phantom{a}}$ )



## Görög ABC betűi, amiket érdemes tudni

Görög betű	Kimondva
$\alpha$	Alfa
$\beta$	Béta
$\gamma$	Gamma
$\delta$	Delta
$\varepsilon$	Epsilon
$\lambda$	Lambda
$\mu$	Mü
$\sigma$	Sigma
$\varphi$	Fí
$\omega$	Omega

## Szögek típusai

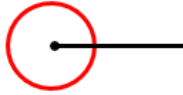
Szög neve	Szög értéke	Szög jelölése
Nullszög	$\alpha = 0^\circ$	
Hegyesszög	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	
Derékszög	$\alpha = 90^\circ$	
Tompaszög	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	
Egyenesszög	$\alpha = 180^\circ$	
Homorúsög	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$	
Teljesszög	$\alpha = 360^\circ$	

## Szögek mértékegysége

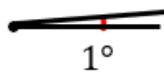
Ugyanúgy, mint a hosszúság, tömeg és űrtartalom esetén a szögeknek is van mértékegysége, amivel meg tudjuk határozni egy szög nagyságát

A szögek mértékegysége a fok, aminek a jele: °

A teljeszög 360°-os



Az 1° a teljeszög 360-ad része, amit úgy kapunk meg, hogy a teljeszög körívét 360 egyenlő részre osztjuk (nagyon kicsike lesz)



Minél jobban kinyitjuk a szárakat, annál nagyobb szöget fogunk kapni

Minél jobban összecusukjuk a szárakat, annál kisebb szöget fogunk kapni

A szögeket szögmérő segítségével tudjuk megmérni

A szögek további mértékegységei a szögperc és a szögmásodperc

Szögperc jele: '

Szögmásodperc jele: ''

A szögperc a fok 60-ad részét jelenti  $\rightarrow 1^\circ = 60'$

A szögmásodperc a szögperc 60-ad részét jelenti (a fok 3600-ad részét)  $\rightarrow 1' = 60''$  és  $1^\circ = 3600''$

Ezek nagyon picik, szabad szemmel nem láthatóak

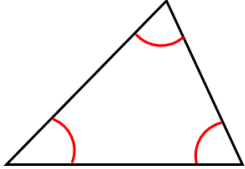
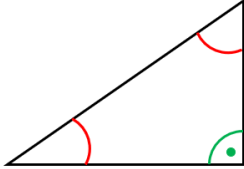
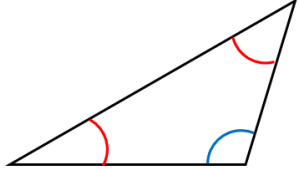
Trükk a megjegyzéshez: **Idő**

Szög	Idő
Fok	Óra
Szögperc	Perc
Szögmásodperc	Másodperc

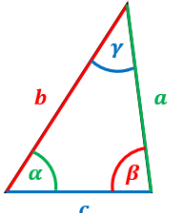
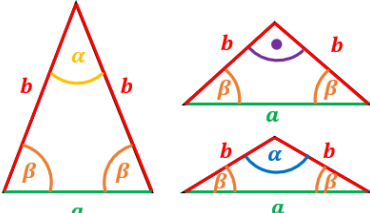
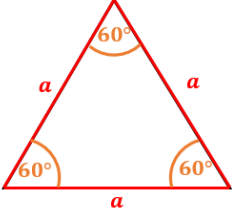
Szög	Idő
$1^\circ = 60'$	$1 \text{ ó} = 60 \text{ p}$
$1' = 60''$	$1 \text{ p} = 60 \text{ mp}$
$1^\circ = 3600''$	$1 \text{ ó} = 3600 \text{ mp}$

# Háromszögek

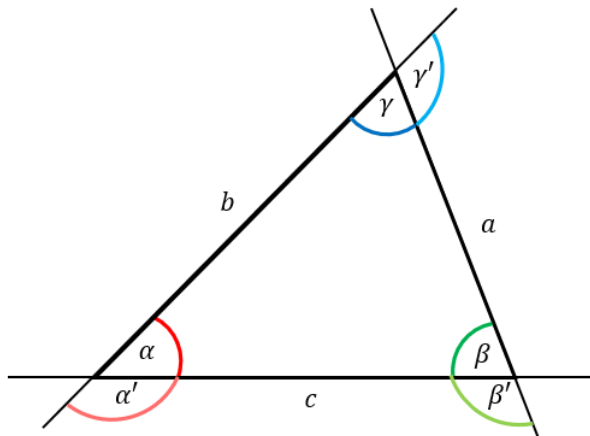
## Háromszögek csoportosítása szögek szerint

Hegyesszögű háromszög	Derékszögű háromszög	Tompaszögű háromszög
		
<b>3 hegyesszöge van</b>	<b>2 hegyesszöge és 1 derékszöge van</b>	<b>2 hegyesszöge és 1 tompaszöge van</b>

## Háromszögek csoportosítása specialitás szerint

Általános háromszög	Egyenlő szárú háromszög	Szabályos (egyenlő oldalú) háromszög
		
<p>Lehet hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű is</p> <p>Lényeg, hogy ne legyen két ugyanolyan hosszúságú oldala</p> <p>Minden oldala és szöge különböző nagyságú</p>	<p>Lehet hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű is</p> <p>2 oldala egyenlő hosszúságú lesz → <b>Szárak</b></p> <p>3. oldal → <b>Alap</b></p> <p>Az <b>alapon fekvő két szöge</b> egyenlő nagyságú</p> <p>Szárak által bezárt szög → <b>Szársszög</b></p>	<p>Mind a 3 oldala egyenlő hosszúságú lesz</p> <p>Mind a 3 szöge egyenlő nagyságú lesz (<b>60°</b>)</p>

## Háromszögek belső és külső szögei



Háromszög belső szögei:

- A csúcsnál  $\alpha$  szög
- B csúcsnál  $\beta$  szög
- C csúcsnál  $\gamma$  szög

Háromszög belső szögeinek összege mindig  $180^\circ$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Háromszög külső szögeit úgy kapjuk meg, ha meghosszabbítjuk az oldalakat

Háromszög külső szögeit vesszővel fogjuk jelölni

Háromszög külső szögei:

- A csúcsnál  $\alpha$ -hoz tartozó külső szög:  $\alpha'$  szög
- B csúcsnál  $\beta$ -hoz tartozó külső szög:  $\beta'$  szög
- C csúcsnál  $\gamma$ -hoz tartozó külső szög:  $\gamma'$  szög

Belső szög és a hozzátartozó külső szög összege  $180^\circ$

- $\alpha + \alpha' = 180^\circ$
- $\beta + \beta' = 180^\circ$
- $\gamma + \gamma' = 180^\circ$

Külső szögek összege  $360^\circ$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$$

Külső szög egyenlő a másik két belső szög összegével:

- $\alpha' = \beta + \gamma$
- $\beta' = \alpha + \gamma$

$$\triangleright \gamma' = \alpha + \beta$$

## Összefüggések háromszögek oldalai és szögei között

Egy háromszög két oldalának összege mindig nagyobb kell, hogy legyen, mint a 3. oldal

$$\triangleright a + b > c$$

$$\triangleright a + c > b$$

$$\triangleright b + c > a$$

Rövidebben: A két rövidebb oldal összege nagyobb kell, hogy legyen, mint a leghosszabb oldal

Ha ez nem teljesülne, akkor a két rövidebb oldal nem érne össze

Pl.:  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $c = 10 \text{ cm}$  oldalú háromszöget nem tudunk rajzolni

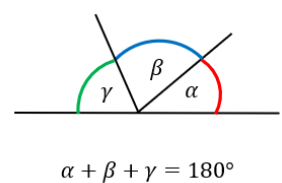
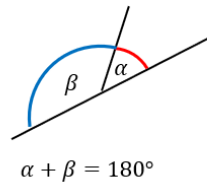
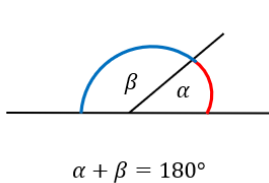
Az oldalak hosszúsága és a szögek nagysága összefügg egymással:

- $\triangleright$  A leghosszabb oldallal szemben van a legnagyobb szög
- $\triangleright$  A középső hosszúságú oldallal szemben van a középső nagyságú szög
- $\triangleright$  A legrövidebb oldallal szemben van a legkisebb szög

## Egyenesen fekvő szögek

Az egy egyenesen fekvő szögek összege mindig  $180^\circ$

Ha ismerjük az egyik szöget a kettő közül, a másikat mindig ki tudjuk számolni



## Egyenesek metszésénél lévő szögek

Két egyenes metszésénél 4 szöget kapunk

Az egymással szemben lévő szögek ugyanakkorák

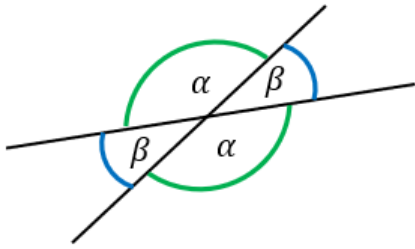
Az egymás mellett lévő szögek összege  $180^\circ$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Ha a 4-ből ismerünk 1 szöget, a másik 3-at meg tudjuk határozni

A 4 szög összege  $360^\circ$

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 360^\circ$$



## Négyszögek

### Négyszögek fajtái

Trapéz	Paralelogramma	Rombusz
Olyan négyszög, aminek van 1 párhuzamos oldalpárja	Olyan négyszög, aminek van 2 párhuzamos oldalpárja	Olyan paralelogramma, aminek minden oldala egyenlő hosszúságú
Deltoid	Téglalap	Négyzet
Olyan négyszög, aminek az egyik átlója szimmetria tengely	Olyan paralelogramma, aminek minden szöge derékszög	Olyan téglalap, aminek minden oldala egyenlő hosszúságú

## Trapéz

Olyan négyszög, aminek van 1 párhuzamos oldalpárja

A párhuzamos oldalakat hívjuk **alap**oknak

A másik két oldalt hívjuk **szár**aknak

Alapvetően nem szimmetrikus

Alapvetően az átlói **nem egyenlő** hosszúak

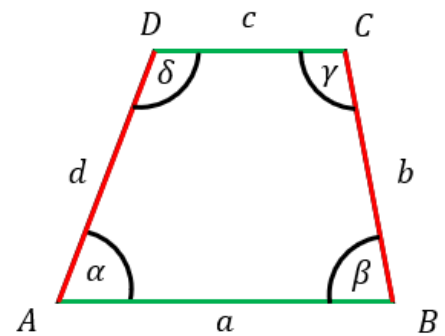
Átlói **nem felezik** egymást

Átlói **nem merőlegesek** egymásra

Az 1 száron fekvő két szögének összege  $180^\circ$

$$\alpha + \delta = 180^\circ$$

$$\beta + \gamma = 180^\circ$$



## Szimmetrikus trapéz (Húrtrapéz)

Szimmetrikus

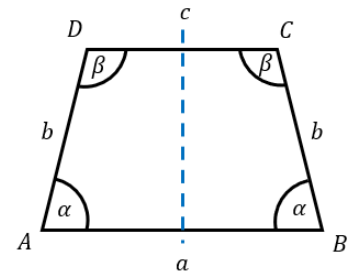
**Szárjai egyenlő hosszúak**

**Átlói egyenlő hosszúak**

Az átlói **nem felezik** egymást

Átlói a szimmetria tengelyen metszik egymást

Az alapokon fekvő szögei ugyanakkorák a szimmetria miatt



## Derékszögű trapéz

Van 2 derékszöge

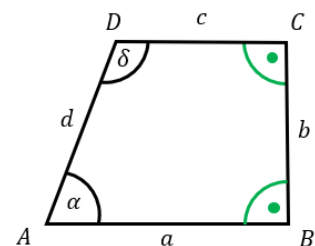
Nincs olyan trapéz, aminek csak 1 derékszöge van

