Számok csoportosítása

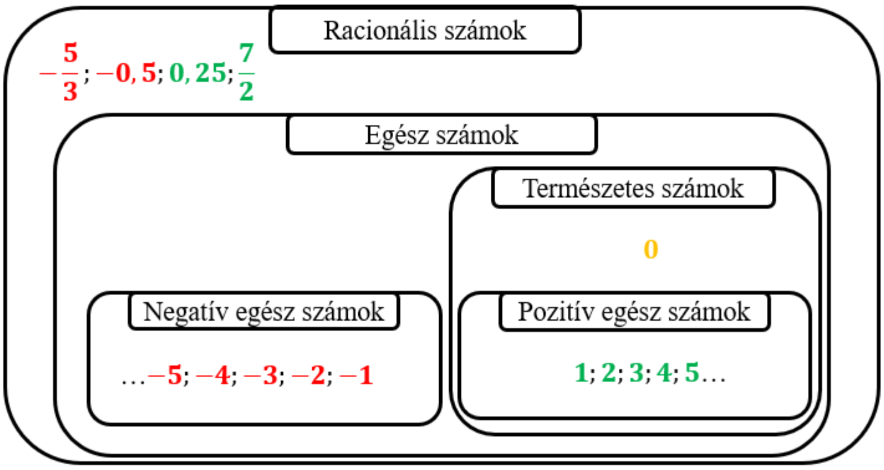
Egész számok ($\mathbb{Z}$): $\ldots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\ldots$

Pozitív egész számok ($\mathbb{Z}^+$): $1; 2; 3; 4; 5\ldots$

Negatív egész számok ($\mathbb{Z}^-$): $\ldots -5; -4; -3; -2; -1$

Természetes számok ($\mathbb{N}$): A pozitív egész számok és a 0 Felsorolva: $0; 1; 2; 3\ldots$

Racionális számok ($\mathbb{Q}$): Azok a számok, amik felírhatóak két egész szám hányadosaként, magyarán az összes egész szám a törtekkel és tizedes törtekkel kiegészülve Felsorolva: $\ldots -3; -\frac{5}{3}; -1; -0,5; 0; 0,25; 2; \frac{7}{2}; 5\ldots$



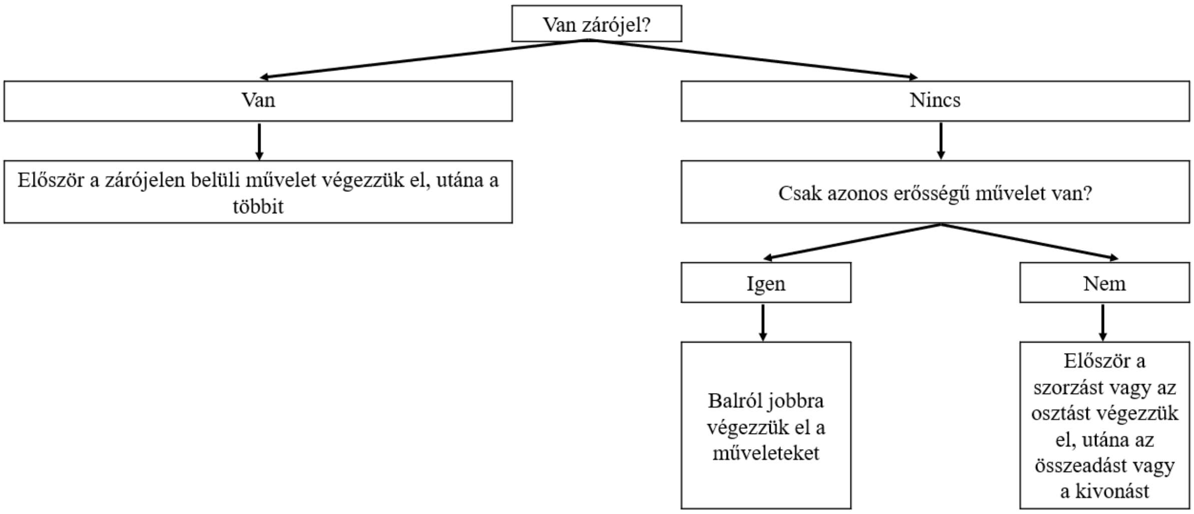
Műveletek sorrendje

1) Zárójelben lévő műveletek
2) Szorzás, osztás
3) Összeadás, kivonás

- Mindig balról jobbra haladva végezzük el a műveleteket!
- Figyelembe véve azt is, hogy melyiknek van „elsőbbsége”.
- A zárójel, ha van, mindig elsőbbséget élvez.
- Ezen túl meg a szorzás és osztás élvez elsőbbséget
- És legvégül az összeadásokat és kivonásokat végezzük el.

$(\ldots)$ $\quad \cdot$ *és* $: \quad +$ *és* $-$

Műveltek sorrendje folyamatábra



Törtek

Törtek segítségével megadhatjuk, egy szám, síkidom, test, valahányadrészét

Törtek elképzeléséhez legkönnyebb a pizzára vagy tortára gondolni (attól függően ki mennyire édesszájú)

Törteket meg lehet adni szövegesen, és meg lehet adni őket számokkal is

Ahány egyenlő részre osztjuk annyiad rész lesz

Ha a tortát (pizzát) 4 egyenlő részre osztjuk, akkor 1 szelet a torta (pizza) negyed része lesz

Ha 4 egyenlő szeletre vágott tortából (pizzából) 3 szeletet kapunk meg, akkor a torta (pizza) **3** **negyed** részét kaptuk meg

Törtek bővítése

Miért bővítjük a törteket?

- Össze tudunk hasonlítani két törtet bővítés segítségével
- Törtek összeadását, kivonását tudjuk elvégezni bővítés segítségével
- Tizedes tört alakra tudjuk átírni a törteket bővítés segítségével

Hogyan fogunk bővíteni?

- A számlálót és a nevezőt is ugyanazzal az egész számmal fogjuk megszorozni
- Fontos, hogy a számláló és a nevező is meg legyen szorozva a számmal, ne csak az egyik
- Fontos, hogy a számláló és a nevező is ugyanazzal az egész számmal legyen megszorozva

Törtek egyszerűsítése

Miért egyszerűsítjük a törteket?

- Össze tudunk hasonlítani két törtet egyszerűsítés segítségével
- Törtek összeadását, kivonását tudjuk elvégezni egyszerűsítés segítségével
- Törtek szorzását, osztását tudjuk könnyebben elvégezni egyszerűsítés segítségével
- Tizedes tört alakra tudjuk átírni a törteket egyszerűsítés segítségével
- Kisebb számokkal kell dolgoznunk a számolások során (könnyebb elvégezni a számolásokat egyszerűsítés után)
- Szebb alakra tudjuk hozni a végeredményt

Hogyan fogunk egyszerűsíteni?

- A számlálót és a nevezőt is ugyanazzal az egész számmal fogjuk elosztani
- Fontos, hogy a számláló és a nevező is el legyen osztva a számmal, ne csak az egyik
- Fontos, hogy a számláló és a nevező is ugyanazzal az egész számmal legyen elosztva

Bővíteni mindig tudunk, egyszerűsíteni viszont nem mindig

Akkor tudunk egyszerűsíteni, ha a tört számlálója és nevezője is osztható ugyanazzal a számmal

Mindig igyekszünk a lehető legnagyobb számmal egyszerűsíteni

Egy törtet lehet többször is egyszerűsíteni

Egyszerűsítés ”jelölése”: Áthúzzuk a számlálót és a nevezőt is és az egyszerűsített számokat írjuk a tört fölé és alá

Törtek és az osztás művelet

A törtek osztás műveletet jelentenek

Ennek a tizedes törteknél lesz jelentősége

A törtet át tudjuk írni egy osztás műveletre, de az osztás műveletet is át tudjuk írni egy törtté:

- Az osztandó lesz a számláló
- Az osztó lesz a nevező

Tört esetén, ha a számláló osztható a nevezővel (a nevező osztója a számlálónak), akkor egész számot kapunk eredményül

Törtek típusai nagyság szerint

Az, hogy a tört 1-nél kisebb lesz, 1-gyel egyenlő lesz, vagy 1-nél nagyobb lesz, mindig attól függ, hogy a számláló és a nevező közül melyik a nagyobb

- 1-nél kisebb törtek: Számláló<Nevező
- 1-gyel egyenlő törtek: Számláló=Nevező
- 1-nél nagyobb törtek: Számláló>Nevező

Törtek vegyes alakja

1-nél nagyobb törteket átírhatunk vegyes tört alakba/vegyes tört alakban adhatjuk meg

A vegyes tört alak egy **egész számból** és egy **tört számból** áll, amiket egymás mellé írunk le

1-nél nagyobb törtek átírhatók vegyes tört alakba, de a vegyes tört alak is visszaírható tört alakba (oda-vissza működik)

Az egész szám és a törtrész között összeadásjel van, amit nem írunk ki

Hogy írjuk át a vegyes tört alakban lévő törtet sima (közönséges) tört alakra?

- Átírjuk az egész részt ugyanolyan nevezőjű törtként, mint a törtrész, majd összeadjuk őket

Hogy írjuk át a sima (közönséges) tört alakban lévő törtet vegyes tört alakra?

- A tört egy osztás műveletnek felel meg
- Megnézzük, hogy a számlálóban hányszor van meg a nevező, ez lesz egész rész, a maradék lesz a törtrész számlálójában

Törtek összeadása és kivonása

Törteket akkor tudunk összeadni egymással és kivonni őket egymásból, ha a két törtnek közös a nevezője (ugyanannyi szeletre vannak vágva a pizzák)

Ilyenkor csak össze kell adni a számlálókat (összeadásnál), valamint ki kell vonni egymásból őket (kivonásnál)

Mi van, ha nem ugyanaz a két tört nevezője?

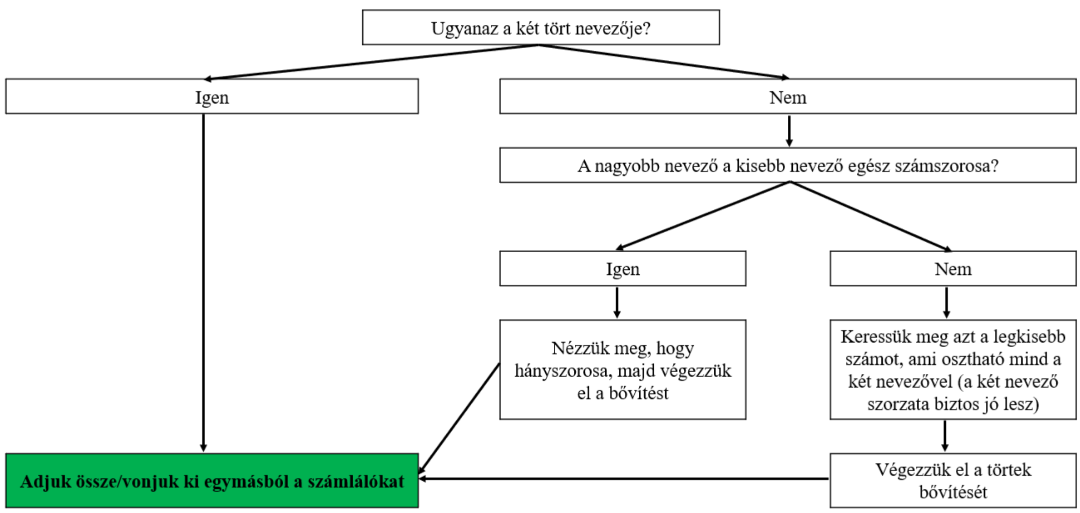
- Ilyenkor közös nevezőre kell hoznunk a két törtet

Hogy hozzuk közös nevezőre a törteket?