Nem szimmetrikus

Szárjai nem egyenlő hosszúak

Átlói **nem egyenlő** hosszúak

Az átlói **nem felezik** egymást



## Paralelogramma

Olyan négyszög, aminek van 2 párhuzamos oldalpárja

A trapéz minden tulajdonsága igaz lesz rá, lesz pár új tulajdonsága pluszba

Az egymással szemben lévő oldalai azonos hosszúságúak lesznek

Középpontosan szimmetrikus, tengelyesen nem

A középpont, amire szimmetrikus az átlók metszéspontja lesz

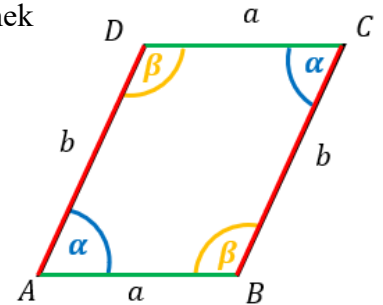
Átlói **nem egyenlő** hosszúak

Átlói **felezik** egymást

Átlói **nem merőlegesek** egymásra

Az 1 **oldal**on fekvő két szögének összege  $180^\circ$

Az egymással szemben lévő szögei egyenlő nagyságúak



## Rombusz

Olyan paralelogramma, aminek minden oldala egyenlő hosszúságú

A paralelogramma minden tulajdonsága igaz lesz rá, lesz pár új tulajdonsága pluszba

Mind a 4 oldala ugyanolyan hosszúságú

Középpontosan és **tengelyesen is** szimmetrikus

A középpont, amire szimmetrikus az átlók metszéspontja lesz

2 szimmetria tengelye is lesz, ezek az átlói lesznek

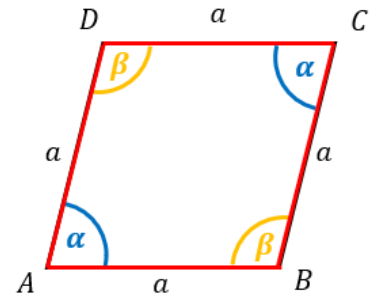
Átlói **nem egyenlő** hosszúak

Átlói **felezik** egymást

Átlói **merőlegesek** egymásra (Változás a sima paralelogrammához képest)

Az 1 oldalon fekvő két szögének összege  $180^\circ$

Az egymással szemben lévő szögei egyenlő nagyságúak



## Deltoid

Olyan négyszög, aminek egyik átlója szimmetria tengely

A trapéz, paralelogramma, rombusz tulajdonságaitól függetlenek a deltoid tulajdonságai

Az egymás melletti oldalai egyenlő hosszúságúak

Tengelyesen szimmetrikus, középpontosan nem

1 szimmetria tengelye lesz, ez az egyik átlója

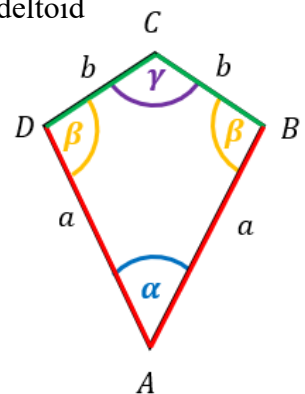
Átlói **nem egyenlő** hosszúak

Átlói közül a szimmetria tengely átló **felezi** a nem szimmetria tengely átlót

Átlói **merőlegesek** egymásra

A szimmetria tengely átló felezi azokat a szögeket, amiken átmegy

Azok a szögek, amiken nem megy át a szimmetria tengely azonos nagyságúak lesznek



## Téglalap

Olyan paralelogramma, aminek minden szöge derékszög

Egymás melletti oldalai egymásra merőlegesek

Az egymással szemben lévő oldalai azonos hosszúságúak lesznek

A paralelogramma minden tulajdonsága igaz lesz rá, lesz pár új tulajdonsága pluszba

Középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus (Tengelyes szimmetria új a paralelogrammához képest)

A középpont, amire szimmetrikus az átlók metszéspontja lesz

2 szimmetria tengelye is lesz, ezek az oldalak felező pontjait összekötő szakaszok lesznek

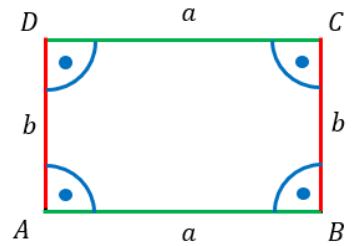
A szimmetria tengelyek metszéspontja a téglalap középpontja lesz

Átlói **egyenlő** hosszúak

Átlói **felezik** egymást

Átlói **nem merőlegesek** egymásra

Minden szöge  $90^\circ$



## Négyzet

Olyan téglalap, aminek minden oldala egyenlő hosszúságú

Olyan rombusz, aminek minden szöge derékszög

A téglalap és a rombusz minden tulajdonsága igaz lesz rá

Mind a 4 oldala ugyanolyan hosszúságú

Középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus

A középpont, amire szimmetrikus az átlók metszéspontja lesz

**4 szimmetria tengelye** is lesz:

- 2 az oldalak felező pontjait összekötő szakasz lesz (téglalap)
- 2 a négyzet átlója lesz (rombusz)

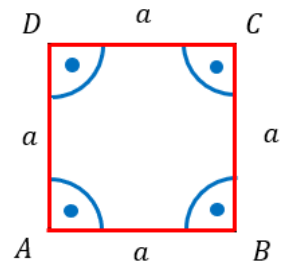
A szimmetria tengelyek metszéspontja a négyzet középpontja lesz

Átlói **egyenlő** hosszúak

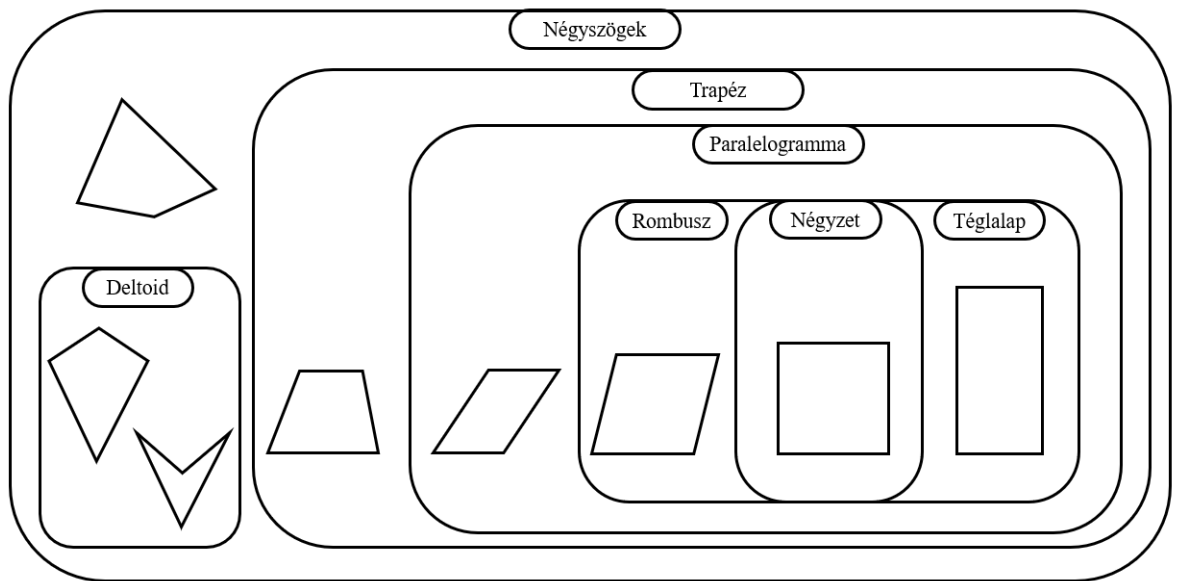
Átlói **felezik** egymást

Átlói **merőlegesek** egymásra

Minden szöge  $90^\circ$



## Négyszögek összefoglalása



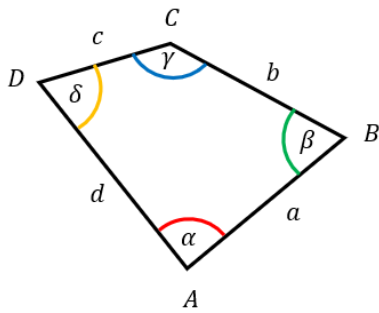
**Minden négyzet:** téglalap is, rombusz is, paralelogramma is, trapéz is, **deltoid!** is

**Minden téglalap:** paralelogramma is, trapéz is

**Minden rombusz:** paralelogramma is, trapéz is

**Minden paralelogramma:** trapéz is

## Négyszögek



Olyan sokszögek, amelyeknek 4 oldala és 4 csúcsa van

Általános négyszögeknek nincs párhuzamos oldalpárja, mind a 4 oldal és mind a 4 szög különböző nagyságú általában (de lehetnek ugyanakkora szögek és oldalak is)

### Oldalak, csúcsok elnevezése:

- A csúcsokat az  $ABC$  **nagy** betűivel nevezzük el ( $A, B, C, D$ )
- Az oldalakat az  $ABC$  **kis** betűivel nevezzük el ( $a, b, c, d$ ), az ugyanolyan hosszúságú oldalakat ugyanazzal a betűvel szoktuk jelölni
- Ha nincsenek ugyanolyan hosszúságú oldalak: A csúcsok mellett lesz a hozzátartozó oldal ( $A$  csúcs mellett lesz  $a$  oldal,  $B$  csúcs mellett lesz  $b$  oldal...)

### Szögek elnevezése: Hasonlóan, mint a háromszögnél:

- $A$  csúcsnál  $\alpha$
- $B$  csúcsnál  $\beta$
- $C$  csúcsnál  $\gamma$
- $D$  csúcsnál  $\delta$

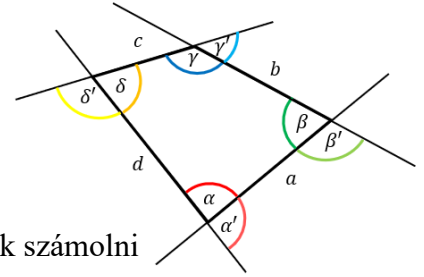
Négyszögek átlóit  $e$ -vel és  $f$ -fel szoktuk jelölni (négyzet esetén  $d$ -vel)

## Négyszögek szögei

Négyszög belső szögeinek összege mindig  $360^\circ$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

Ha a 4 szög közül ismerjük 3 szög nagyságát, a 4.-et ki tudjuk számolni



Lesznek olyan speciális négyszögek, ahol elegendő 1 szög nagyságát ismerni, a többi pedig ez alapján lesz meghatározható (Paralelogramma, Szimmetrikus trapéz)

Lesznek olyan négyszögek, amiknek tudjuk mind a 4 szögét, mert ugyanakkorák (Téglalap, Négyzet)

Négyszög külső szögeit úgy kapjuk, ha meghosszabbítjuk az oldalakat

Négyszög külső szögeit vesszővel fogjuk jelölni

Négyszög külső szögei:

- A csúcsnál  $\alpha$ -hoz tartozó külső szög:  $\alpha'$  szög
- B csúcsnál  $\beta$ -hoz tartozó külső szög:  $\beta'$  szög
- C csúcsnál  $\gamma$ -hoz tartozó külső szög:  $\gamma'$  szög
- D csúcsnál  $\delta$ -hoz tartozó külső szög:  $\delta'$  szög

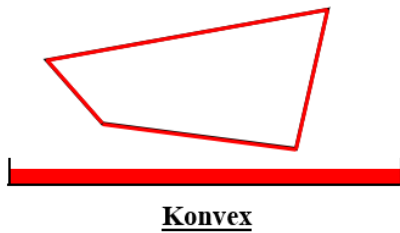
Belső szög és a hozzá tartozó külső szög összege  $180^\circ$

- $\alpha + \alpha' = 180^\circ$
- $\beta + \beta' = 180^\circ$
- $\gamma + \gamma' = 180^\circ$
- $\delta + \delta' = 180^\circ$

Külső szögek összege  $360^\circ$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360^\circ$$

## Konvex és konkáv alakzatok



**Konvex alakzatok:** Azok az alakzatok, amiknek bármelyik két pontját összekötve egy egyenessel az egyenes **minden része az alakzaton belül lesz**

Másképpen megfogalmazva: Ha a földön van egy vékony festékes tálca, akkor, ha a konvex alakzatot elkezdjük forgatni a festékben minden oldalát **be tudjuk** festeni

Konvex alakzatnak **nincs** homorúsöge ( $180^\circ$ -nál nagyobb)



**Konkáv alakzatok:** Azok az alakzatok, amik esetén tudunk találni két olyan pontot az alakzaton belül, amiket, ha összekötünk egy egyenessel, akkor az egyenes **nem minden része lesz az alakzaton belül**

Másképpen megfogalmazva: Ha a földön van egy vékony festékes tálca, akkor ha a konkáv alakzatot elkezdjük forgatni a festékben **nem tudjuk** minden oldalát befesteni

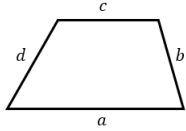
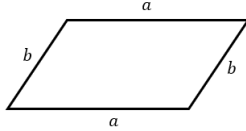
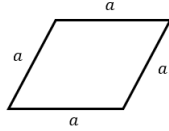
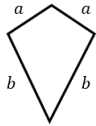
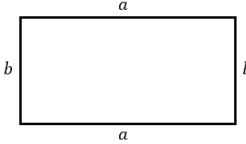
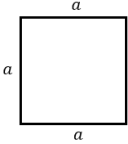
Konkáv alakzatnak **van** homorúsöge ( $180^\circ$ -nál nagyobb)

Példák:

**Konvex alakzatok:** Minden háromszög, Trapéz, Paralelogramma, Rombusz, Téglalap, Négyzet, Deltoidok egy része, Általános négyszögek egy része, Szabályos ötszög, Ötszögek egy része, Szabályos hatszög, Hatszögek egy része, Kör ...