- Vagy egyik vagy mind a két törtet bővíteni fogjuk
- Ha az egyik nevező a másik nevező egész számszorosa, akkor a kisebb nevezőt fogjuk bővíteni a nagyobb nevezőre
- Ha a nevezők nem egymás egész számszorosai, akkor közös nevezőre hozzuk őket (mind a két törtet bővíteni fogjuk)
- Ilyenkor két dolgot tehetünk:
- Az egyik, hogy összeszorozzuk a nevezőket, és az lesz az új közös nevező (ez mindig működni fog, viszont van, hogy nagy számokkal kell dolgoznunk)
- A másik, hogy keresünk egy olyan számot, ami osztható az egyik és osztható a másik nevezővel is (van, hogy ez a szám a két szám szorzata lesz (előző eset), de van, hogy lesz kisebb szám is, ez azért előnyösebb, mint az összeszorzás, mert így nem kell nagy számokkal számolnunk)

A végén, ha tudunk, egyszerűsítünk (nem kötelező)

Törtek összeadásának és kivonásának lépései



Törtek összeadása és kivonása Pillangó módszer segítségével

Pillangó módszert akkor alkalmazzuk, ha a két tört nevezője különböző

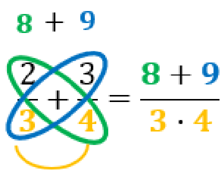
Először összeszorozzuk a nevezőket, ez lesz a végeredmény nevezője

Ezután keresztbe szorozzuk az egyik tört számlálóját a másik tört nevezőjével, majd a másik tört számlálóját az egyik tört nevezőjével

A kapott eredményt a törtek fölé írjuk

Végül elvégezzük a kapott szorzatok összeadását/kivonását attól függően, hogy a két tört között összeadás jel vagy kivonás jel szerepelt

Ez a módszer csak kis számok (egyjegyű számok) esetén alkalmazható!!!



Törtek és egész számok összeadása és kivonása

Törtet és egész számot úgy adunk össze, vagy úgy vonjuk ki egymásból őket, hogy az egész számot felírjuk olyan nevezőjű törtként, mint a tört nevezője

Vegyes törtek összeadása és kivonása

Vegyes törtek összeadását kétféleképpen végezhetjük el:

- Összeadjuk az egészrészeket, és összeadjuk a törtrészeket, ha a törtrészek összegéből 1-nél nagyobb tört jön ki, akkor azt hozzáadjuk az egészrészhez
- Átírjuk mind a két vegyes törtet közönséges tört alakra, és úgy végezzük el az összeadást

Vegyes törtek kivonását is kétféleképpen végezhetjük el:

- Kivonjuk egymásból az egészrészeket és kivonjuk egymásból a törtrészeket, ez a módszer akkor előnyös, ha a törtrészek különbsége pozitív lesz (a kisebbítendő tört nagyobb, mint a kivonandó tört)
- Átírjuk mind a két vegyes törtet közönséges tört alakra, és úgy végezzük el a kivonást (ez mindig használható)

Vegyes tört és közönséges tört összeadása/kivonása során vagy összeadjuk a törtrészeket, vagy a vegyes törtet írjuk át közönséges tört alakra, és úgy végezzük el a műveleteket

Törtek szorzása egész számmal

Törteket úgy tudunk szorozni egész számmal, hogy a tört számlálóját megszorozzuk a számmal (ez a módszer mindig működni fog)

Ennél a módszernél ugyanúgy, mint összeadás vagy kivonás esetén, a végén, ha tudunk, akkor egyszerűsítünk

A szorzást úgy is elvégezhetjük, hogy az egész számot és a tört nevezőjét egyszerűsítjük egymással (ez csak akkor alkalmazható, ha az egész számnak és a tört nevezőjének van közös osztója)

Ennél a módszernél az eredményt a lehető legegyszerűbb alakban fogjuk megkapni, így a végén nem kell egyszerűsítenünk (mert közben elvégeztük)

Vegyes törtek szorzása egész számmal

Vegyes törteket úgy tudunk szorozni egész számmal, hogy szorozzuk az egész részt is az egész számmal, valamint a tört részt is, ha a tört részre, 1-nél nagyobb tört jön ki, akkor azt hozzáadjuk az egész részhez

Úgy is elvégezhetjük a szorzást, hogy a vegyes törtet átírjuk közönséges tört alakra, onnantól pedig ugyanúgy végezzük el a szorzást, mint tört és egész szám szorzása esetén

Törtek osztása egész számmal

Törteket úgy tudunk osztani egész számmal, hogy a tört **<u>nevezőjét</u>** megszorozzuk a számmal (ez a módszer mindig működni fog)

Ennél a módszernél ugyanúgy, mint összeadás vagy kivonás esetén, a végén, ha tudunk, akkor egyszerűsítünk

Az osztást úgy is elvégezhetjük, hogy a tört számlálóját és az egész számot elosztjuk/egyszerűsítjük egymással (ez csak akkor alkalmazható, ha a tört számlálójának és az egész számnak van közös osztója)

Ennél a módszernél az eredményt a lehető legegyszerűbb alakban fogjuk megkapni, így a végén nem kell egyszerűsítenünk (mert közben elvégeztük)

Vegyes törtek osztása egész számmal

Vegyes törteket úgy tudunk osztani egész számmal, hogy a vegyes törtet átírjuk közönséges tört alakra, onnantól pedig ugyanúgy végezzük el az osztást, mint tört és egész szám osztása esetén

Amennyiben a vegyes tört egészrésze és az egész szám oszthatóak egymással, azokat elosztjuk egymással, majd a törtrészt is elosztjuk az egész számmal (ez az eset elég ritka)

Törtek szorzásának és osztásának összehasonlítása

Szorzás:

A tört **számlálóját** és az egész számot **szorozzuk** egymással:

$$5 \cdot \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{15}{4}}$$

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \mathbf{\frac{6}{7}}$$

A tört **nevezőjét** és az egész számot **egyszerűsítjük** egymással:

$$\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \mathbf{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{7}{\cancel{8}} \cdot \cancel{8} = \mathbf{7}$$

Osztás:

A tört **nevezőjét** és az egész számot **szorozzuk** egymással:

$$\frac{5}{4} : 2 = \mathbf{\frac{5}{8}}$$

$$\frac{7}{9} : 3 = \mathbf{\frac{7}{27}}$$

A tört **számlálóját** és az egész számot **egyszerűsítjük** egymással:

$$\frac{6}{7} : 3 = \mathbf{\frac{2}{7}}$$

$$\frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{9} : \overset{2}{\cancel{4}} = \frac{5}{9} : 2 = \mathbf{\frac{5}{18}}$$

Tört szorzása törttel

Törtet úgy tudunk szorozni törttel, hogy a **számlálót** a **számlálóval**, a **nevezőt** a **nevezővel** szorozzuk

Szorzás esetén **nem kell közös nevezőre hozni** a két törtet, mint összeadásnál vagy kivonásnál

Ennél a módszernél a végén, ha tudunk, akkor egyszerűsítünk

A szorzás elvégzése előtt is egyszerűsíthetünk:

- Egyszerűsíthetjük a törteket külön-külön is (ha tudjuk)
- A számlálót és a nevezőt keresztbe tudjuk egyszerűsíteni (az egyik tört **számlálóját** a másik tört **nevezőjével**)
- Ha tudunk a törtön belül, valamint keresztbe is egyszerűsíteni, akkor mindegy a sorrend

Érdemes mindig elvégezni az egyszerűsítést, mert így kisebb számokkal kell dolgoznunk, és a végén a lehető legegyszerűbb alakban kapjuk meg az eredményt

Vegyes tört szorzása törttel vagy vegyes törttel

Vegyes törtet úgy tudunk szorozni törttel, hogy átírjuk közönséges tört alakra, majd elvégezzük a szorzást (**számlálót** a **számlálóval**, **nevezőt** a **nevezővel** szorozzuk, és ha tudunk, akkor a törteken belül vagy keresztbe egyszerűsítünk)

Vegyes törtet úgy tudunk szorozni vegyes törttel, hogy átírjuk mind a két vegyes törtet közönséges tört alakra, majd elvégezzük a szorzást (**számlálót** a **számlálóval**, **nevezőt** a **nevezővel** szorozzuk, és ha tudunk, akkor a törteken belül vagy keresztbe egyszerűsítünk)

Törtek reciproka

Egy tört reciprokát úgy kapjuk meg, hogy megcseréljük egymással a tört **számlálóját** és **nevezőjét**

Mire lesz jó, mikor fogjuk használni?

- Akkor, amikor törttel osztunk

Mi a helyzet egész számokkal?

- Egész számok felírhatóak eggyedekként, úgy már tudjuk venni a reciprokukat

1-nek a reciproka 1, ez az egyetlen pozitív szám, aminek a reciproka önmaga lesz

Negatív törtek, negatív számok esetén ugyanazt csináljuk, mint pozitív törtek és számok esetén, csak rakunk eléjük egy mínusz előjelet

A 0-nak nincs reciproka

Tört és reciprokának szorzata mindig 1 (a számlálót és a nevezőt is teljesen le tudjuk egyszerűsíteni keresztbe)

Ha a tört **számlálójában** 1 van, akkor a tört reciproka egész szám lesz

Törtek osztása törtekkel

Törtet úgy tudunk osztani törttel, hogy az osztó tört (osztásjel utáni tört) reciprokával szorzunk

Az első törttel (osztandó) nem csinálunk semmit, a második törtnek vesszük a reciprokát (megcseréljük a számlálót és a nevezőt), az osztás jelet pedig szorzásjelre cseréljük

Ha ezekkel a lépésekkel megvagyunk, akkor visszavezettük a példát két tört szorzására, innentől ugyanazt csináljuk, mint törtek szorzása esetén:

- A **számlálót** a **számlálóval**, a **nevezőt** a **nevezővel** szorozzuk

- Egyszerűsíthetjük a törteket külön-külön is (ha tudjuk)
- A **számlálót** és a **nevezőt** keresztbe is tudjuk egyszerűsíteni (az egyik tört számlálóját a másik tört nevezőjével)
- Egyszerűsítést érdemes a reciprokkal való szorzás átírása után elvégezni (ne kavarodjunk bele később)

Egész számok, törtek, vegyes törtek osztása

Tört osztása egész számmal: A tört nevezőjét szorozzuk az egész számmal, vagy ha tudjuk, akkor a számlálót és az egész számot egyszerűsítjük (Ha egyszerűbb, akkor az egész számot átírhatjuk eggyed tört alakra, onnantól pedig tört osztása törttel)

Egész szám osztása törttel: A tört reciprokával szorozzuk az egész számot (Ha egyszerűbb, akkor az egész számot átírhatjuk eggyed tört alakra, onnantól pedig tört osztása törttel)