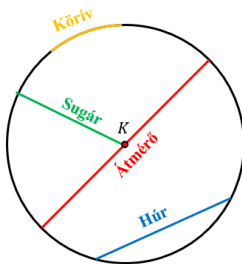
**Konkáv alakzatok:** Deltoidok másik része, Általános négyszögek másik része, Ötszögek másik része, Hatszögek másik része ...

## Négyszögek kerülete

<p>Trapéz</p>  <p><math>K = a + b + c + d</math></p>	<p>Paralelogramma</p>  <p><math>K = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b)</math></p>	<p>Rombusz</p>  <p><math>K = 4a</math></p>
<p>Deltoid</p>  <p><math>K = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b)</math></p>	<p>Téglalap</p>  <p><math>K = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b)</math></p>	<p>Négyzet</p>  <p><math>K = 4a</math></p>

## Kör

### Kör részei



**Kör középpontja:** Az a pont, ahova beleszúrjuk a körzőnket, jele:  $K$  vagy  $O$

**Körvonal:** Azok a pontok, amik ugyanolyan távol vannak egy megadott ponttól (kör középpontjától)

**Körlap:** A körvonalon belüli pontok alkotják

**Húr:** A körvonal két pontját összekötő szakasz

**Átmérő:** A leghosszabb húr, ami átmegy a középponton, jele:  $d$ ,  $D$  (diameter)

**Sugár:** A kör középpontját és a körvonal egy pontját összekötő szakasz, jele:  $r$ ,  $R$  (radius)

**Körív:** A körvonal egy darabja (Ha behúzzunk két sugarat, a körív a sugarak végpontjai között lesz)

**Körcikk:** Egy körív és két sugara által határolt rész

**Körselet:** Egy körív két végpontját összekötő húr és a körív által határolt alakzat

# Geometriai transzformációk

## Tengelyes tükrözés

Az az egyenes, amire tükrözünk, a **tükörtengely**, általában  $t$ -vel szoktuk jelölni

Bármit is szeretnénk tükrözni (félegyenes, egyenes, szakasz, alakzat, síkidom, sokszög), mindig a pontokat fogjuk tükrözni, a pontok tükörképeit pedig a megfelelő sorrendben össze fogjuk kötni

**Pontok tükrözése:** A pontból merőlegest állítunk a tükörtengelyre, ezt meghosszabbítjuk, és ahol metszi a tükörtengelyt, ott beleszúrjuk a körzőnket, kinyitjuk akkorára, mint a metszéspont és az eredeti pont távolsága, és a tükörtengely másik oldalán elmetsszük a merőlegest

A pont tükörképe ugyanolyan távol lesz a tükörtengelytől, mint az eredeti pont

A pont tükörképét  $'$ -vel jelöljük (Ha  $A$  pont volt az eredeti pont, a tükörképe  $A'$  lesz)

Minél közelebb van a pont a tükörtengelyhez, annál közelebb lesz a tükörképe is

**Szakaszok tükrözése:** A szakasz két végpontját tükrözzük, majd összekötjük ezeket

**Félegyenesek tükrözése:** Kiválasztunk egy tetszőleges pontot a félegyenesen, ezt és a félegyenes kezdőpontját tükrözzük, majd összekötjük őket, az összekötésnél tovább fogjuk húzni a vonalat

**Egyenesek tükrözése:** Kiválasztunk két tetszőleges pontot az egyenesen, ezeket tükrözzük, a pontok tükörképeit összekötjük meghosszabbítva

**Sokszögek tükrözése:** A sokszög minden pontját tükrözzük, majd ezeket a megfelelő sorrendben összekötjük (ugyanolyan sorrendben, mint az eredeti alakzat esetén)

**Kör tükrözése:** A kör középpontját tükrözzük, a körzőnket beleszúrjuk az eredeti kör középpontjába, kinyitjuk sugárnyira, a tükörkép középpontjába beleszúrjuk, és körzünk

## Tengelyes tükrözés speciális esetei

**Pont:** Ha a pont a tükörtengelyen van, akkor a pont és a tükörképe megegyezik egymással

**Szakasz:** Ha a szakasz a tükörtengelyen van, akkor a szakasz és a tükörképe megegyezik egymással

**Egyenes:** A tükörtengellyel párhuzamos egyenes tükörképe is párhuzamos lesz a tükörtengellyel

**Egyenes:** Abban a pontban, ahol az egyenes metszi a tükörtengelyt, ott fogja metszeni a tükörképe is a tükörtengelyt (ez lesz az egyik választott pont)

**Egyenes:** Ha az egyenes rajta van a tükörtengelyen, akkor az egyenes és a tükörképe megegyezik egymással

**Egyenes:** Ha az egyenes merőleges a tükörtengelyre, akkor az egyenes és a tükörképe megegyezik egymással

**Tengelyesen szimmetrikus sokszögek:** Ha a sokszög úgy helyezkedik el, hogy a szimmetriatengelye egybeesik a tükörtengellyel, akkor a sokszög és a tükörképe megegyezik egymással

**Kör:** Ha a kör középpontja rajta van a tükörtengelyen, akkor a kör és a tükörképe megegyezik egymással

**Kör:** Ha a kör érinti a tükörtengelyt, akkor a tükörképe ugyanabban a pontban fogja érinteni a tükörtengelyt, mint az eredeti alakzat

**Kör:** Ha két pontban metszi a tükörtengelyt, akkor a tükörkép ugyanebben a két pontban fogja metszeni a tükörtengelyt

### Tengelyes tükrözés tulajdonságai

**Egyenestartó:** Egyenes képe egyenes

**Távolságtartó:** A szakaszok hossza nem változik a tükrözés során

**Szögtartó:** A szögek nagysága nem változik a tükrözés során

**Körtartó:** Kör tükörképe is kör lesz

**Egybevágósági transzformáció:** Az alakzat és a tükörképe egybevágóak lesznek egymással (ugyanolyanok)

Egybevágóság jele:  $\cong$

**Megfordítható transzformáció:** Ha a tükrözés során  $A$  pont tükörképe  $A'$  lett, akkor  $A'$  tükörképe  $A$  lesz

**Megváltoztatja a körüljárási irányt:** Ha az eredeti alakzat esetén az óramutató járásával **megegyező** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörkép esetén az óramutató járásával **ellentétes** irányba fogjuk összekötni a pontokat (Ha az eredeti alakzatnál az óramutató járásával **ellentétes** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörképnél az óramutató járásával **megegyező** irányba fogjuk összekötni a pontokat)

## Középpontos tükrözés

Az a pont, amire tükrözünk, a szimmetriaközéppont, általában  $K$ -val szoktuk jelölni

Bármit is szeretnénk tükrözni (félegyenes, egyenes, szakasz, alakzat, síkidom, sokszög), mindig a pontokat fogjuk tükrözni, a pontok tükörképeit pedig a megfelelő sorrendben össze fogjuk kötni

**Pontok tükrözése:** A pontot összekötjük a  $K$  középponttal és meghosszabbítjuk, a pont tükörképe a meghosszabbított egyenesen lesz ugyanolyan távolságra  $K$ -tól, mint az eredeti pont

A pont tükörképe ugyanolyan távol lesz a középponttól, mint az eredeti pont

A pont tükörképét  $'$ -vel jelöljük (Ha  $A$  pont volt az eredeti pont, a tükörképe  $A'$  lesz)

Minél közelebb van a pont a középponthez, annál közelebb lesz a tükörképe is

**Szakaszok tükrözése:** A szakasz két végpontját tükrözzük, majd összekötjük ezeket

**Félegyenesek tükrözése:** Kiválasztunk egy tetszőleges pontot a félegyenesen, ezt és a félegyenes kezdőpontját tükrözzük, majd összekötjük őket, az összekötésnél tovább fogjuk húzni a vonalat

**Egyenesek tükrözése:** Kiválasztunk két tetszőleges pontot az egyenesen, ezeket tükrözzük, a pontok tükörképeit összekötjük meghosszabbítva

**Sokszögek tükrözése:** A sokszög minden pontját tükrözzük, majd ezeket a megfelelő sorrendben összekötjük (ugyanolyan sorrendben, mint az eredeti alakzat esetén)

**Kör tükrözése:** A kör középpontját tükrözzük, a körzönket beleszúrjuk az eredeti kör középpontjába, kinyitjuk sugáryira, a tükörkép középpontjába beleszúrjuk, és körzünk

### Középpontos tükrözés speciális esetei

**Pont:** Ha a pont a középponton van, akkor a pont és a tükörképe megegyezik egymással

**Szakasz:** Ha a szakasz átmegy a középponton, és a felezőpontja egybeesik középponttal, akkor a szakasz és a tükörképe megegyezik egymással

**Szakasz:** Ha a szakasz egyik végpontja a középponton van, akkor csak a másik végpontját kell tükrözni

**Szakasz:** Ha a szakasz nincs rajta a középponton, akkor a szakasz és a tükörképe párhuzamos lesz egymással, de a pontok felcserélődnek

**Egyenes:** Ha az egyenes nem megy át a középponton, akkor az egyenes és a tükörképe párhuzamos lesz egymással

**Egyenes:** Ha az egyenes átmegy a középponton, akkor az egyenes és a tükörképe megegyezik egymással

**Középpontosan szimmetrikus sokszögek:** Ha a sokszög úgy helyezkedik el, hogy a középpontja (átlók metszéspontja) egybeesik a szimmetriaközépponttal, akkor a sokszög és a tükörképe megegyezik egymással

**Kör:** Ha a kör középpontja egybeesik a szimmetriaközépponttal, akkor a kör és a tükörképe megegyezik egymással

**Kör:** Ha a körvonalon van a szimmetriaközéppont, akkor a tükörkép ugyanúgy át fog menni a középponton, és a középpontban fogja érinteni az eredeti kört

**Kör:** Ha a szimmetriaközéppont a körvonalon belül van, akkor körnek és a tükörképének két metszéspontja lesz

### **Középpontos tükrözés tulajdonságai**

**Egyenestartó:** Egyenes képe egyenes

**Távolságtartó:** A szakaszok hossza nem változik a tükrözés során

**Szögtartó:** A szögek nagysága nem változik a tükrözés során

**Körtartó:** Kör tükörképe is kör lesz

**Egybevágósági transzformáció:** Az alakzat és a tükörképe egybevágóak lesznek egymással (ugyanolyanok)

Egybevágóság jele:  $\cong$

**Megfordítható transzformáció:** Ha a tükrözés során  $A$  pont tükörképe  $A'$  lett, akkor  $A'$  tükörképe  $A$  lesz