Vegyes tört osztása törttel/Tört osztása vegyes törttel: A vegyes törtet átírjuk közönséges tört alakra, innentől a tört osztása törttel lépéseit követjük

Vegyes tört osztása vegyes törttel: Átírjuk mind a két vegyes törtet közönséges tört alakra, innentől a tört osztása törttel lépéseit követjük

Emeletes törtek

Emeletes törteknek nevezzük azokat a törteket, ahol egy törtet osztunk el egy másik törttel

Az emeletes tört alakot átírhatjuk két tört osztására, innentől pedig a tört osztása törttel szabályait alkalmazzuk

Tizedes törtek

Tizedesvessző helyett szokás pontot (**tizedespont**) is használni (legyakrabban informatikában, programozásban) **36.12**

Tizedes törtek helyi értéke

Eggyedek nem lesznek

A tizedesvessző utáni 1. számjegy lesz a tized

A tizedesvessző utáni 2. számjegy lesz a század

A tizedesvessző utáni 3. számjegy lesz az ezred

Ezt lehet folytatni tovább is (4. számjegy tízezred, 5. számjegy százezred …)

Helyi érték								Szám
ezres (E)	százas (sz)	tízes (t)	egyes (e)		tized (t)	század (sz)	ezred (E)	
1	1	4	5	,	8	6	7	1145,867

Egész számok esetén a tizedesvessző után 0 szerepel (ezt nem szoktuk kiírni)

Pl.: $2 = 2{,}0$

A tizedesvessző utáni számjegy mögé bármennyi 0-t írhatunk, nem fog változni a szám értéke

Pl.: $2{,}2 = 2{,}20 = 2{,}200$

Ha a tizedesvessző és a törtrész között van 0, vagy vannak 0-k, azt nem hagyhatjuk el sosem

Pl.: $3{,}08 \neq 3{,}8 \qquad 4{,}002 \neq 4{,}02 \neq 4{,}2$

Tizedes törtek kimondása: Kimondjuk a tizedesvessző előtti számot (**egészrész**), utána azt mondjuk, hogy egész, ezután kimondjuk a tizedesvessző utáni számot, és utána a **törtrész** elnevezést (tized, század, ezred)

Ha a tizedesvessző után 1 számjegy van, akkor tizedet mondunk, ha 2 számjegy, akkor századot, ha 3 számjegy, akkor ezredet

Tizedes törteket felsorolás esetén pontos vesszővel (;) választjuk el: $\mathbf{1,2;\ 3,5;\ 6,85;\ 9,791}$

Törtek, vegyes törtek és tizedes törtek

A törteket át tudjuk írni tizedes tört alakra, és a tizedes törteket is át tudjuk írni tört alakra (oda-vissza működik)

1-nél kisebb törtek vagy tizedes törtek esetén nagyon egyszerű dolgunk lesz, csak ki kell mondani a törtet vagy a tizedes törtet és már kész is vagyunk

1-nél nagyobb tizedes tört átírásakor az egészrészt és a törtrészt is átírjuk tört alakra, és a kettőt összeadjuk

1-nél nagyobb törtek esetén megnézzük, mennyi lesz az egészrész és mennyi törtrész marad, majd elvégezzük az átírást

Vegyes törtek esetén nagyon egyszerű dolgunk lesz, csak felírjuk az egészrészt, és a tizedesvessző után a törtrészt

Tizedes törtek összehasonlítása

Tizedes törtek összehasonlítása esetén (Melyik a nagyobb?) először mindig az egészrészeket hasonlítjuk össze

Amelyiknek nagyobb az egészrésze, az lesz a nagyobb

Ha az egészrészek megegyeznek, akkor összehasonlítjuk a törtrészeket (tizedesvessző utáni részt)

Először a tizedeket nézzük meg, és amelyik szám tized helyi értékén nagyobb számjegy szerepel, az a szám lesz a nagyobb

Ha megegyezik a tized helyi értéken álló két számjegy, akkor a századokat nézzük meg, és amelyik szám század helyi értékén nagyobb számjegy szerepel, az a szám lesz a nagyobb

Ha a század helyi értéken álló két számjegy is megegyezik, akkor az ezredeket nézzük meg, és amelyik szám ezred helyi értékén nagyobb számjegy szerepel, az a szám lesz a nagyobb

Ha az egyik számban kevesebb számjegy van a tizedesvessző után, mint a másikban, akkor 0-kat képzelünk oda

Tizedes törtek kerekítése

Egészre kerekítés

Egészre kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb egész szomszédját, és eldöntjük, a kettő közül melyikhez van közelebb

A két egész szomszéd között félúton lévő szám mindig az 5, 50, 500 lesz (Félúton: Ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)

Ha a tized helyén 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor **lefelé** (↓) kerekítünk

Ha a tized helyén 5, 6, 7, 8, 9 számejgyek szerepelnek, akkor **felfelé** (↑) kerekítünk

Ha egész számot kell egészre kerekíteni, akkor a szám és a kerekített értéke megegyezik

Tizedre kerekítés (1 tizedesjegyre)

Tizedre kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb tized szomszédját, és eldöntjük, a kettő közül melyikhez van közelebb

A két tized szomszéd között félúton lévő szám mindig a ,05 ,050 lesz (Félúton: Ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)

Ha a század helyén 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor **lefelé** (↓) kerekítünk

Ha a század helyén 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek szerepelnek, akkor **felfelé** (↑) kerekítünk

Ha egész számot vagy 1 tizedesjegyű számot kell tizedre kerekíteni, akkor a szám és a kerekített értéke megegyezik

Századra kerekítés (2 tizedesjegyre)

Századra kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb század szomszédját, és eldöntjük, a kettő közül melyikhez van közelebb

A két század szomszéd között félúton lévő szám mindig az ,005 lesz (Félúton: Ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)

Ha az ezred helyén 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor **lefelé** (↓) kerekítünk

Ha az ezred helyén 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek szerepelnek, akkor **felfelé** (↑) kerekítünk

Ha egész számot, vagy 1 tizedesjegyű, vagy 2 tizedesjegyű számot kell századra kerekíteni, akkor a szám és a kerekített értéke megegyezik

Ezredre kerekítés (3 tizedesjegyre)

Ezredre kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb ezred szomszédját, és eldöntjük, a kettő közül melyikhez van közelebb

A két ezred szomszéd között félúton lévő szám mindig az ,0005 lesz (Félúton: Ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)

Ha a tízezred helyén 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor **lefelé** (↓) kerekítünk

Ha a tízezred helyén 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek szerepelnek, akkor **felfelé** (↑) kerekítünk

Ha egész számot, vagy 1 tizedesjegyű, vagy 2 tizedesjegyű, vagy 3 tizedesjegyű számot kell ezredre kerekíteni, akkor a szám és a kerekített értéke megegyezik

Tizedes törtek összeadása és kivonása

Tizedes törtek összeadása és kivonása esetén az egészrészeket az egészrészekkel adjuk össze, vagy vonjuk ki őket egymásból, valamint a törtrészeket a törtrészekkel adjuk össze, vagy vonjuk ki őket egymásból

Ha szép számokról van szó, akkor ezt fejben is el lehet végezni, ha csúnyább (nehezebb, nagyobb) számokról van szó, akkor írásban fogjuk elvégezni a műveleteket úgy, hogy először mindig a törtrészek műveletét végezzük el, utána pedig az egészrészek műveletét

Pl.: $3{,}2 + 4{,}6 = \mathbf{7{,}8}$ $\quad$ $13{,}12 + 11{,}23 = \mathbf{24{,}35}$

Ha a tizedesek összeadásakor az összeg pontosan 10 tized, 100 század, vagy 1000 ezred, akkor egész számot fogunk kapni, az egészrészhez még 1-et fogunk hozzáadni (ilyenkor nem kell tizedesvesszőt írni, elég csak leírni az egész számot)

Pl.: $2{,}3 + 5{,}7 = \mathbf{8}$ $\quad$ $16{,}88 + 13{,}12 = \mathbf{30}$

Kivonásnál, ha megegyeznek a tizedesek, akkor egész számot fogunk kapni (ilyenkor nem kell tizedesvesszőt írni, elég csak leírni az egész számot)

Pl.: $8{,}4 - 3{,}4 = \mathbf{5}$ $\quad$ $18{,}36 - 12{,}36 = \mathbf{6}$

Ha a tizedesek összeadásakor az összeg nagyobb, mint 10 tized, 100 század, vagy 1000 ezred, akkor egy egészet fogunk még hozzáadni az egészrészhez

Pl.: $3{,}5 + 4{,}7 = \mathbf{8{,}2}$ $\quad$ $14{,}67 + 12{,}52 = \mathbf{27{,}19}$

Ha nem ugyanannyi tizedesjegy szerepel a két szám esetén, akkor 0-t vagy 0-kat fogunk képzeletben odarakni a kevesebb tizedesjegyű szám utolsó tizedesjegye mögé

Pl.: $5{,}5\mathbf{0} + 3{,}12 = \mathbf{8{,}62}$ $\quad$ $12{,}3\mathbf{00} + 14{,}168 = \mathbf{26{,}468}$

Ha az összeadás vagy kivonás művelet elvégzése után a tizedek 0-ra végződnek, akkor a 0-t nem muszáj kiírnunk

Pl.: $5{,}12 + 4{,}28 = \mathbf{9{,}4}$ $\quad$ $11{,}127 + 13{,}273 = \mathbf{24{,}4}$

Kivonás esetén, ha a kisebbítendő törtrésze kisebb, mint a kivonandó törtrésze, akkor az egészrészből fogunk ”kölcsönkérni”, (maradék) és úgy végezzük el a kivonást

Pl.: $5{,}1 - 3{,}4 = \mathbf{1{,}7}$ $\quad$ $15{,}26 - 12{,}42 = \mathbf{2{,}84}$

Ha egész számot és tizedes törtet adunk össze, akkor összeadjuk az egészrészeket, és mögé írjuk a törtrészt

Pl.: $4 + 5{,}9 = \mathbf{9{,}9}$ $\quad$ $17{,}36 + 12 = \mathbf{29{,}36}$

Ha tizedes törtből vonunk ki egész számot, akkor csak kivonjuk egymásból az egészrészeket és mögé írjuk a törtrészt

Pl.: $8{,}3 - 2 = \mathbf{6{,}3}$ $\quad$ $16{,}46 - 14 = \mathbf{2{,}46}$

Ha egész számból vonunk ki tizedes törtet, akkor az egészrészből ”kölcsön kell kérnünk”, és úgy tudjuk elvégezni a kivonást, vagy elvégezzük az egészrészek kivonását, és a kapott eredményből még kivonjuk a törtrészt

Pl.: $7 - 5{,}2 = \mathbf{1{,}8}$ $\qquad$ $15 - 11{,}46 = \mathbf{3{,}54}$

Tizedes törtek szorzása 10-zel, 100-zal, 1000-rel

Ha a tizedes törteket 10-zel, 100-zal, 1000-rel szorozzuk meg, akkor annyiszor fogjuk **jobbra** (→) vinni a tizedesvesszőt, amennyi 0 az 1-es mögött szerepel (1**0**-nél **1-gyel**, 1**00**-nál, **2-vel**, 1**000**-nél **3-mal**, és így tovább…)

Ha nem tudjuk már tovább **jobbra** (→) vinni a tizedesvesszőt (az utolsó szám mögé került), de még kellene, akkor a szám mögé 0-kat fogunk írni (még annyi 0-t, amennyiszer **jobbra** (→) kellene vinni a tizedesvesszőt)

Ilyen feladatok elején érdemes mindig megbecsülni az eredményt úgy, hogy a tizedes tört törtrészét elhagyjuk, és úgy szorozzuk meg az egészrészt 10-zel, 100-zal, 1000-rel, így biztosan nem lesz benne hiba

Tizedes törtek szorzása egész számmal, és tizedes törttel

Ha tizedes törtet egész számmal szorzunk meg, akkor szép számok esetén csinálhatjuk ugyanazt, mint összeadás vagy kivonás esetén (megszorozzuk az egészrészt, valamint a törtrészt is a számmal), de ezt ritkán fogjuk használni, leggyakrabban írásban fogjuk elvégezni a szorzást

Pl.: $124{,}3 \cdot 2 = \mathbf{248{,}6}$

Tizedes törtet írásban ugyanúgy fogunk megszorozni egész számmal, mint ahogy két egész számot szorzunk össze egymással

A tizedesvesszőt mindig a szorzás végén írjuk oda a megfelelő helyre

A szabály az, hogy a végeredménynek ugyanannyi számjegye lesz a tizedesvessző után, mint amennyi a tizedes törtnek volt (Ha 1 tizedesjegye volt a tizedes törtnek, akkor az eredménynek is 1 tizedesjegye lesz, ha 2 volt, akkor az eredménynek is 2 lesz, ha 3 volt, akkor az eredménynek is 3 lesz)

Ami fontos ilyenkor, hogy a 0 is bele fog számítani (Ha a legutolsó egy vagy több számjegy 0 lesz)

A szorzás elvégzése előtt, vagy a tizedesvessző beírása előtt érdemes egy becslést elvégezni kerekítés segítségével, hogy biztosak legyünk abban, hogy hova kerül a tizedesvessző

A szorzás felcserélhető művelet, mindegy, hogy melyik tag szerepel az írásbeli szorzás jobb és bal oldalán

Ha tizedes törtet tizedes törttel szorzunk, akkor mindent ugyanúgy végzünk el, mintha ott sem lenne a tizedesvessző, csak a végén az eredménynél ugyanannyi számnak kell lennie a tizedesvessző mögött, mint eredetileg a két tizedes törtnek összesen (Pl.: $26{,}36 \cdot 1{,}2$ esetén a $26{,}$**36**-nál **2 szám** szerepel a tizedesvessző mögött, az $1{,}$**2** esetén **1 szám** szerepel a tizedesvessző mögött, tehát **összesen 3**, a szorzás elvégzése után a végeredménynél úgy tesszük ki a tizedesvesszőt, hogy **3 szám** legyen mögötte)

Két tizedes tört szorzása esetén is érdemes elvégezni egy becslést, hogy tudjuk, hogy nagyságrendileg mekkora számnak kell kijönnie

Egész számok, tizedes törtek osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel

Egész számokat úgy osztunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel, hogy a szám végéről annyi 0-t hagyunk el, amennyi 0 van az osztóban az 1-es után (1**0**-nél **1**, 1**00**-nál, **2**, 1**000**-nél **3** 0-t fogunk elhagyni a szám végéről)

Ha az egész szám nem 0-ra végződik, vagy nincs elegendő 0 a végén, akkor az utolsó szám mögé képzeletben odateszünk egy tizedesvesszőt, és annyiszor fogjuk **balra** (←) vinni, amennyi 0 szerepel az osztóban az 1-es mögött (1**0**-nél **1-gyel**, 1**00**-nál, **2-vel**, 1**000**-nél **3-mal** fogjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt)

Ha tizedes törteket 10-zel, 100-zal, 1000-rel osztunk el, akkor pedig annyiszor fogjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt, amennyi 0 szerepel az osztóban az 1-es mögött (1**0**-nél **1-gyel**, 1**00**-nál, **2-vel**, 1**000**-nél **3-mal** fogjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt)

Ha már nem tudjuk többször balra vinni (az első számjegy elé került), akkor az első számjegy elé beírjuk, hogy 0,…, ha pedig még tovább kell vinnünk, akkor a tizedesvessző utáni első számjegy és a tizedesvessző közé még annyi 0-t írunk, amennyiszer még **balra** (←) kellene vinni a tizedesvesszőt (ha még 2-vel kellene **balra** (←) vinni, akkor 0,00…)

Egész számok osztása egész számokkal (Maradékos osztás)

Korábban a maradékos osztás végén, ha volt maradék, nem csináltunk vele semmit, csak leírtuk, hogy: Maradék: …

Így, hogy tanultunk a tizedes törtekről, tovább fogjuk vinni ezeket az osztásokat

Első lépésként az eredmény utolsó számjegye mögé teszünk egy tizedesvesszőt

Utána a maradék mellé egy 0-t fogunk írni, és az így kapott számot fogjuk elosztani az osztóval

Ha elvégeztük az osztást, és 0 a maradék, akkor kész vagyunk

Ha nem 0 a maradék, akkor az új maradék mögé megint írunk egy 0-t, és elvégezzük az osztást

Ezt egészen addig fogjuk csinálni, amíg a végén 0 maradékot nem kapunk, vagy nem veszünk észre valami ismétlődést

Az ismétlődést mindig pöttyel fogjuk jelölni a szám felett

Pöttyök típusai:

- 1 pötty: $23,\dot{7} = 23{,}7777777777\ldots$
- 2 pötty egymás mellett: $19,\dot{2}\dot{5} = 19{,}2525252525\ldots$
- 2 pötty nem egymás mellett: $22,\dot{4}31\dot{9} = 22,\mathbf{431943194319}\ldots$

Tizedes törtek osztása egész számokkal

Az elején ugyanúgy fogjuk végezni az osztást, mint amikor egész számot egész számmal osztunk, de ha eljutunk a tizedesvesszőig, akkor az eredménynél kitesszük a tizedesvesszőt, majd folytatjuk az osztást, és ha van maradék, akkor 0-t írunk mögé, és egészen addig folytatjuk az osztást, amíg 0 maradék nem lesz a végén, vagy nincs ismétlődés

Osztás tizedes törtekkel

Ha egy számot (akár egész számot, akár tizedes törtet) tizedes törttel kell osztanunk, akkor a tizedes törtet meg kell szoroznunk annyival, hogy egész számot kapjunk (bármilyen számmal lehet szorozni, de 10-zel, 100-zal, 1000-rel szoktunk), ilyenkor, hogy a hányados ne változzon, az osztandót is ugyanezzel a számmal kell megszoroznunk (egész számokkal példa: $20:4 = \mathbf{5}$ és $200:40 = \mathbf{5}$)

Ha mind a két szám (osztandó és osztó is) tizedes tört, akkor elegendő, ha csak az osztó lesz egész szám, az osztandó maradhat tizedes tört (tizedes törtet tudunk írásban osztani egész számmal)

Egész számok szorzása, osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel

	Szorzás (→)	Osztás (←)
10-zel	1 db 0-t írunk a szám végére $35 \cdot 10 = \mathbf{350}$	Ha a szám 0-ra végződik, akkor 1 db 0-t elhagyunk $810 : 10 = \mathbf{81}$
		Ha a szám nem 0-ra végződik, akkor 1-gyel **balra** (←) visszük a tizedesvesszőt $38 : 10 = \mathbf{3{,}8}$
100-zal	2 db 0-t írunk a szám végére $47 \cdot 100 = \mathbf{4700}$	Ha a szám 00-ra végződik, akkor 2 db 0-t elhagyunk $3800 : 100 = \mathbf{38}$
		Ha a szám nem 00-ra végződik, akkor 2-vel **balra** (←) visszük a tizedesvesszőt $902 : 100 = \mathbf{9{,}02}$
1000-rel	3 db 0-t írunk a szám végére $61 \cdot 1000 = \mathbf{61\,000}$	Ha a szám 000-ra végződik, akkor 3 db 0-t elhagyunk $9000 : 1000 = \mathbf{9}$
		Ha a szám nem 000-ra végződik, akkor 3-mal **balra** (←) visszük a tizedesvesszőt $530 : 1000 = \mathbf{0{,}53}$

Tizedes törtek szorzása, osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel

	Szorzás (→)	Osztás (←)
10-zel	Ha 1 számjegy van a tizedesvessző után, akkor 1 **jobbra** (→) vitelnél egész számot kapunk eredményként $31{,}2 \cdot 10 = \mathbf{312}$	1-gyel **balra** (←) visszük a tizedesvesszőt $26{,}3 : 10 = \mathbf{2{,}63}$
	Ha 1-nél több számjegy van a tizedesvessző után, akkor 1-szer **jobbra** (→) visszük a tizedesvesszőt $16{,}75 \cdot 10 = \mathbf{167{,}5}$	Ha nem tudjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt (már az első számjegy előtt van), akkor 0,-et írunk a szám elé $2{,}7 : 10 = \mathbf{0{,}27}$
100-zal	Ha 1 számjegy van a tizedesvessző után, akkor 1 **jobbra** (→) vitel után 1 db 0-t írunk a szám mögé $25{,}7 \cdot 100 = \mathbf{2570}$	2-vel **balra** (←) visszük a tizedesvesszőt $153{,}9 : 100 = \mathbf{1{,}539}$
	Ha 2 vagy több számjegy van a tizedesvessző után, akkor 2-ször **jobbra** (→) visszük a tizedesvesszőt $17{,}937 \cdot 100 = \mathbf{1793{,}7}$	Ha nem tudjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt (már az első számjegy előtt van), akkor 0,-et írunk a szám elé $3{,}8 : 100 = \mathbf{0{,}038}$
1000-rel	Ha 1 vagy 2 számjegy van a tizedesvessző után, 1 vagy 2 **jobbra** (→) vitel után 1 vagy 2 db 0-t írunk a szám mögé $29{,}32 \cdot 1000 = \mathbf{29\,320}$	3-mal **balra** (←) visszük a tizedesvesszőt $1693{,}7 : 1000 = \mathbf{1{,}6937}$
	Ha 3 vagy több számjegy van a tizedesvessző után, akkor 3-szor **jobbra** (→) visszük a tizedesvesszőt $13{,}5189 \cdot 1000 = \mathbf{13\,518{,}9}$	Ha nem tudjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt (már az első számjegy előtt van), akkor 0,-et írunk a szám elé $29{,}5 : 1000 = \mathbf{0{,}0295}$

Szorzás, osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel összefoglaló

Szorzás (→):

- **Egész számok**:

  Annyi 0-t fogunk írni a szám végére, amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (1**0**-nél **1-et**, 1**00**-nál, **2-t**, 1**000**-nél **3-at**)

- **Tizedes törtek**:

  Annyiszor visszük a tizedesvesszőt **jobbra** (→), amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (1**0**-nél **1-gyel**, 1**00**-nál, **2-vel**, 1**000**-nél **3-mal**)

  Ha már nem tudjuk **jobbra** (→) vinni, mert az utolsó számjegy mögött van, akkor 0-t vagy 0-kat fogunk a szám mögé írni (Ha 3-mal kellene **jobbra** (→) vinni a tizedesvesszőt, de az első **jobbra** (→) vitel után az utolsó számjegy mögé kerül, akkor még 2 db 0-t írunk a szám mögé, így kijön az $1 + 2 = 3$ **jobbra** (→) vitel)

Osztás (←):

- **Egész számok**:

  Ha a szám végén megfelelő mennyiségű 0 van, akkor annyi 0-t fogunk elhagyni szám végéről, amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (1**0**-nél **1-et**, 1**00**-nál, **2-t**, 1**000**-nél **3-at**)

  Ha a szám végén nincs megfelelő mennyiségű 0, akkor az utolsó számjegy mögé rakunk egy képzeletbeli tizedesvesszőt, és annyiszor visszük **balra** (←), amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (1**0**-nél **1-gyel**, 1**00**-nál, **2-vel**, 1**000**-nél **3-mal**)

- **Tizedes törtek**:

  Annyiszor visszük a tizedesvesszőt **balra** (←), amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (1**0**-nél **1-gyel**, 1**00**-nál, **2-vel**, 1**000**-nél **3-mal**)

  Ha pont az első számjegy elé kerül a tizedesvessző a rakosgatás után, akkor elé írjuk, hogy 0, ...