**Nem változtatja meg a körüljárási irányt:** Ha az eredeti alakzat esetén az óramutató járásával **megegyező** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörkép esetén is az óramutató járásával **megegyező** irányba fogjuk összekötni a pontokat (Ha az eredeti alakzatnál az óramutató járásával **ellentétes** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörképénél is az óramutató járásával **ellentétes** irányba fogjuk összekötni a pontokat)

## Tengelyesen szimmetrikus sokszögek vs középpontosan szimmetrikus sokszögek

		Tengelyesen	Középpontosan
Háromszögek	Általános	✗	✗
	Egyenlő szárú	✓	✗
	Szabályos	✓	✗
Négyszögek	Általános	✗	✗
	Általános trapéz	✗	✗
	Húrtrapéz	✓	✗
	Derékszögű trapéz	✗	✗
	Paralelogramma	✗	✓
	Rombusz	✓	✓
	Deltoid	✓	✗
	Téglalap	✓	✓
	Négyzet	✓	✓
Szabályos sokszögek	Páratlan csúcsú	✓	✗
	Páros csúcsú	✓	✓
Kör		✓	✓

## Arányosságok

### Egyenes arányosság

Ahányszorosára **növeljük** (↑) az egyik mennyiséget, ugyanannyiszorosára fog **növekedni** (↑) a másik mennyiség

Ahányadrészére **csökkentjük** (↓) az egyik mennyiséget, ugyanannyiadrészére fog **csökkenni** (↓) a másik mennyiség

Egyenes arányosság esetén, ha elosztjuk egymással az egymáshoz tartozó értékeket, mindig ugyanazt a számot fogjuk kapni

### Fordított arányosság

Ahányszorosára **növeljük** (↑) az egyik mennyiséget, ugyanannyiadrészére fog **csökkenni** (↓) a másik mennyiség

Ahányadrészére **csökkentjük** (↓) az egyik mennyiséget, ugyanannyiszorosára fog **növekedni** (↑) a másik mennyiség

Fordított arányosság esetén a számpárok szorzat állandó

# Százalékszámítás

Százalék jele: %

Példák: 10%, 25%, 100%

Hol használunk százalékot?

- Akciók, kedvezmények
- Statisztika
- Adók
- Kamatok, hitelek
- Osztályzás
- Infláció
- Telefon akkumulátor töltöttsége

1 egész lesz a 100%

Általában 0% és 100% közötti százalékokról szoktunk beszélni, azokkal szoktunk találkozni, de 100%-nál nagyobb százalékok is lesznek

Százalék 3 alakban adható meg:

- Százalék alakban (20%)
- Tört alakban ( $\frac{1}{5}$ )
- Tizedes tört alakban (0,2)

## Százalékszámítás tudnivalók

1 egész lesz a 100%

Az 1% a 100% 100-ad része, egy szám 1%-át úgy kapjuk meg, hogy a számot elosztjuk 100-zal

Százalékszámítás során egyenes arányosságot fogunk használni

Példa: Számoljuk ki 400 20%-át!

$:5$	<table border="1"><tr><td>400</td><td>100%</td></tr><tr><td><b>80</b></td><td><b>20%</b></td></tr></table>	400	100%	<b>80</b>	<b>20%</b>	$:5$		
400	100%							
<b>80</b>	<b>20%</b>							
$:100$	<table border="1"><tr><td>400</td><td>100%</td></tr><tr><td>4</td><td>1%</td></tr><tr><td><b>80</b></td><td><b>20%</b></td></tr></table>	400	100%	4	1%	<b>80</b>	<b>20%</b>	$:100$
400	100%							
4	1%							
<b>80</b>	<b>20%</b>							
$\cdot 20$		$\cdot 20$						

Egy szám valahány százalékát kétféleképpen lehet kiszámolni:

- Egy lépésben: A százalékot átírjuk tört vagy tizedes tört alakra, majd a számot ezzel megszorozzuk
- Két lépésben: Kiszámoljuk a szám 1%-át, majd ezt a számot megszorozzuk a százalék értékével

Százalék átírása tört alakra: A százalék értékét elosztjuk 100-zal, ha tudunk, egyszerűsítünk, és a kapott számmal szorozzuk az eredeti számot

$$20\% \rightarrow \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \quad 400 \cdot \frac{1}{5} = \frac{400}{5} = \mathbf{80}$$

**400 20%-a 80.**

**Százalékalap:** Aminek kiszámoljuk valamennyi százalékát

**Százalékláb:** A %-os kifejezés

**Százalékérték:** Az eredmény, amit kapunk a számolás során

Százalék átírása tizedes tört alakra: A százalék értéket elosztjuk 100-zal, és a kapott számmal szorozzuk az eredeti számot

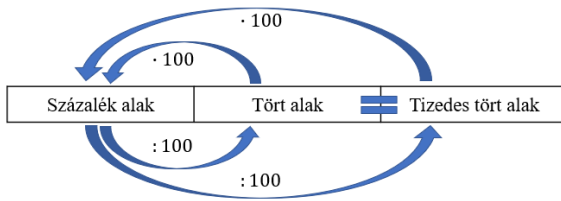
$$20\% \rightarrow 0,2 \quad 400 \cdot 0,2 = 40 \cdot 2 = \mathbf{80}$$

## Kapcsolat százalék, tört alak és tizedes tört alak között

A 3 között mindig van átjárás (az egyiket át tudjuk írni a másikra)

Átírások:

- Ha százalékból írunk át valamit tört vagy tizedes tört alakra, akkor mindig osztani fogunk 100-zal, tört esetén mindig 100-adban kapjuk meg a törtet, amit, ha tudunk, akkor egyszerűsítünk, tizedes tört esetén pedig 2-vel **balra** (←) visszük a tizedesvesszőt
- Ha tört alakról írunk át valamit tizedes tört alakra, akkor vagy tudjuk az értéket (nevezetes törtek), vagy bővítjük a törtet 100-adra
- Ha tört alakról írunk át valamit százalék alakra, akkor 100-zal fogjuk szorozni a törtet, ha 100-ad alakban van, akkor csak eltűnik a nevező, ha nem 100-ad alakban van, akkor pedig elvégezzük a szorzást és az egyszerűsítést
- Ha tizedes tört alakról írunk át valamit tört alakra, akkor csak simán átírjuk, ha tudunk, egyszerűsítünk
- Ha tizedes tört alakról írunk át valamit százalék alakra, akkor 100-zal fogjuk szorozni a tizedes törtet, vagyis 2-ször visszük **jobbra** (→) a tizedesvesszőt



## Nevezetes százalékok

Százalék	Osztás / Szorzás
10%	: 10
50%	: 2
25%	: 4
20%	: 5
5%	: 20
1%	: 100
100%	$\cdot 1$
200%	$\cdot 2$
300%	$\cdot 3$
150%	$\cdot 1,5$

# Hosszúság mérése

## Hossz:

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$$

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

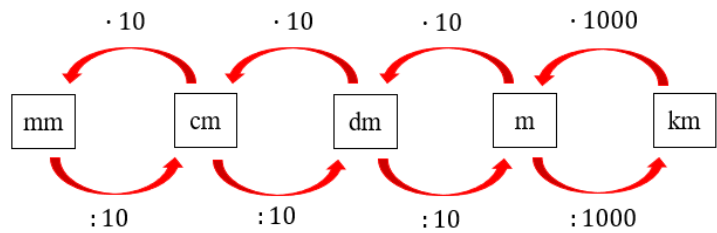
*mm* – milliméter

*cm* – centiméter

*dm* – deciméter

*m* – méter

*km* – kilométer



$$1 \text{ mm} < 1 \text{ cm} < 1 \text{ dm} < 1 \text{ m} < 1 \text{ km}$$

**Ha nagyobbról váltunk kisebbre, akkor szorzunk**

**Ha kisebbről váltunk nagyobbra, akkor osztunk**

# Űrtartalom mérése

## Űrtartalom:

$$1 \text{ cl} = 10 \text{ ml}$$

$$1 \text{ dl} = 10 \text{ cl} = 100 \text{ ml}$$

$$1 \text{ l} = 10 \text{ dl} = 100 \text{ cl} = 1000 \text{ ml}$$

$$1 \text{ hl} = 100 \text{ l} = 1000 \text{ dl}$$

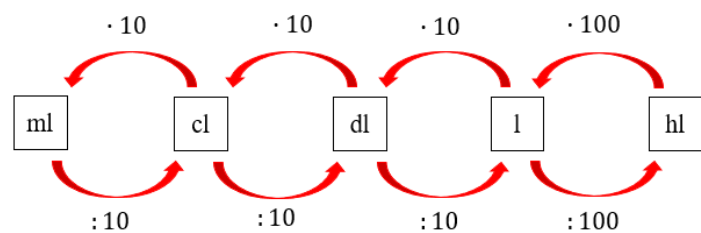
*ml* – milliliter

*cl* – centiliter

*dl* – deciliter

*l* – liter

*hl* – hektoliter



$$1 \text{ ml} < 1 \text{ cl} < 1 \text{ dl} < 1 \text{ l} < 1 \text{ hl}$$

**Ha nagyobból váltunk kisebbre, akkor szorzunk**

**Ha kisebbről váltunk nagyobbra, akkor osztunk**

# Tömeg mérése

## Tömeg:

$$1 \text{ dkg} = 10 \text{ g}$$

$$1 \text{ kg} = 100 \text{ dkg} = 1000 \text{ g}$$

$$1 \text{ q} = 100 \text{ kg}$$

$$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg} = 10 \text{ q}$$

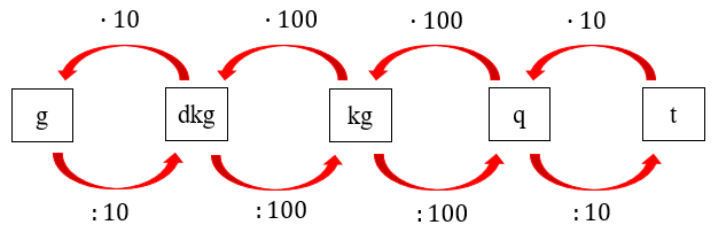
*g* – gramm

*dkg* – dekagramm

*kg* – kilogramm

*q* – mázsa

*t* – tonna



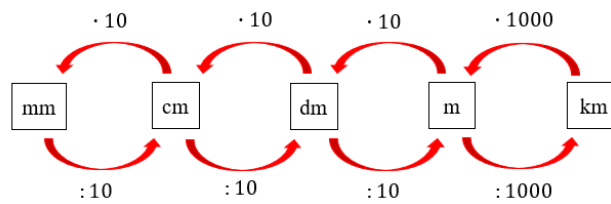
$$1 \text{ g} < 1 \text{ dkg} < 1 \text{ kg} < 1 \text{ q} < 1 \text{ t}$$

**Ha nagyobbról váltunk kisebbre, akkor szorzunk**

**Ha kisebbről váltunk nagyobbra, akkor osztunk**

# Mértékegység átváltások összehasonlítása

## Hosszúság



mm – Milliméter

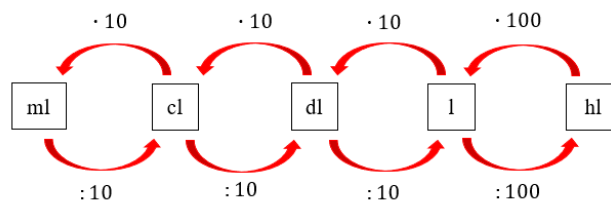
cm – Centiméter

dm – Deciméter

m – Méter

km – Kilométer

## Űrtartalom



ml – Milliliter

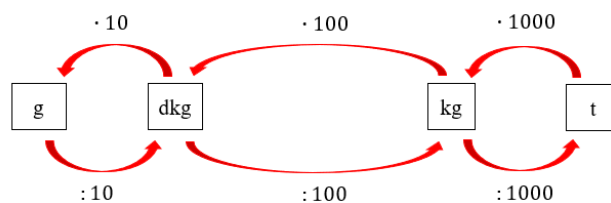
cl – Centiliter

dl – Deciliter

l – Liter

hl – Hektoliter

## Tömeg



*g* – Gramm

*dkg* – Dekagramm

*kg* – Kilogramm

*t* – Tonna

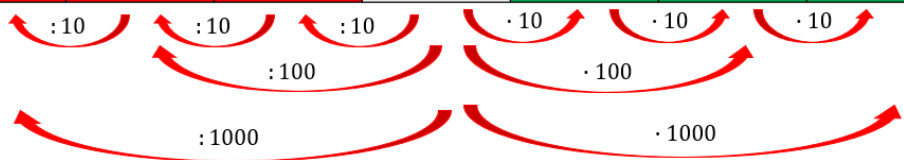
# Prefixumok (előtagok)