  Ha az első számjegy elé került a tizedesvessző, de még tovább kellene vinni, akkor a 0, ... és a szám közé még annyi 0-t írunk, amennyivel még **balra** (←) kellene vinni azt

Hatványozás

Hatványozással találkoztunk már korábban a terület és térfogat mértékegységeinél (Terület: cm^2, m^2, Térfogat: cm^3, m^3)

A többszörös összeadás műveletet szorzással tudtuk kiváltani ($3+3+3+3=4\cdot 3=\mathbf{12}$)

A többszörös szorzás műveletet **hatványozással** fogjuk kiváltani ($\mathbf{2}\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{2}\rightarrow\mathbf{2^3}$)

Kimondva: **Kettő** a **harmadikon**

A hatvány kifejezések két részből állnak:

Hatványalap (alsó szám)

Hatványkitevő (jobb felső szám)

A **hatványalap** az a szám, amit önmagával többször megszoroztunk, a **hatványkitevő** pedig az a szám, ahányszor szerepelt a **hatványalap**

Hatványozást ugyanazért fogjuk használni, mint összeadás esetén a szorzást, hogy ne kelljen 5, 6, 7, vagy még több szorzótényezőt leírni

A hatványozás oda-vissza működik, tehát szorzat alakból fel tudjuk írni a hatvány alakot, de a hatvány alakot is bármikor vissza tudjuk írni szorzat alakra

Fontos: $\mathbf{2^3\neq 2\cdot 3}$!!!!!!!!!!!

10 hatványai

Hatvány	Érték	Betűvel
10^1	10	Tíz
10^2	100	Száz
10^3	1000	Ezer
10^4	10 000	Tízezer
10^5	100 000	Százezer
10^6	1 000 000	Egymillió
10^7	10 000 000	Tízmillió
10^8	100 000 000	Százmillió
10^9	1 000 000 000	Egymilliárd

Hatványok, amiket jó tudni fejből

2. Hatványok	
1^2	**1**
2^2	**4**
3^2	**9**
4^2	**16**
5^2	**25**
6^2	**36**
7^2	**49**
8^2	**64**
9^2	**81**
10^2	**100**

3. Hatványok	
1^3	**1**
2^3	**8**
3^3	**27**
4^3	**64**
5^3	**125**

4. Hatványok	
1^4	**1**
2^4	**16**
3^4	**81**

2 hatványai	
2^2	**4**
2^3	**8**
2^4	**16**
2^5	**32**
2^6	**64**
2^7	**128**
2^8	**256**
2^9	**512**
2^{10}	**1024**

10 hatványai	
10^1	**10**
10^2	**100**
10^3	**1000**
10^4	**10 000**
10^6	**1 000 000**
10^9	**1 000 000 000**

Hatványozás azonosságai

Elnevezés	Azonosság
H1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
H2	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
H3	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
H4	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
H5	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

A H1 és H2 azonosságokat akkor használjuk, ha ugyanaz a hatványok **alapja**

A H3 és H4 azonosságokat akkor használjuk, ha ugyanaz a hatványok **kitevője**

A H5 azonosságot általában a zárójel felbontására szoktuk használni, ritkán használjuk a kitevők felcserélésére

Minden azonosságot oda-vissza tudunk alkalmazni (a H3 és H4 azonosságoknál van ennek a legtöbb értelme):

$$(3 \cdot x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = \boldsymbol{9x^2}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2^2} = \boldsymbol{\frac{x^2}{4}}$$

H1: Szorzás → **Kitevők** összeadása

H2: Osztás → **Kitevők** kivonása

$\}$ Hatványok **alapjai** egyeznek meg

H3: Zárójelbe vitel → **Alapok** szorzása

H4: Zárójelbe vitel → **Alapok** osztása

$\}$ Hatványok **kitevői** egyeznek meg

H5: Hatvány hatványozása → **Kitevők** szorzása (vagy cseréje)

Hatványozás tudnivalók

A hatványozás nem felcserélhető művelet ($2^3 \neq 3^2$)

A 2. hatványra emelt számokat négyzetszámoknak nevezzük

Kimondva: 5^2 → Öt a másodikon vagy öt a négyzeten

A 3. hatványra emelt számokat köbszámoknak nevezzük

Kimondva: 2^3 → Kettő a harmadikon vagy kettő a köbön

Hatványozás eredményei nem szép fokozatosan fognak növekedni, mint a szorzás eredményei, hanem egyre gyorsabban

Az 1-et akárhanyadikra emeljük mindig 1-et kapunk eredményül (mindegy, hogy hányszor szorozzuk össze önmagával)

Az 0-t akárhanyadikra emeljük mindig 0-t kapunk eredményül (mindegy, hogy hányszor szorozzuk össze önmagával)

Ha valamit az 1. hatványra emelünk, önmagát kapjuk vissza ($2^1 = 2, \quad 3^1 = 3 \ldots$)

Ha valamit az 0. hatványra emelünk mindig 1-et kapunk és nem 0-t!!!!!!!!!!!!!!!!

$2^0 = 1, \quad 3^0 = 1 \quad 4^0 = 1 \ldots$

Negatív kitevők hatványozás során

A hatványozás során negatív számok is lehetnek a kitevőben

Ez a H2-es azonosságból fog kijönni:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Ha a nevező kitevője nagyobb, mint a számlálóé, akkor kivonás során negatív számot fogunk kapni a kitevőben

Példa:

$$\frac{2^3}{2^4} = 2^{3-4} = \mathbf{2^{-1}}$$

$$\frac{2^3}{2^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Valamit a -1. hatványra emelve a kifejezés reciprokát kapjuk meg

$$3^{-1} = \frac{1}{3} \qquad 4^{-1} = \frac{1}{4} \ldots$$

Példa:

$$\frac{2^3}{2^6} = 2^{3-6} = \mathbf{2^{-3}}$$

$$\frac{2^3}{2^6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^3}}$$

Valamit negatív kitevőre emelve a kifejezés hatványának reciprokát kapjuk meg ($3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ $4^{-5} = \frac{1}{4^5}$ $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$ ...)

10 negatív hatványai

Hatvány	Érték (tört)	Érték	Betűvel
10^{-1}	$\frac{1}{10}$	0,1	Tized
10^{-2}	$\frac{1}{100}$	0,01	Század
10^{-3}	$\frac{1}{1000}$	0,001	Ezred
10^{-4}	$\frac{1}{10\,000}$	0,0001	Tízezred
10^{-5}	$\frac{1}{100\,000}$	0,00001	Százezred
10^{-6}	$\frac{1}{1\,000\,000}$	0,000001	Milliomod
10^{-9}	$\frac{1}{1\,000\,000\,000}$	0,000000001	Milliárdod

Negatív számok hatványozása

Negatív számok hatványozása során végeredményként kaphatunk pozitív, és kaphatunk negatív számot is

Ez a kitevőben lévő számtól függ:

Ha a szám **páros**, akkor a végeredmény **pozitív** lesz

Ha a szám **páratlan**, akkor a végeredmény **negatív** lesz

Páros esetben minden tagnak meglesz a párja (⊖·⊖=⊕)

Páratlan esetben minden tagnak meglesz a párja, kivéve az utolsó tagot (⊕·⊖=⊖)

Negatív szám hatványozása esetén a lépések:

Megnézzük, hogy a kitevő páros vagy páratlan

Ha **páros**, akkor pozitív lesz az eredmény, úgy oldjuk meg, mintha ott se lenne a mínusz jel

Ha **páratlan**, akkor az egyenlőség után teszünk egy mínusz jelet, de utána ugyanúgy oldjuk meg, mintha nem lenne ott mínusz jel

Normálalak

Normálalak nagy számok esetén

Nagyon nagy (általában sok 0-ra végződő) számok esetén használjuk a normálalakot

Azért használjuk, hogy ne kelljen a sok 0-t kiírni, ne írjunk le se kevesebbet, se többet, mint kéne

Föld és Nap távolsága 150 millió km, számmal: 150 000 000 km

A normálalak két tagból áll:

$150\,000\,000 = \mathbf{1,5} \cdot \mathbf{10^8}$

Egy 1 és 10 közötti számból (1 vagy annál nagyobb, 10-nél kisebb, és nem muszáj egész számnak lennie)

10 hatványából (10^2, 10^3, 10^4...)

Egy számot úgy írunk fel normálalakban, hogy az utolsó szám mögé képzeljük a tizedesvesszőt, és **balra** (←) visszük egészen az első számjegyig, és ahányszor **balra** (←) vittük a tizedesvesszőt, a 10 kitevőjében annyi lesz

Úgy is elképzelhető, mintha a számot 1-gyel szoroznánk meg, a számot folyamatosan osztjuk 10-zel, az 1-et pedig szorozzuk 10-zel, így nem változik a szorzat értéke

A tizedes tört végéről a 0-kat elhagyhatjuk, de ha van középen 0, azokat nem hagyhatjuk el

A normálalak ugyanúgy, mint a hatvány azonosságok, oda-vissza működik, tehát egy normálalakban felírt számot vissza tudunk írni ”rendes” alakra

Ha normálalakról ”rendes” alakra írjuk át a számot, akkor annyiszor visszük **jobbra** (→) a tizedesvesszőt, amennyi a 10 kitevője

Ha már nem tudjuk többször **jobbra** (→) vinni (utolsó számjegy mögé került), akkor 0-kat kezdünk írni az utolsó számjegy mögé (annyit, ahányszor még **jobbra** (→) kellene vinnünk a tizedesvesszőt)

Negatív számok esetén is ugyanúgy működik a normálalak, mint pozitív számok esetén, ugyanazokat a lépéseket fogjuk megcsinálni, csak a szám elé írunk egy mínusz előjelet

Normálalak esetén az 1-es szorzótényezőt is ki kell írnunk (Pl.: $10\,000 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{10^4}$)

Normálalak kis számok esetén

Nemcsak nagyon nagy, hanem nagyon kicsi számok esetén is használjuk a normálalakot (0,0000…)

Itt is azért használjuk, hogy ne kelljen a sok 0-t kiírni, ne írjunk le se kevesebbet, se többet, mint kéne

Porszem tömege: $0{,}00000001\ g$

A normálalak két tagból áll:

$0{,}00000001 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{10^{-8}}$

Egy 1 és 10 közötti számból (1 vagy annál nagyobb, de 10-nél kisebb, és nem muszáj egész számnak lennie)

10 negatív hatványából (10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}…)

Nagyon kis számok esetén a 10 kitevőjében negatív szám lesz

Egy kis számot úgy írunk fel normálalakban, hogy a tizedesvesszőt addig visszük **jobbra** (→) a 0 mellől, míg az első nem 0 számjegy mögé nem kerül, és ahányszor **jobbra** (→) vittük a tizedesvesszőt, a 10 kitevőjében az a szám szerepel majd negatív előjellel

Úgy is elképzelhető, mintha a számot 1-gyel szoroznánk meg, a számot folyamatosan szorozzuk 10-zel, az 1-et pedig osztjuk 10-zel, így nem változik a szorzat értéke

Pici negatív számok (Pl.: $-0{,}000001$) esetén is ugyanígy működik minden, csak a szám elé írunk egy mínusz előjelet

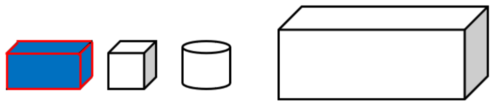
Trükk: a 0, ... és az első számjegy között mindig eggyel kevesebb 0 lesz, mint amennyi a kitevőben szereplő szám

Ha normálalakról ”rendes” alakra írjuk át a számot, akkor annyiszor visszük **balra** (←) a tizedesvesszőt, amennyi a 10 kitevője

Test, felület, vonal, pont

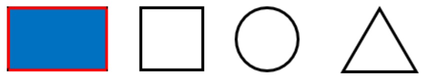
Test:

- Van hosszúsága, mélysége, magassága (vastagsága)
- Felület határolja / Felületek határolják
- Pl.: Téglatest, Kocka, Henger, Gömb



Felület:

- Csak szélessége és magassága van, vastagsága nincs
- Vonal határolja / Vonalak határolják
- Pl.: Téglalap, Négyzet, Kör, Háromszög



Vonal:

- Csak hosszúsága van, magassága és vastagsága nincs
- Pontok sokaságából áll
- Lehet egyenes vagy görbe
- Cérnaként vagy hajszálként tekintünk rá

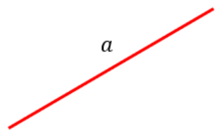
Pont:

- Nincs sem hosszúsága, sem magassága, sem vastagsága
- Porszemként tekintünk rá

Egyenes vonalak típusai

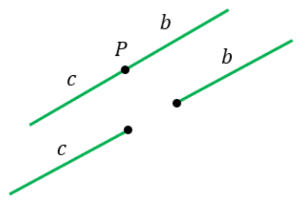
- Az ABC kis betűivel szoktuk jelölni

➢ **Egyenes**:



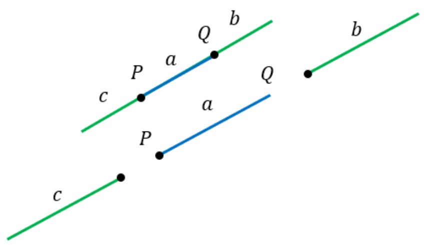
- Tetszőleges hosszúságú (úgy képzeljük el, mintha folytatódna a végtelenségig)
- Emiatt nem tudjuk lemérni, nincs hossza

➢ **Félegyenes**:



- Ha egy egyenesre berajzolunk egy pontot, akkor két félegyenest kapunk
- A félegyenesnek van egy kezdőpontja, de ugyanúgy a végtelenségig folytatódik
- Nem tudjuk lemérni, nincs hossza

➢ **Szakasz**:

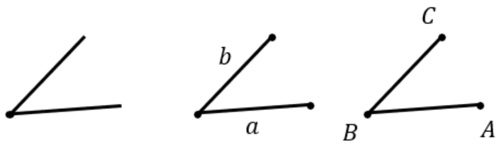


- Ha egy egyenesre berajzolunk két pontot, akkor kapunk két félegyenest (c és b), a két félegyenes közötti részt (a) pedig szakasznak hívjuk
- A szakaszt le tudjuk mérni, van hossza
- Szakaszt az ABC kisbetűivel vagy a két végpontjával adhatunk meg (a szakasz, PQ szakasz)
- Vonalzó vagy körző segítségével mérhetjük le a szakaszt

Szögek

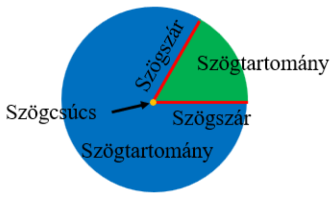
Hogy kapunk meg egy szöget?

- Két félegyenesből, amiknek ugyanaz a kezdőpontja
- Két szakaszból, amiknek az egyik végpontja közös
- Három pontból



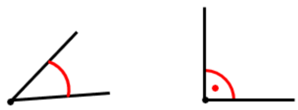
<u>Szögek részei</u>:

- Szögcsúcs
- Szögszár
- Szögtartomány



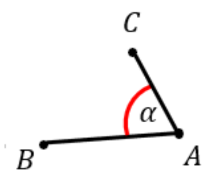
<u>Szögek jelölése</u>:

- Körívvel szoktuk jelölni a szögeket az ábrán
- A derékszögnek van külön jelölése, egy pontot rakunk a köríven belülre



<u>Szögek elnevezése</u>:

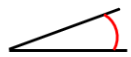
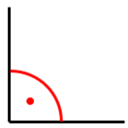
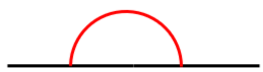
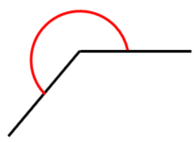
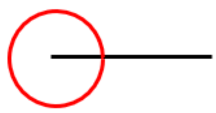
- A szögeket a görög ABC betűivel szoktuk jelölni: $(\alpha\ (alfa),\ \beta(béta),\ \gamma(gamma),\ \delta(delta))$
- Ha három pontból kaptuk meg a szöget, akkor a három pont **<u>megfelelő</u>** felsorolásával is jelölhetjük ($ABC\measuredangle$, $CBA\measuredangle$, $BAC\measuredangle$)



Görög ABC betűi, amiket érdemes tudni

Görög betű	Kimondva
α	Alfa
β	Béta
γ	Gamma
δ	Delta
ε	Epszilon
λ	Lambda
μ	Mű
σ	Szigma
φ	Fí
ω	Omega

Szögek típusai

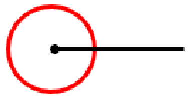
Szög neve	Szög értéke	Szög jelölése
Nullszög	$\alpha = 0°$	
Hegyesszög	$0° < \alpha < 90°$	
Derékszög	$\alpha = 90°$	
Tompaszög	$90° < \alpha < 180°$	
Egyenesszög	$\alpha = 180°$	
Homorúszög	$180° < \alpha < 360°$	
Teljesszög	$\alpha = 360°$	

Szögek mértékegysége

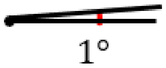
Ugyanúgy, mint a hosszúság, tömeg és űrtartalom esetén a szögeknek is van mértékegysége, amivel meg tudjuk határozni egy szög nagyságát

A szögek mértékegysége a fok, aminek a jele: °

A teljesszög 360°-os



Az 1° a teljesszög 360-ad része, amit úgy kapunk meg, hogy a teljesszög körívét 360 egyenlő részre osztjuk (nagyon kicsike lesz)



Minél jobban kinyitjuk a szárakat, annál nagyobb szöget fogunk kapni

Minél jobban összecsukjuk a szárakat, annál kisebb szöget fogunk kapni

A szögeket szögmérő segítségével tudjuk megmérni

A szögek további mértékegységei a szögperc és a szögmásodperc

Szögperc jele: $'$

Szögmásodperc jele: $''$

A szögperc a fok 60-ad részét jelenti → $1° = 60'$

A szögmásodperc a szögperc 60-ad részét jelenti (a fok 3600-ad részét) → $1' = 60''$ és $1° = 3600''$

Ezek nagyon picik, szabad szemmel nem láthatóak

Trükk a megjegyzéshez: **Idő**

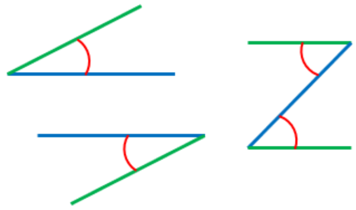
Szög	**Idő**
Fok	Óra
Szögperc	Perc
Szögmásodperc	Másodperc

Szög	**Idő**
$1° = 60'$	$1\ ó = 60\ p$
$1' = 60''$	$1\ p = 60\ mp$
$1° = 3600''$	$1\ ó = 3600\ mp$

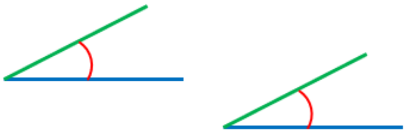
Szögpárok

- **Váltószögek (Fordított állású szögek)**: Ha a két szög szárai egymással párhuzamosak (vagy az egyik szár megegyezik a két szög esetén (Z betű))

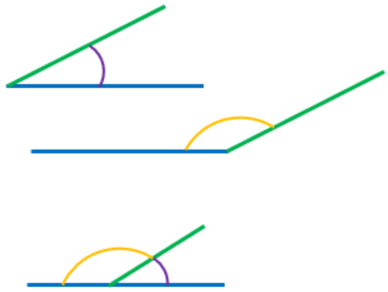
  Ha egy szöget középpontosan tükrözünk, akkor kaphatunk váltószöget



- **Egyállású szögek**: Ha egy szöget eltolunk a síkon, akkor szárai ugyanúgy párhuzamosak lesznek, mint váltószög esetén, csak egy irányba is fognak állni, a szög és az eltolt szög ugyanakkora lesz



- **Kiegészítő szögek**: Ha két szög 180°-ra egészíti ki egymást, akkor azok kiegészítő szögek



Geometriai transzformációk

Tengelyes tükrözés

Az az egyenes, amire tükrözünk, a **tükörtengely**, általában t-vel szoktuk jelölni

Bármit is szeretnénk tükrözni (félegyenes, egyenes, szakasz, alakzat, síkidom, sokszög), mindig a pontokat fogjuk tükrözni, a pontok tükörképeit pedig a megfelelő sorrendben össze fogjuk kötni

Pontok tükrözése: A pontból merőlegest állítunk a tükörtengelyre, ezt meghosszabbítjuk, és ahol metszi a tükörtengelyt, ott beleszúrjuk a körzőnket, kinyitjuk akkorára, mint a metszéspont és az eredeti pont távolsága, és a tükörtengely másik oldalán elmetsszük a merőlegest

A pont tükörképe ugyanolyan távol lesz a tükörtengelytől, mint az eredeti pont

A pont tükörképét ’-vel jelöljük (Ha A pont volt az eredeti pont, a tükörképe A' lesz)