Azok a szavak (szorzótényezők), amiket a mértékegységek elé rakunk

Az alap (prefixum nélküli mértékegységek):

- Hosszúság: méter (*m*)
- Űrtartalom: liter (*l*)
- Tömeg: gramm (*g*)

Prefixum	Mili ( <b>m</b> )	Centi ( <b>c</b> )	Deci ( <b>d</b> )	Alap mértékegység	Deka ( <b>dk</b> )	Hekto ( <b>h</b> )	Kilo ( <b>k</b> )
Hányszoros/ Hányadrész	Ezred	Század	Tized	–	Tízszeres	Százszoros	Ezerszeres
Hosszúság	<i>mm</i>	<i>cm</i>	<i>dm</i>	<i>m</i>	–	–	<i>km</i>
Űrtartalom	<i>ml</i>	<i>cl</i>	<i>dl</i>	<i>l</i>	–	<i>hl</i>	–
Tömeg	<i>mg</i>	–	–	<i>g</i>	<i>dkg</i>	–	<i>kg</i>



## További prefixumok (kiegészítés)

Név	Jel	Hányszoros	Számmal	Példa
deka	<i>dk</i>	Tízszeres	· 10	<i>dkg</i>
hekto	<i>h</i>	Százszoros	· 100	<i>hl</i>
kilo	<i>k</i>	Ezerszeres	· 1000	<i>kg, km</i>
mega	<i>M</i>	Milliószoros	· 1 000 000	<i>MB, MW</i>
giga	<i>G</i>	Milliárdszoros	· 1 000 000 000	<i>GB, GW</i>

Név	Jel	Hányadrész	Számmal	Példa
deci	<i>d</i>	Tized	: 10	<i>dm, dl</i>
centi	<i>c</i>	Század	: 100	<i>cm, cl</i>
milli	<i>m</i>	Ezred	: 1000	<i>mm, ml, mg</i>
mikro	$\mu$	Milliomod	: 1 000 000	$\mu\text{m}, \mu\text{g}$
nano	<i>n</i>	Milliárdod	: 1 000 000 000	<i>nm</i>

# Idő mérése

## Idő:

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$$

$$1 \text{ nap} = 24 \text{ h}$$

$$1 \text{ hét} = 7 \text{ nap}$$

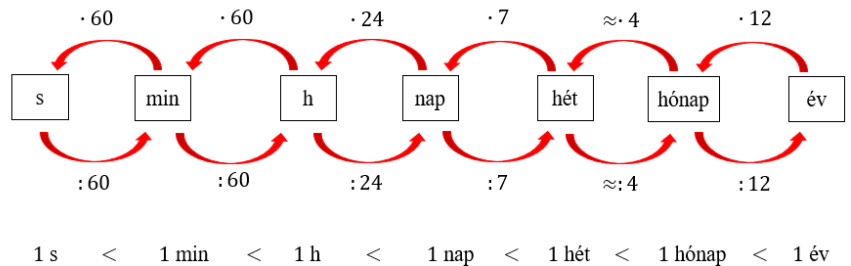
$$1 \text{ hónap} \approx 4 \text{ hét} \approx 30 - 31 \text{ nap}$$

$$1 \text{ év} = 12 \text{ hónap} = 52 \text{ hét} \approx 365 \text{ nap}$$

s – másodperc (second)

min – perc (minute)

h – óra (hour)



**Ha nagyobbról váltunk kisebbre, akkor szorzunk**

**Ha kisebbről váltunk nagyobbra, akkor osztunk**

## Műveletek idővel

### Összeadás és kivonás

Idővel leggyakrabban összeadás és kivonás műveletek szoktunk elvégezni

Tipikusan az utazásos, menetrendes feladatok esetén adunk össze időket, vagy vonjuk ki őket egymásból

Ilyenkor 3 dolog szerepel a táblázatban (vagy a feladat szövegében):

- Indulás (Kezdés)
- Érkezés (Végzés)
- Utazás hossza (Menetidő)

A 3 dologból 2 van megadva és a 3. dolgot kell kiszámolnunk:

- Ha adott az indulás ideje és az utazás hossza, akkor az érkezés idejét úgy kapjuk meg, hogy az induláshoz **hozzáadjuk** az utazás hosszát
- Ha adott az indulás ideje és az érkezés ideje, akkor az út hosszát úgy kapjuk meg, hogy az érkezés idejéből **kivonjuk** az indulás idejét
- Ha adott az érkezés ideje és az utazás hossza, akkor az indulás idejét úgy kapjuk meg, hogy az érkezés idejéből **kivonjuk** az utazás hosszát

Az összeadást és a kivonást is úgy végezzük el, hogy elvégezzük a megfelelő műveletet az órákkal és a percekkel is

Két eset lehetséges:

- Szerencsés eset: Ha a percek összege nem nagyobb, mint 60, vagy ha a kivonásnál az a perc a nagyobb, amiből kivonjuk a másikat
- Szerencsétlen eset: Ha a percek összege nagyobb, mint 60, vagy ha a kivonásnál az a perc a kisebb, amiből kivonjuk a másikat

Összeadásnál a kapott 60-nál nagyobb összeget felbontjuk 60 és egy másik szám összegére, a 60 percet átváltjuk 1 órára, és hozzáadjuk az órák összegéhez (vagy ha nagyobb számokról van szó, akkor több órára váltjuk át)

Kivonásnál a kisebbítendő órából elveszünk 1 órát, azt átváltjuk 60 percre, és hozzáadjuk a kisebbítendő perchez, utána végezzük el a kivonást

## **Szorzás és osztás**

Szorzás és osztás műveleteket idővel ritkán szoktunk elvégezni, ha el is kell végeznünk, akkor az mindig az idő hosszára (menetidő) vonatkozik, sosem az indulási vagy érkezési időre

Szorzást és osztást is kétféleképpen lehet elvégezni:

- Az órát és a percet is külön-külön megszorozzuk/elosztjuk az adott számmal (ez osztás esetén ritkán alkalmazható)
- Átváltjuk az óra:perc formátumban megadott időt percre, majd ezt a számot szorozzuk, vagy osztjuk el azzal a számmal, amivel kell, a végén visszaválthatjuk az eredményt óra:perc formátumra (ha szeretnénk)

Szorzás esetén, ha a perc és a szám szorzata nagyobb, mint 60, akkor átváltjuk egész órára vagy órákra

Osztás esetén, ha az óra nem osztható az osztóval, az nem feltétlenül jelenti azt, hogy nem fogunk szép eredményt kapni, lehet, hogy ha átváltjuk percre és úgy osztunk, akkor szép végeredményt kapunk

# Kerület és terület

## Kerület

Kerület esetén a kerítésre gondoljunk mindig

Kerület megadja egy alakzat oldalai hosszának összegét

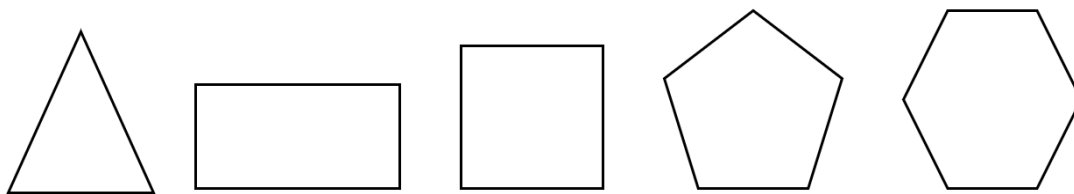
Ha ismerjük az alakzat összes oldalának a hosszát, akkor bármilyen fura is az alakzat ki tudjuk számolni a kerületét

Kerület jele:  $K$

Kerület mértékegysége kezdetben: Egység (négyzetrácsos lap egy négyzetének oldala 1 egység)

Kerület mértékegysége későbbiekben: Megegyezik az oldalak mértékegységével (Ha az oldalak mértékegysége méter, akkor a kerületé is méter, ha az oldalak mértékegysége deciméter, akkor a kerületé is deciméter...)

Pár alakzat, amiknek meg tudjuk határozni a kerületét:



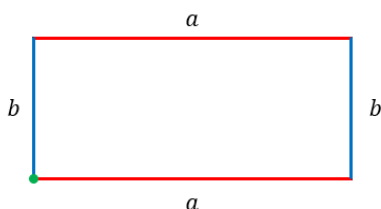
## Téglalap kerülete

A téglalap egy négyszög  $\rightarrow$  4 oldala van

Téglalap szemközti oldalai egyenlő hosszúak

Legyen a téglalap szélessége  $a$

Legyen a téglalap magassága  $b$



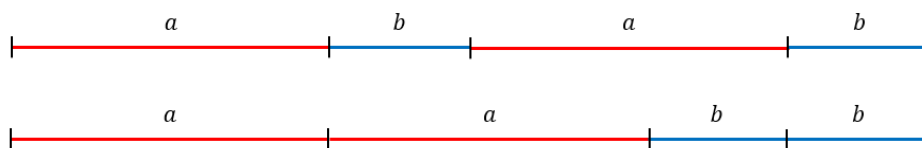
**Téglalap kerületének kiszámítása**

$$K = a + b + a + b$$

$$K = 2a + 2b$$

$$K = 2 \cdot (a + b)$$

Kerület:

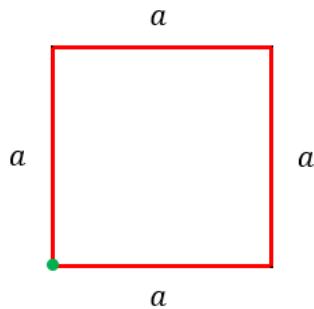


## Négyzet kerülete

A négyzet egy négyszög  $\rightarrow$  4 oldala van

Négyzet mind a 4 oldala egyenlő hosszú

Legyen a négyzet oldala  $a$

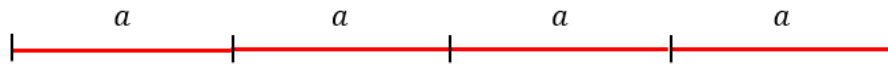


### Négyzet kerületének kiszámítása

$$K = a + a + a + a$$

$$K = 4a$$

Kerület:



## Terület

Terület esetén a telekre gondoljunk mindig

Terület megadja az alakzat belsejében lévő rész nagyságát

Terület jele:  $T$

Terület mértékegysége kezdetben: Négyzetegység, területegység (négyzetrácsos lap egy négyzete)

Terület mértékegysége későbbiekben: Megegyezik az oldalak mértékegységének négyzetével (Ha az oldalak mértékegysége méter, akkor a területé négyzetméter ( $m^2$ ), ha az oldalak mértékegysége deciméter, akkor a területé négyzetdeciméter ( $dm^2$ )...)

Területet általában nehezebb számolni, mint kerületet

Olyan alakzatok területét tudjuk kiszámolni (kezdetben), amiket kis négyzetekből lehet kirakni

## Téglalap területe

A téglalap egy négyszög  $\rightarrow$  4 oldala van

Téglalap szemközti oldalai egyenlő hosszúak

Legyen a téglalap szélessége 5 egység

Legyen a téglalap magassága 3 egység

Téglalap területét mindig úgy számoljuk ki, hogy megszámoljuk, hogy hány egység széles, hány egység magas és a kettőt összeszorozzuk egymással

$$T = \text{szélesség} \cdot \text{magasság}$$

$$T = a \cdot b$$

## Négyzet területe

A négyzet egy négyszög  $\rightarrow$  4 oldala van

Négyzet mind a 4 oldala egyenlő hosszú

Legyen a négyzetoldala 3 egység

Négyzet területét ugyanúgy számoljuk ki, mint téglalap területét, csak négyzetnél a szélesség és magasság megegyezik egymással

$$T = \text{szélesség} \cdot \text{magasság}$$

$$T = a \cdot a$$

# Terület mérése

Minek határozhatjuk meg a területét?