Minél közelebb van a pont a tükörtengelyhez, annál közelebb lesz a tükörképe is

Szakaszok tükrözése: A szakasz két végpontját tükrözzük, majd összekötjük ezeket

Félegyenesek tükrözése: Kiválasztunk egy tetszőleges pontot a félegyenesen, ezt és a félegyenes kezdőpontját tükrözzük, majd összekötjük őket, az összekötésnél tovább fogjuk húzni a vonalat

Egyenesek tükrözése: Kiválasztunk két tetszőleges pontot az egyenesen, ezeket tükrözzük, a pontok tükörképeit összekötjük meghosszabbítva

Sokszögek tükrözése: A sokszög minden pontját tükrözzük, majd ezeket a megfelelő sorrendben összekötjük (ugyanolyan sorrendben, mint az eredeti alakzat esetén)

Kör tükrözése: A kör középpontját tükrözzük, a körzőnket beleszúrjuk az eredeti kör középpontjába, kinyitjuk sugárnyira, a tükörkép középpontjába beleszúrjuk, és körzünk

Tengelyes tükrözés speciális esetei

Pont: Ha a pont a tükörtengelyen van, akkor a pont és a tükörképe megegyezik egymással

Szakasz: Ha a szakasz a tükörtengelyen van, akkor a szakasz és a tükörképe megegyezik egymással

Egyenes: A tükörtengellyel párhuzamos egyenes tükörképe is párhuzamos lesz a tükörtengellyel

Egyenes: Abban a pontban, ahol az egyenes metszi a tükörtengelyt, ott fogja metszeni a tükörképe is a tükörtengelyt (ez lesz az egyik választott pont)

Egyenes: Ha az egyenes rajta van a tükörtengelyen, akkor az egyenes és a tükörképe megegyezik egymással

Egyenes: Ha az egyenes merőleges a tükörtengelyre, akkor az egyenes és a tükörképe megegyezik egymással

Tengelyesen szimmetrikus sokszögek: Ha a sokszög úgy helyezkedik el, hogy a szimmetriatengelye egybeesik a tükörtengellyel, akkor a sokszög és a tükörképe megegyezik egymással

Kör: Ha a kör középpontja rajta van a tükörtengelyen, akkor a kör és a tükörképe megegyezik egymással

Kör: Ha a kör érinti a tükörtengelyt, akkor a tükörképe ugyanabban a pontban fogja érinteni a tükörtengelyt, mint az eredeti alakzat

Kör: Ha két pontban metszi a tükörtengelyt, akkor a tükörkép ugyanebben a két pontban fogja metszeni a tükörtengelyt

Tengelyes tükrözés tulajdonságai

Egyenestartó: Egyenes képe egyenes

Távolságtartó: A szakaszok hossza nem változik a tükrözés során

Szögtartó: A szögek nagysága nem változik a tükrözés során

Körtartó: Kör tükörképe is kör lesz

Egybevágósági transzformáció: Az alakzat és a tükörképe egybevágóak lesznek egymással (ugyanolyanok)

Egybevágóság jele: $\cong$

Megfordítható transzformáció: Ha a tükrözés során A pont tükörképe A' lett, akkor A' tükörképe A lesz

Megváltoztatja a körüljárási irányt: Ha az eredeti alakzat esetén az óramutató járásával **megegyező** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörkép esetén az óramutató járásával **ellentétes** irányba fogjuk összekötni a pontokat (Ha az eredeti alakzatnál az óramutató járásával **ellentétes** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörképnél az óramutató járásával **megegyező** irányba fogjuk összekötni a pontokat)

Középpontos tükrözés

Az a pont, amire tükrözünk, a szimmetriaközéppont, általában K-val szoktuk jelölni

Bármit is szeretnénk tükrözni (félegyenes, egyenes, szakasz, alakzat, síkidom, sokszög), mindig a pontokat fogjuk tükrözni, a pontok tükörképeit pedig a megfelelő sorrendben össze fogjuk kötni

Pontok tükrözése: A pontot összekötjük a K középponttal és meghosszabbítjuk, a pont tükörképe a meghosszabbított egyenesen lesz ugyanolyan távolságra K-tól, mint az eredeti pont

A pont tükörképe ugyanolyan távol lesz a középponttól, mint az eredeti pont

A pont tükörképét '-vel jelöljük (Ha A pont volt az eredeti pont, a tükörképe A' lesz)

Minél közelebb van a pont a középponthoz, annál közelebb lesz a tükörképe is

Szakaszok tükrözése: A szakasz két végpontját tükrözzük, majd összekötjük ezeket

Félegyenesek tükrözése: Kiválasztunk egy tetszőleges pontot a félegyenesen, ezt és a félegyenes kezdőpontját tükrözzük, majd összekötjük őket, az összekötésnél tovább fogjuk húzni a vonalat

Egyenesek tükrözése: Kiválasztunk két tetszőleges pontot az egyenesen, ezeket tükrözzük, a pontok tükörképeit összekötjük meghosszabbítva

Sokszögek tükrözése: A sokszög minden pontját tükrözzük, majd ezeket a megfelelő sorrendben összekötjük (ugyanolyan sorrendben, mint az eredeti alakzat esetén)

Kör tükrözése: A kör középpontját tükrözzük, a körzőnket beleszúrjuk az eredeti kör középpontjába, kinyitjuk sugárnyira, a tükörkép középpontjába beleszúrjuk, és körzünk

Középpontos tükrözés speciális esetei

Pont: Ha a pont a középponton van, akkor a pont és a tükörképe megegyezik egymással

Szakasz: Ha a szakasz átmegy a középponton, és a felezőpontja egybeesik középponttal, akkor a szakasz és a tükörképe megegyezik egymással

Szakasz: Ha a szakasz egyik végpontja a középponton van, akkor csak a másik végpontját kell tükrözni

Szakasz: Ha a szakasz nincs rajta a középponton, akkor a szakasz és a tükörképe párhuzamos lesz egymással, de a pontok felcserélődnek

Egyenes: Ha az egyenes nem megy át a középponton, akkor az egyenes és a tükörképe páhuzamos lesz egymással

Egyenes: Ha az egyenes átmegy a középponton, akkor az egyenes és a tükörképe megegyezik egymással

Középpontosan szimmetrikus sokszögek: Ha a sokszög úgy helyezkedik el, hogy a középpontja (átlók metszéspontja) egybeesik a szimmetriaközépponttal, akkor a sokszög és a tükörképe megegyezik egymással

Kör: Ha a kör középpontja egybeesik a szimmetriaközépponttal, akkor a kör és a tükörképe megegyezik egymással

Kör: Ha a körvonalon van a szimmetriaközéppont, akkor a tükörkép ugyanúgy át fog menni a középponton, és a középpontban fogja érinteni az eredeti kört

Kör: Ha a szimmetriaközéppont a körvonalon belül van, akkor körnek és a tükörképének két metszéspontja lesz

Középpontos tükrözés tulajdonságai

Egyenestartó: Egyenes képe egyenes

Távolságtartó: A szakaszok hossza nem változik a tükrözés során

Szögtartó: A szögek nagysága nem változik a tükrözés során

Körtartó: Kör tükörképe is kör lesz

Egybevágósági transzformáció: Az alakzat és a tükörképe egybevágóak lesznek egymással (ugyanolyanok)

Egybevágóság jele: $\cong$

Megfordítható transzformáció: Ha a tükrözés során A pont tükörképe A' lett, akkor A' tükörképe A lesz

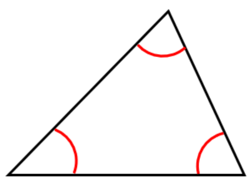
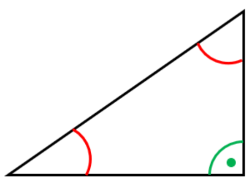
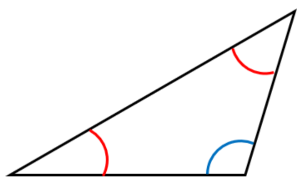
Nem változtatja meg a körüljárási irányt: Ha az eredeti alakzat esetén az óramutató járásával **megegyező** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörkép esetén is az óramutató járásával **megegyező** irányba fogjuk összekötni a pontokat (Ha az eredeti alakzatnál az óramutató járásával **ellentétes** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörképnél is az óramutató járásával **ellentétes** irányba fogjuk összekötni a pontokat)

Tengelyesen szimmetrikus sokszögek vs középpontosan szimmetrikus sokszögek

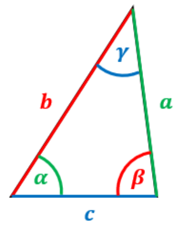
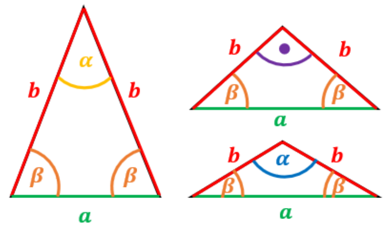
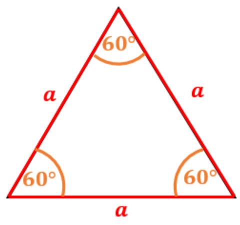
		Tengelyesen	Középpontosan
Háromszögek	Általános	✗	✗
	Egyenlő szárú	✓	✗
	Szabályos	✓	✗
Négyszögek	Általános	✗	✗
	Általános trapéz	✗	✗
	Húrtrapéz	✓	✗
	Derékszögű trapéz	✗	✗
	Paralelogramma	✗	✓
	Rombusz	✓	✓
	Deltoid	✓	✗
	Téglalap	✓	✓
	Négyzet	✓	✓
Szabályos sokszögek	Páratlan csúcsú	✓	✗
	Páros csúcsú	✓	✓
Kör		✓	✓

Háromszögek

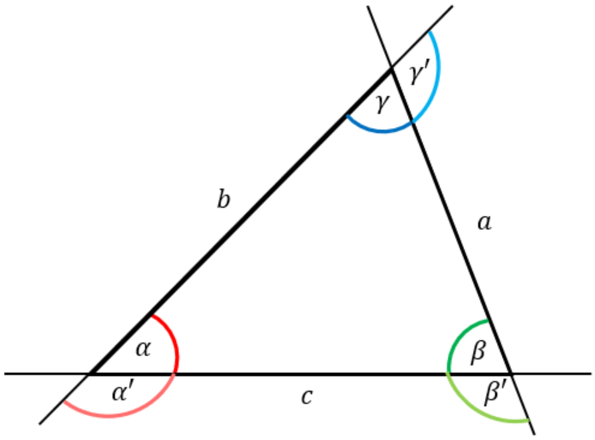
Háromszögek csoportosítása szögek szerint

Hegyesszögű háromszög	Derékszögű háromszög	Tompaszögű háromszög
		
3 hegyesszöge van	**2 hegyesszöge** és **1 derékszöge** van	**2 hegyesszöge** és **1 tompaszöge** van

Háromszögek csoportosítása specialitás szerint

Általános háromszög	Egyenlő szárú háromszög	Szabályos (egyenlő oldalú) háromszög
		
Lehet hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű is Lényeg, hogy ne legyen két ugyanolyan hosszúságú oldala Minden oldala és szöge különböző nagyságú	Lehet hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű is 2 oldala egyenlő hosszúságú lesz → **Szárak** 3. oldal → **Alap** Az **alapon fekvő két szöge** egyenlő nagyságú Szárak által bezárt szög → **Szárszög**	Mind a 3 oldala egyenlő hosszúságú lesz Mind a 3 szöge egyenlő nagyságú lesz (**60°**)