- Síkidomoknak és sokszögeknek (Kör, Háromszög, Téglalap, Négyzet ...)
- Testek lapjainak

Területmérésnél az 1 egység oldalú négyzet területe 1 területegység lesz

Ha mértékegységgel adjuk meg, akkor a terület mértékegysége a mértékegység négyzete lesz

Ha a négyzet oldala 1 *cm*, akkor a területe 1 *cm*<sup>2</sup> lesz

**Terület:**

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$$

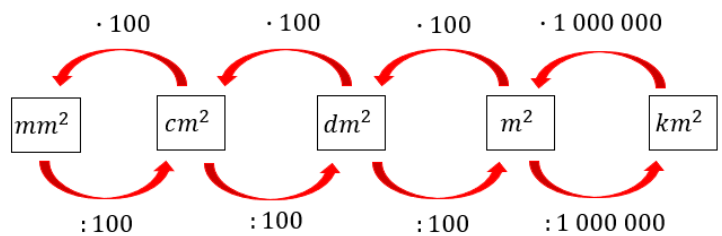
*mm*<sup>2</sup> – négyzetmilliméter

*cm*<sup>2</sup> – négyzetcentiméter

*dm*<sup>2</sup> – négyzetdeciméter

*m*<sup>2</sup> – négyzetméter

*km*<sup>2</sup> – négyzetkilométer



$$1 \text{ mm}^2 < 1 \text{ cm}^2 < 1 \text{ dm}^2 < 1 \text{ m}^2 < 1 \text{ km}^2$$

**Ha nagyobbról váltunk kisebbre, akkor szorzunk**

**Ha kisebbről váltunk nagyobbra, akkor osztunk**

Trükk: Nem muszáj megjegyezni a terület átváltás váltószámait, ha tudjuk a hossz átváltás váltószámait, mert mindig 2-szer annyi 0 van az 1-es mögött területnél, mint hosszúságnál

Pl.:

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \rightarrow 2 \text{ db } 0 \text{ van az 1-es mögött}$$

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 \rightarrow 2 \cdot 2 = 4 \text{ db } 0 \text{ van az 1-es mögött}$$

# Térfogat mérése

Minek határozhatjuk meg a térfogatát?

➤ Testeknek (Téglatest, Kocka, Négyzetes hasáb, Hasábok, Henger...)

Térfogat mérésénél az 1 egység oldalú kocka térfogata 1 térfogategység lesz

Ha mértékegységgel adjuk meg, akkor a térfogat a mértékegység köbe lesz

Ha a kocka éle 1 *cm*, akkor a térfogata 1  $cm^3$  lesz

**Térfogat:**

$$1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 = 1\,000\,000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ km}^3 = 1\,000\,000\,000 \text{ m}^3$$

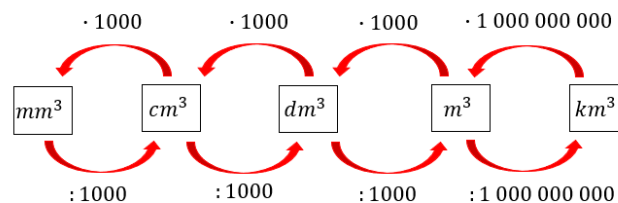
$mm^3$  – köbmilliméter

$cm^3$  – köbcentiméter

$dm^3$  – köbdeciméter

$m^3$  – köbméter

$km^3$  – köbkilométer



$$1 \text{ mm}^3 < 1 \text{ cm}^3 < 1 \text{ dm}^3 < 1 \text{ m}^3 < 1 \text{ km}^3$$

**Ha nagyobbról váltunk kisebbre, akkor szorzunk**

**Ha kisebbről váltunk nagyobbra, akkor osztunk**

Trükk: Nem muszáj megjegyezni a térfogat átváltás váltószámait, ha tudjuk a hossz átváltás váltószámait, mert egyszerűen csak 3-szor annyi 0 lesz az 1-es mögött térfogatnál, mint hosszúságnál

Pl.:

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \rightarrow 2 \text{ db } 0 \text{ van az 1-es mögött}$$

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3 \rightarrow 3 \cdot 2 = 6 \text{ db } 0 \text{ van az 1-es mögött}$$

**Kapcsolat térfogat és űrtartalom között:**

$$1 \text{ liter} = 1 \text{ dm}^3$$

# Téglatest

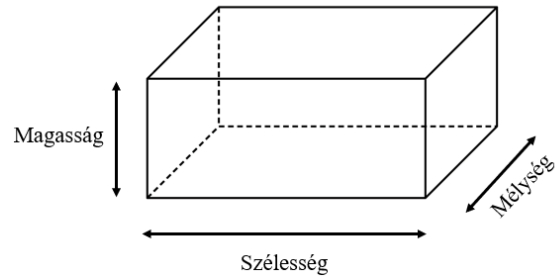
Téglatest esetén egy téglára tudunk gondolni

A téglatest lapjai téglalapok

Az egymással szemben lévő téglalapok ugyanakkorák

Egy téglatestnek 3 mérete van:

- Szélesség (Hosszúság)
- Mélység
- Magasság



Téglatest:

- 6 lapja van (3-féle téglalap)
- 8 csúcsa van
- 12 éle van (3-féle hosszúságú)

Téglatest lapjainak elnevezése:

- Előlap (Első lap)                      Hátlap (Hátsó lap)
- Alaplap (Alsó lap)                      Fedőlap (Felső lap)
- Jobb oldali lap (Oldallap) Bal oldali lap (Oldallap)

# Kocka

A kocka egy speciális téglatest

A kocka lapjai négyzetek

Minden lapja ugyanakkora

Egy kockának 3 mérete van (Ezek megegyeznek egymással):

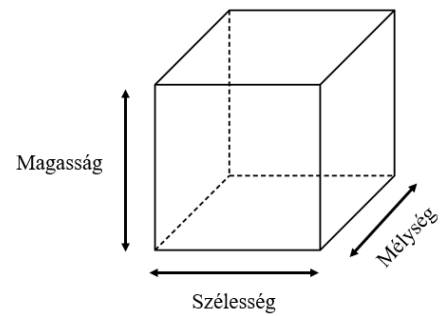
- Szélesség (Hosszúság)
- Mélység
- Magasság

Kocka:

- 6 lapja van (Mind a 6 lap ugyanolyan négyzet)
- 8 csúcsa van
- 12 éle van (Minden éle ugyanolyan hosszúságú)

Kocka lapjainak elnevezése:

- Előlap (Első lap)                      Hátlap (Hátsó lap)
- Alaplap (Alsó lap)                      Fedőlap (Felső lap)
- Jobb oldali lap (Oldallap) Bal oldali lap (Oldallap)



# Felszín

Testek esetén tudunk felszínt számolni

A testek felszíne a lapok területének összege

A lapok legtöbbször téglalapok és négyzetek

Téglalap területét úgy számoljuk ki, hogy a szélességét és a magasságát összeszorozzuk egymással

Négyzetnek is ugyanígy számoljuk ki a területét, csak négyzet esetén a szélesség és a magasság megegyezik egymással

A lapok területének mértékegysége az oldalak mértékegységének négyzete lesz ( $cm^2$ ,  $dm^2$ ,  $m^2$ ...)

Arra figyeljük, hogy ha nem azonos mértékegységben vannak megadva az oldalak, akkor végezzük el az átváltást

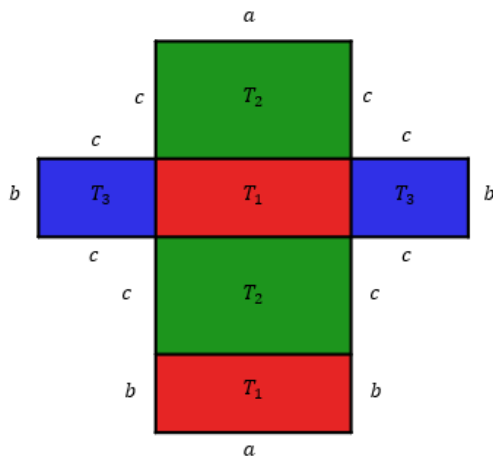
A felszín mértékegysége ugyanolyan lesz, mint a terület mértékegysége ( $cm^2$ ,  $dm^2$ ,  $m^2$ ...)

Ha át kell váltanunk egyik mértékegységről a másikra, akkor ugyanazok a váltószámok érvényesek, mint terület esetén

Érdemesebb a feladat elején a hosszúságokat átváltani a kívánt mértékegységre, mert így nem kell a végén a nehezebb átváltást elvégezni

**Felszín jele: A** (Area latin (angol) szó miatt)

## Téglatest felszíne



Egy téglatestnek 6 téglalap alakú lapja van, felszínét úgy kapjuk meg, hogy a 6 lap területét összeadjuk

Mivel az egymással szemben lévő lapok ugyanakkorák, ezért elegendő 3 különböző lapnak kiszámolni a területét

**Téglatest felszíne:**  $A = T_1 + T_1 + T_2 + T_2 + T_3 + T_3 = 2 \cdot T_1 + 2 \cdot T_2 + 2 \cdot T_3$

Más alakban:  $A = 2 \cdot (T_1 + T_2 + T_3)$

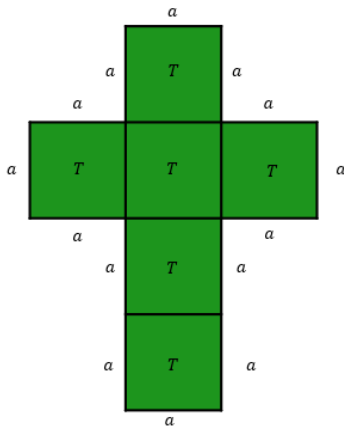
Mindegy, hogy melyik lapokat jelöljük  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ -mal

Egy téglatestnek 3 mérete van (Szélesség, mélység, magasság)

A lapok területének kiszámításakor 2-2-t szorzunk össze egymással (3 párosítás)

Ha már profibbak leszünk:  $A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

## Kocka felszíne

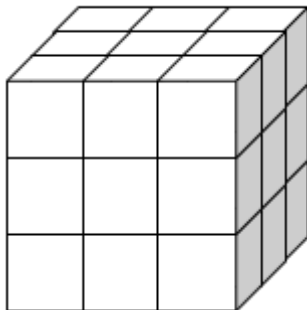


Egy kockának 6 négyzet lapja van, felszínét pedig úgy kapjuk meg, hogy a 6 lap területét összeadjuk

Mivel minden lapja ugyanakkora, ezért elegendő 1 lap területét kiszámolni

**Kocka felszíne:**  $A = T + T + T + T + T + T = 6 \cdot T = 6 \cdot a \cdot a$

## Felszín kiskockákkal



A testeket kirakhatjuk kiskockákból vagy téglatestekből is (leggyakrabban kiskockából szoktuk kirakni)

Az ábrán látható nagy kocka  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  kiskockából van kirakva

Fontos, hogy ilyenkor a felszínét nem úgy számoljuk ki, hogy kiszámoljuk 1 kiskocka felszínét, és azt szorozzuk meg a kiskockák számával

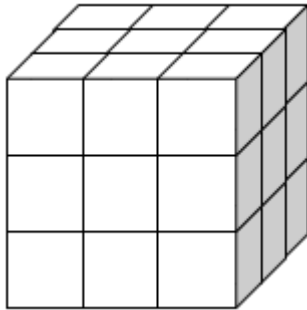
Azért nem így fogunk számolni, mert azokat a lapokat nem számolhatjuk a felszínbe, amik egy másik kiskockához csatlakoznak (amikkel össze vannak ragasztva), ez a módszer csak térfogatnál fog működni

Lépések a felszín kiszámításához:

- Meghatározzuk 1 kiskocka 1 lapjának a területét ( $T_{kis} = a \cdot a$ )
- Meghatározzuk, hogy a nagy kocka 1 lapja hány kiskockányi lapból áll (Ábrán: 9)
- A kiskocka 1 lapjának területét megszorozzuk a lapok számával, így megkapjuk a nagy kocka 1 lapjának területét (Ábrán:  $T_{nagy} = 9 \cdot T_{kis}$ )

Ezt beszorozzuk 6-tal (6 ugyanolyan lapja van a nagykockának):  $A = 6 \cdot T_{nagy}$

## Felszín változása kiskockák elvétele/hozzáadása esetén



Ha a nagyobb testből kiskockákat veszünk el, akkor a felszín **csökkenhet**, **nőhet**, de olyan is van, hogy **nem változik**

Ez attól fog függni, hogy honnan vesszük el a kiskockákat

3 helyről tudunk kiskockákat elvenni:

- Vethetünk el kiskockát a nagy kocka sarkáról (csúcsáról)
- Vethetünk el kiskockát a nagy kocka egy lapjának közepéről
- Vethetünk el kiskockát a nagy kocka egy élének közepéről

Felszín változása ezekben az esetekben:

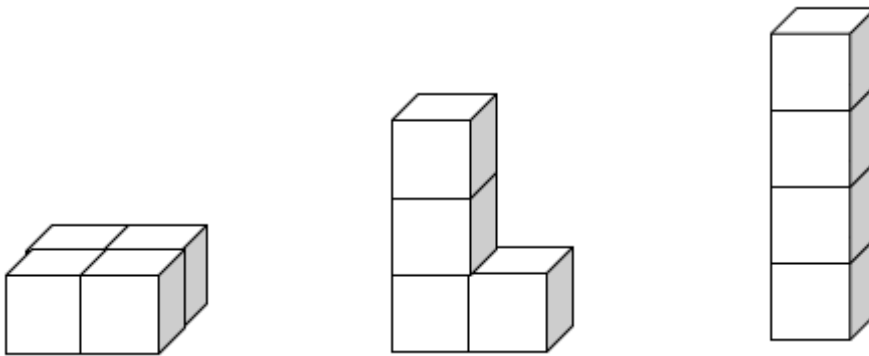
- Ha a nagy kocka sarkáról vesszük el kiskockát, akkor a felszín **nem fog megváltozni**, ugyanis 3 lap el fog tűnni, de 3 pluszba meg fog jelenni (azok a lapok, amik eddig az elvett kocka lapjaihoz csatlakoztak)
- Ha a nagy kocka lapjának közepéről vesszük el 1 kiskockát, akkor a felszín meg fog nőni, ugyanis 1 lap fog eltűnni, viszont 5 lap meg fog jelenni pluszba (azok a lapok, amik eddig az elvett kocka lapjaihoz csatlakoztak), így a test felszíne **4 kiskockányi lappal fog megnőni**
- Ha a nagy kocka élének közepéről vesszük el 1 kiskockát, akkor a felszín meg fog nőni, ugyanis 2 lap fog eltűnni, viszont 4 lap meg fog jelenni pluszba (azok a lapok,

amik eddig az elvett kocka lapjaihoz csatlakoztak), így a test felszíne 2 kiskockányi lappal fog megnőni

Akkor csökken a felszín, ha például elveszünk több kiskockát is (pl. az első lapot teljesen)

Ha kiskockákat adunk hozzá, akkor általában növekedni fog a felszín, de van olyan eset is, hogy csökken

## Felszín kiszámításának módjai



Ha kiskockából nem egy nagyobb kockát, hanem másmilyen testet csináltunk, akkor többféle módon is kiszámolhatjuk a test felszínét

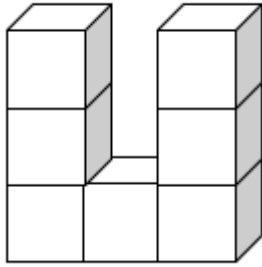
Fontos, hogy ebben az esetben nem mindegy a kockák elhelyezkedése egymáshoz képest

Bármilyen módszerrel is számoljuk ki felszínét, első lépésként meg kell határoznunk 1 kiskocka 1 lapjának a területét

Módszerek:

- Megszámoljuk kiskockánként a lapok számát, ezeket összeadjuk, és megszorozzuk 1 lap területével
- Kiszámoljuk 1 kiskocka felszínét, beszorozzuk a kiskockák számával, és ebből kivonjuk az "összeragasztott" lapok területét (itt figyelni kell, hogy duplán számoljuk az összeragasztott lapokat)
- Ha a kiskockákból egy szabályos testet kapunk, akkor a testnek meghatározzuk az oldalait, és úgy számoljuk ki a felszínét

## Felszín kiszámítása trükk



Ha nagyon bonyolult a kirakott test (6-7-8-9 kiskockából van kirakva), akkor alkalmazhatunk egy trükköt (ha kevesebb kiskockából van kirakva, akkor is alkalmazható)

**A trükk:** Ugyanazt látjuk előlről, mint hátulról, ugyanazt látjuk jobbról, mint balról, ugyanazt látjuk felülről, mint alulról

Vagyis, ha ránézünk előlről ( $\nearrow$ ), jobbról ( $\leftarrow$ ) és felülről ( $\downarrow$ ), kiszámoljuk ezekből a nézetekből a lapok területét (vagy a lapok számát), akkor ezt csak meg kell szoroznunk 2-vel

$$A = 2 \cdot (T_{elöl} + T_{oldal} + T_{felül})$$

Nem jelent gondot, ha a kockák el vannak csúsztatva egymáshoz képest (ami elől bemegy, hátul kijön)

Ha ezzel a módszerrel számolunk, akkor nagyon kell figyelni, amikor  $U$  alakú alakzattal találkozunk (vagy olyannal, aminek vannak "belső" lapjai is)

Ilyenkor az összefüggés kiegészül:

$$A = 2 \cdot (T_{elöl} + T_{oldal} + T_{felül}) + T_{rejtett}$$

# Térfogat

Testek esetén tudunk térfogatot számolni

Testek térfogatát különböző módon lehet kiszámolni a különböző testek esetén

Téglatest típusú testeknél (Téglatest, Négyzetes hasáb, Kocka) kiszámoljuk az alaplap területét, és ezt szorozzuk meg a magassággal

Az alaplap négyzet vagy téglalap szokott lenni

Téglalap területét úgy számoljuk ki, hogy a szélességét és a magasságát összeszorozzuk egymással

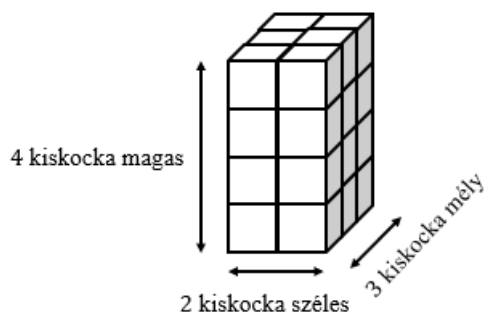
Négyzetnek is ugyanígy számoljuk ki a területét, csak négyzet esetén a szélesség és a magasság megegyezik egymással

Arra figyeljük, hogy ha nem azonos mértékegységben vannak megadva az oldalak, akkor végezzük el az átváltást

A térfogat mértékegysége az oldalak mértékegységének köbe lesz ( $cm^3$ ,  $dm^3$ ,  $m^3$ ...)

**Térfogat jele:**  $V$  (Volumen latin (angol) szó miatt)

## Téglatest térfogata



Kiskockákból kirakott téglatest térfogatát (hány kiskockából áll) úgy számoljuk ki, hogy megszámloljuk az egy szinten lévő kiskockák számát, és beszorozzuk a szintek számával (minden szinten ugyanannyi van)

Alsó szint:  $2 \cdot 3 = 6$  kiskocka

Szintek száma: 4

**Kiskockák száma (térfogat):  $4 \cdot 6 = 24$  kiskocka**

Ezt úgy is megkaphatjuk, ha összeszorozzuk a szélességet, a mélységet és a magasságot:

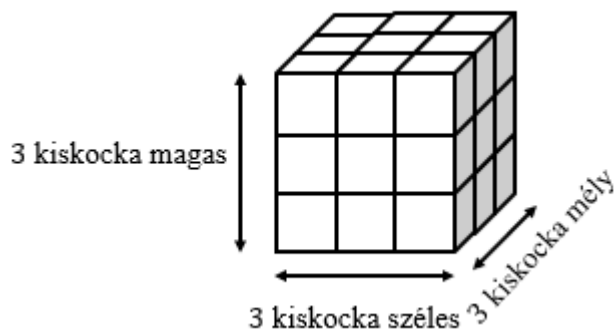
$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$

Ezzel a módszerrel fogjuk kiszámolni a téglatest térfogatát is

Téglatest térfogatának képlete szövegesen:  $V = \text{Szélesség} \cdot \text{Mélység} \cdot \text{Magasság}$

**Téglatest térfogata:  $V = a \cdot b \cdot c$**

## Kocka térfogata



Kiskockákból kirakott kocka térfogatát (hány kiskockából áll) ugyanúgy számoljuk ki, mint a téglatest esetében, vagyis megszámloljuk az egy szinten lévő kiskockák számát, és beszorozzuk a szintek számával (minden szinten ugyanannyi van)

Alsó szint:  $3 \cdot 3 = 9$  kiskocka

Szintek száma: 3

**Kiskockák száma (térfogat):  $3 \cdot 9 = 27$  kiskocka**

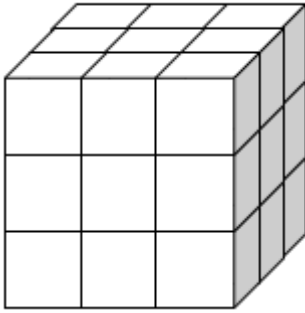
Ezt úgy is megkaphatjuk, ha összeszorozzuk a szélességet, a mélységet és a magasságot:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27$$

Ezzel a módszerrel fogjuk kiszámolni a kocka térfogatát is, kocka esetén a szélesség, a mélység és a magasság megegyeznek egymással, tehát a kocka élhosszát fogjuk összeszorozni önmagával 3-szor

**Kocka térfogata:  $V = a \cdot a \cdot a$**

## Térfogat kiskockákkal



A testeket kirakhatjuk kiskockákból, vagy téglatestekből is (leggyakrabban kiskockából szoktuk kirakni)

Az ábrán látható nagy kocka  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  kiskockából van kirakva

Térfogat esetén sokkal könnyebb dolgunk lesz, mint felszín esetén

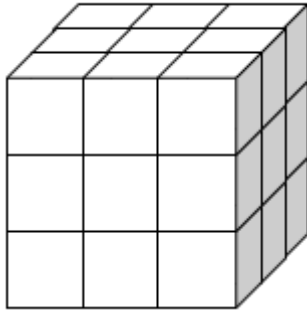
Térfogat esetén kiszámoljuk egy kiskocka térfogatát, és szorozzuk a kiskockák számával

A nagy kocka (vagy test) térfogata nem függ a kiskockák elrendezésétől

Térfogat meghatározásának lépései:

- Meghatározzuk 1 kiskocka térfogatát ( $V_{kis} = a \cdot a \cdot a$ )
- Megszámoljuk a kiskockák számát ( $n$ )
- Egy kiskocka térfogatát beszorozzuk a kiskockák számával:  $V_{nagy} = n \cdot V_{kis}$

## Térfogat változása kiskockák elvétele/hozzáadása esetén



Térfogat esetén egyszerű lesz a helyzet, amikor a nagy testből kiskockákat veszünk el, vagy adunk hozzá:

- Amennyi kiskockát elvettünk, annyi kiskockányi térfogattal **csökken** a test térfogata
- Amennyi kiskockát hozzáadtunk, annyi kiskockányi térfogattal **növekszik** a test térfogata

Mindegy, hogy melyik helyről vesszük el a kiskockákat

Ha a sarkáról vesszük el, vagy a lap közepéről, vagy az él közepéről, akkor is 1 kiskockányi térfogattal csökken a test térfogata

# Diagramok

Az adatokat meg lehet adni táblázatos formában, valamint diagram segítségével is

Miért alkalmazunk diagramokat?

- Azért, hogy átláthatóbb legyen, ne a táblázatban kelljen keresgélni a legkisebb/legnagyobb értéket, hanem ránézésre meg tudjuk mondani
- Nyomon tudjuk követni a változásokat (hőmérséklet esetén látjuk, hogy melyik nap nőtt, illetve melyik nap csökkent a hőmérséklet)

Milyen diagramokkal találkozhatunk?

- Oszlopdigram (leggyakoribb)
- Vonaldiagram
- Pontdiagram
- Kördiagram
- Egyéb diagramok, kombinált diagramok

Diagramok esetén nagyon fontos a feliratozás, ha csinálunk egy diagramot mindig figyeljünk rá, hogy ezek meglegyenek:

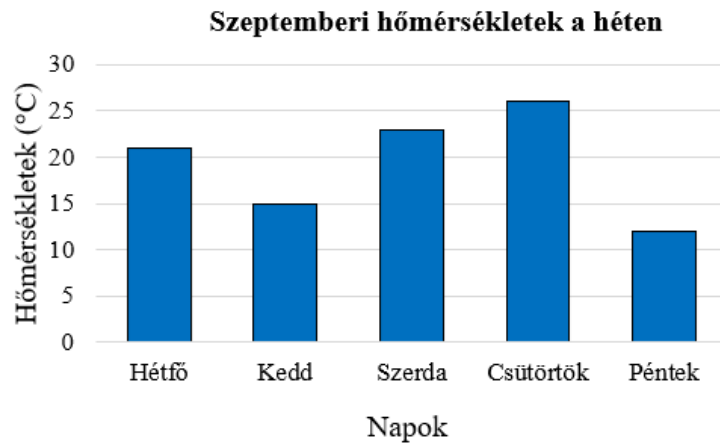
- Diagram cím (opcionális)
- Tengely feliratok (ha van értelme)
- Tengely feliratok mértékegysége (ha van)
- Jelmagyarázat (ha szükséges)

Az osztást mindig megfelelően válasszuk meg, nézzük meg a legnagyobb és legkisebb adatot, amit ábrázolnunk kell

Az osztások lehetnek 1-esével, 2-esével, 5-ösével, 10-esével, 20-asával, 50-esével, 100-asával ...

Az osztásoknak nem muszáj mindig 0-ról indulnia, indulhat egy bizonyos értéktől is (pl.: Magasság)

# Oszlopdiaagram



Oszlopdiaagram esetén van egy vízszintes és egy függőleges tengely

A vízszintes tengelyen lehetnek: Számok (Jegyek), Idő (Napok, hónapok, évek, dátumok), Nevek (5 barát neve)

A tengelyekhez mindig írunk megnevezést és mértékegységet (vagy csak mértékegységet)

A függőleges tengelyen számok szoktak lenni, legtöbbször darabszám, de lehet más is (Magasság, testsúly, pénz, hőmérséklet...)

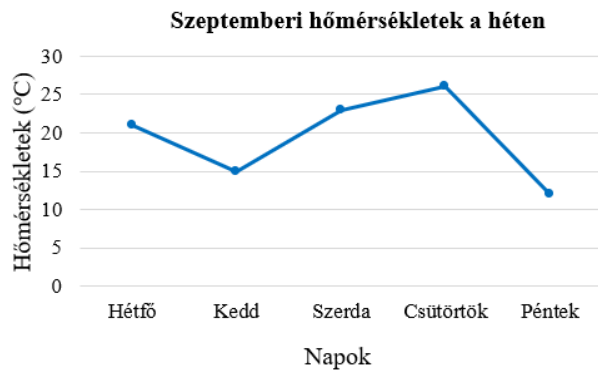
A tengelyeket fel lehet cserélni egymással, ezt akkor szoktuk megtenni, ha nagyobb és kisebb adatok is vannak, és a sima oszlopdiaagramon nem férne ki rendesen (Fektetett oszlopdiaagram)

Az oszlopok között ki szoktunk hagyni egy kis helyet (Ha nem hagyjuk ki, akkor hisztogramnak nevezzük, ami ugyanolyan, mint az oszlopdiaagram, csak más a neve)

Oszlopdiaagramon ábrázolhatunk több dolgot is egyszerre (pl.: több osztály, fiúk és lányok), ilyenkor fontos, hogy legyen jelmagyarázat is a diagram mellett, valamint egyértelmű legyen az oszlopok színezése/mintázata

Az oszlop színezése ilyenkor lehet: fehér, szürke, fekete, színes, pöttyös, sraffozott (csíkos)

# Vonaldiagram



Az oszlopdiagramhoz hasonló a felépítése (Tengelyek, adatok elrendezése)

Vonaldiagram esetén is van egy vízszintes és egy függőleges tengely

A vízszintes tengelyen általában idő (Napok, hónapok, évek, dátumok) szerepel

A tengelyekhez mindig írunk megnevezést és mértékegységet (vagy csak mértékegységet)

A függőleges tengelyen olyan mennyiségek szerepelnek, amik nem csak egész számok lehetnek (Hőmérséklet, sebesség, megtett út)

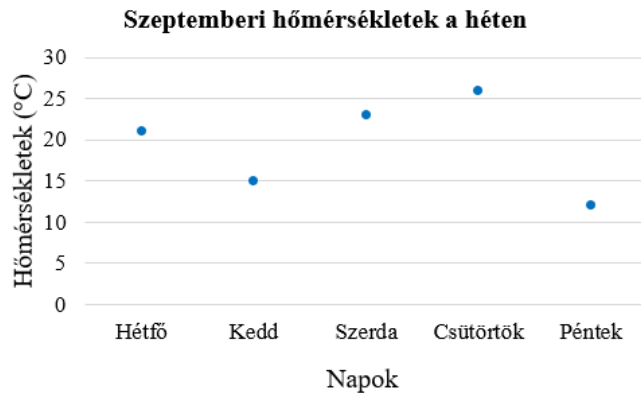
A tengelyeket **nem** lehet felcserélni egymással

Vonaldiagramon ábrázolhatunk több dolgot is egyszerre, ilyenkor fontos, hogy legyen jelmagyarázat is a diagram mellett, valamint egyértelmű legyen a vonalak színezése

A vonalakat ilyenkor különböző színekkel szoktuk jelölni: Piros, kék, zöld, sárga ...

Jelölhetjük őket folytonos, szaggatott, pontozott vonalakkal is

# Pontdiagram



A vonaldiagram megadható pontdiagramként, de az nem lesz annyira látványos

Pontdiagram esetén a pontok (pl.: Hőmérsékletnél a mérési pontok) nincsenek összekötve úgy, mint vonaldiagram esetén

Az oszlopdiagramhoz és vonaldiagramhoz hasonló a felépítése (Tengelyek, adatok elrendezése)

Pontdiagram esetén is van egy vízszintes és egy függőleges tengely

A vízszintes tengelyen általában idő (Napok, hónapok, évek, dátumok) szerepel

Tengelyekhez mindig írunk megnevezést és mértékegységet (vagy csak mértékegységet)

A függőleges tengelyen olyan mennyiségek szerepelnek, amik nem csak egész számok lehetnek (Hőmérséklet, sebesség, megtett út)

A tengelyeket **nem** lehet cserélni egymással

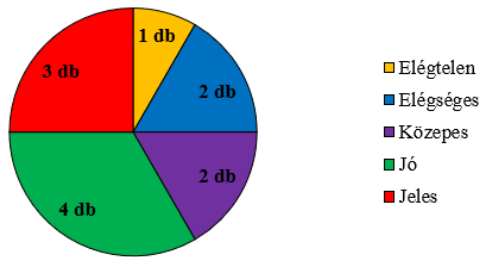
Pontdiagramon ábrázolhatunk több dolgot is egyszerre, ilyenkor fontos, hogy legyen jelmagyarázat is a diagram mellett, valamint egyértelmű legyen a magyarázat

A pontokat ilyenkor különböző színekkel szoktuk jelölni: Piros, kék, zöld...

Jelölhetjük őket különböző formával is: Teli pont, belül üres pont,  $x$ , négyzet

## Kördiagram (tortadiagram)

Matematika dolgozat eredményei



A kördiagram teljesen más, mint a korábbi diagramok (nincsenek tengelyek)

Ugyanolyan típusú adatokat ábrázolhatunk kördiagramon, mint oszlopdiagramon (pl.: Jegyek)

Kördiagramon nem az adatok nagyságát, hanem az adatok egymáshoz képesti arányát szemléltethetjük

A kördiagramon ábrázolt adatokat megadhatjuk % segítségével, vagy a szeletek középponti szögével, vagy osztások segítségével is:

- A teljes kör 100%-nak felel meg
- A teljes kör  $360^\circ$ -nak felel meg
- A teljes kört feloszthatjuk 4, 5, 6, 7, 8... részre, ez mindig az adatok nagyságától fog függni

Ha két adat azonos értékű, akkor ugyanakkorák lesznek a tortaszeleteik is

Kördiagramon egyszerre csak egy dolgot ábrázolhatunk (Ha osztályokról van szó, akkor egyszerre vagy csak az egyik osztályt ábrázolhatjuk, vagy a teljes évfolyamot)

A körszeleteket különböző színekkel szoktuk jelölni: Piros, kék, zöld, sárga ...

# Átlag

Mire jó?

- Tudni fogjuk segítségével az év végi jegyünket, vagy ki tudjuk számolni, hogy hány 5-öst kell még kapni az év végi jobb jegy eléréséhez
- Sporteseményeknél tudni fogjuk hány gólra/pontra számíthatunk

Példák átlagra:

- Jegyek
- Hőmérséklet
- Magasság, kor
- Pénz
- Sportesemények (Gólok száma, gólpaszok száma, pontok száma (kosárlabda), lepattanók száma)
- Sport (szeretnénk lefutni/leúszni/letekerni valamennyi távolságot, ki tudjuk számolni, hogy naponta/hetente mennyit kell megtennünk)
- Könyvolvasás
- Sorozatnézés

Hogy fogunk átlagot számolni?

- Az adatok összegét elosztjuk az adatok számával
- **Átlag=Adatok összege:Adatok száma**
- Először összeadjuk az adatokat, utána megszámoljuk, hogy hány adat volt, és a kettőt elosztjuk egymással

## Átlag trükk

Milyen számok közé esik az átlag? Hogy tudjuk magunkat ellenőrizni?

- Az átlag mindig a legkisebb és a legnagyobb adat közé fog esni, sosem lehet kisebb a legkisebb adattól és sosem lehet nagyobb a legnagyobb adattól
- Ha csak 2-es, 3-as, 4-es jegyeket kaptunk, akkor az átlagunk nem lehet sem 2-esnél kisebb, sem 4-esnél nagyobb
- Ezt az ellenőrzést minden átlagszámítás után el kell végezni (ránézésre)

Hogy tudjuk még magunkat ellenőrizni?

- Az átlag általában a legkisebb és a legnagyobb szám között nagyjából félúton lesz, de ez nem mindig van így
- Akkor lesz a legkisebb és a legnagyobb adat között nagyjából félúton, ha az adatok egyenletesek (nagyjából ugyanolyan távolságra vannak egymástól) és nincsenek nagyon kiugró értékek

## Átlag típusai

Kétféle átlag típust különböztetünk meg:

- **Hagyományos átlag:** Az adatok fel vannak sorolva, azokat kell összeadni és elosztani az adatok számával
- **”Osztályzat típusú” átlag:** Amikor meg van adva, hogy melyik osztályzattól mennyi született, és az átlagot kell kiszámolnunk (osztályzat helyett lehet magasság vagy testsúly is, amik darabszámokkal vannak megadva)

”Osztályzat típusú” átlag esetén az adatok típusai is számok lesznek (Hagyományos átlag esetén nevek szoktak lenni, vagy napok, vagy más időszakok)

”Osztályzat típusú” átlag **adatainak összege:** Úgy számoljuk ki, hogy az adatokat (osztályzatok) összeszorozzuk az adatok számával (osztályzatok számával), és ezeket összeadjuk

”Osztályzat típusú” átlag **adatainak száma:** A darabszámok összege

Ha ezek megvannak, akkor ugyanúgy elosztjuk egymással a 2-t