Háromszögek belső és külső szögei



Háromszög belső szögei:

- A csúcsnál α szög
- B csúcsnál β szög
- C csúcsnál γ szög

Háromszög belső szögeinek összege mindig 180°

$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$

Háromszög külső szögeit úgy kapjuk meg, ha meghosszabbítjuk az oldalakat

Háromszög külső szögeit vesszővel fogjuk jelölni

Háromszög külső szögei:

- A csúcsnál α-hoz tartozó külső szög: α' szög
- B csúcsnál β-hoz tartozó külső szög: β' szög
- C csúcsnál γ-hoz tartozó külső szög: γ' szög

Belső szög és a hozzátartozó külső szög összege 180°

- $\alpha + \alpha' = 180°$
- $\beta + \beta' = 180°$
- $\gamma + \gamma' = 180°$

Külső szögek összege 360°

$\boldsymbol{\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°}$

Külső szög egyenlő a másik két belső szög összegével:

- $\alpha' = \beta + \gamma$
- $\beta' = \alpha + \gamma$
- $\gamma' = \alpha + \beta$

Összefüggések háromszögek oldalai és szögei között

Egy háromszög két oldalának összege mindig nagyobb kell, hogy legyen, mint a 3. oldal

- $a + b > c$
- $a + c > b$
- $b + c > a$

Rövidebben: A két rövidebb oldal összege nagyobb kell, hogy legyen, mint a leghosszabb oldal

Ha ez nem teljesülne, akkor a két rövidebb oldal nem érne össze

Pl.: $a = 2\ cm,\ \ b = 4\ cm,\ \ c = 10\ cm$ oldalú háromszöget nem tudunk rajzolni

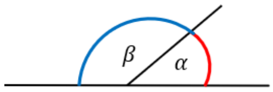
Az oldalak hosszúsága és a szögek nagysága összefügg egymással:

- A leghosszabb oldallal szemben van a legnagyobb szög
- A középső hosszúságú oldallal szemben van a középső nagyságú szög
- A legrövidebb oldallal szemben van a legkisebb szög

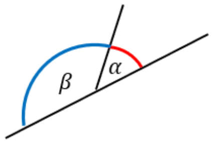
Egyenesen fekvő szögek

Az egy egyenesen fekvő szögek összege mindig 180°

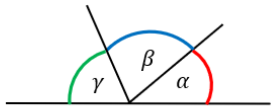
Ha ismerjük az egyik szöget a kettő közül, a másikat mindig ki tudjuk számolni



$\alpha + \beta = 180°$



$\alpha + \beta = 180°$



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Egyenesek metszésénél lévő szögek

Két egyenes metszésnél 4 szöget kapunk

Az egymással szemben lévő szögek ugyanakkorák

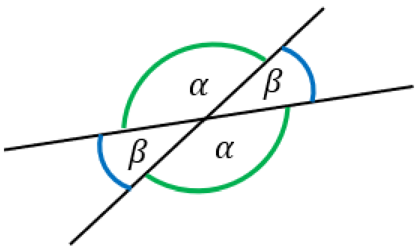
Az egymás mellett lévő szögek összege 180°

$\boldsymbol{\alpha + \beta = 180°}$

Ha a 4-ből ismerünk 1 szöget, a másik 3-at meg tudjuk határozni

A 4 szög összege 360°

$\boldsymbol{\alpha + \alpha + \beta + \beta = 360°}$



Egybevágó háromszögek

Egybevágó: Ugyanolyan

Egybevágóság esetén a két alakzatot tükrözéssel, forgatással, eltolással egymásba tudjuk vinni

Egybevágóság jele: ≅ (Pl.: $ABC\Delta \cong A'B'C'\Delta$)

Háromszögek egybevágóságának esetei:

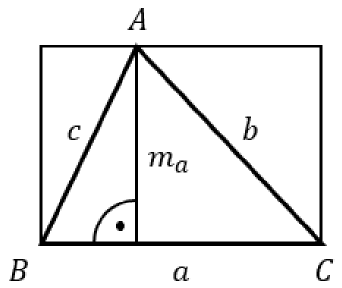
1) Ha a két háromszög mind a 3 oldala egyenlő ($a = a'$, $b = b'$, $c = c'$)
2) Ha a két háromszög 2 oldala és az általuk bezárt szög egyenlő ($a = a'$, $b = b'$, $\gamma = \gamma'$)
3) Ha a két háromszög 1 oldala és a rajtuk fekvő két szög egyenlő ($a = a'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$)

4) Ha a két háromszög 2 oldala és az egyiken lévő szög egyenlő ($a = a'$, $b = b'$, $\alpha = \alpha'$) $(a > b)$

Két háromszög nem biztos, hogy egybevágó, ha mind a 3 szöge egyenlő ($\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$)

Ezek megfordításai is igazak

Háromszögek területe



<u>Általános háromszögek területe</u>: Minden háromszög köré tudunk rajzolni egy téglalapot, a háromszög területe a téglalap területének pont a **<u>fele</u>** lesz

<u>Téglalap területe</u>: Szélesség · Magasság ($a \cdot b$)

<u>Háromszög területe</u>: (Szélesség · Magasság): $\mathbf{2}$ → (Alap · Magasság): $\mathbf{2}$

A háromszög magasságát m-mel jelöljük, az alsó indexbe azt az oldalt írva, amire merőleges (m_a, m_b, m_c)

<u>Háromszög területe</u>: $\boldsymbol{T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}}$

Ez az összefügés igaz hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszögek esetén is

Specialitás szerint igaz általános, egyenlő szárú és szabályos háromszögek esetén is

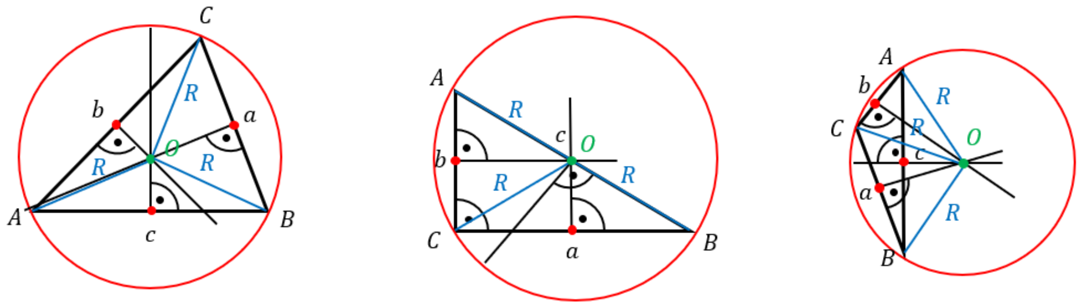
Tompaszögű háromszögek esetén a magasságot úgy tudjuk berajzolni, hogy az alapot meghosszabbítjuk (a magasság a háromszögön kívülre esik)

Ha két háromszögnek ugyanakkora egy oldala és az ahhoz tartozó magassága (a felső pontot csúsztatjuk egy vízszintes egyenes mentén), akkor a háromszögek területe megegyezik egymással

<u>Derékszögű háromszögek területe</u>: Derékszögű háromszög esetén az alap az egyik befogó (ha szokásos módon áll, akkor a vízszintes befogó), a magasság pedig a másik befogó lesz (ha szokásos módon áll, akkor a függőleges befogó)

<u>Derékszögű háromszögek területe</u>: $\boldsymbol{T = \frac{a \cdot b}{2}}$

Háromszögek köré írt köre



Ha berajzoljuk (vagy megszerkesztjük) a háromszög oldalfelező merőlegeseit, akkor azok egy pontban metszik egymást

Szerkesztés:

1) Beleszúrjuk a körzőnket az egyik csúcsba, kinyitjuk nagyobbra, mint az oldal fele, és körzünk
2) Ugyanezzel a távolsággal körzünk a másik csúcsból is
3) A két körív metszéspontjait összekötjük, ez az oldalfelező merőleges

Ez a pont ugyanolyan távol van a háromszög mind 3 csúcsától

Ez a pont a háromszög köré írható körének a középpontja (O)

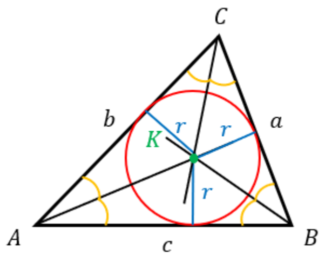
A pont és a csúcsok távolsága a köré írható kör sugara (R)

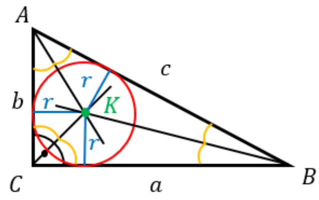
A köré írt kör középpontja:

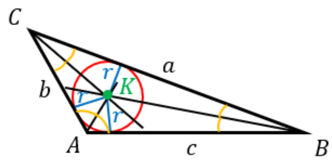
- Hegyesszögű háromszögek esetén a háromszögön belül van
- Derékszögű háromszögek esetén az átfogó felén van (itt elég csak megkeresni az átfogó felezőpontját, a sugár pedig az átfogó fele lesz)
- Tompaszögű háromszögek esetén a háromszögön kívül lesz

Elegendő 2 oldalfelező merőlegest berajzolni, nem muszáj mind a 3-at

Háromszögek beírt köre







Ha berajzoljuk (vagy megszerkesztjük) a háromszög szögfelező egyeneseit, akkor azok egy pontban metszik egymást

Szerkesztés:

1) Beleszúrjuk a körzőnket az egyik csúcsba, kinyitjuk tetszőleges nagyságúra, és körzünk
2) Körzünk mind a két pontból, ahol a körív elmetszette az oldalakat
3) A két körív metszéspontját összekötjük a csúccsal, ez a szögfelező egyenes

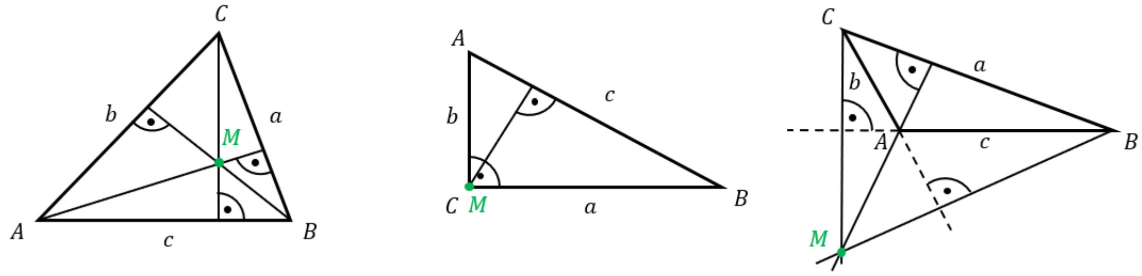
Ez a pont ugyanolyan távol van a háromszög mind 3 oldalától (nem feltétlenül az oldala felezőpontjától)

Ez a pont a háromszög beírható körének a középpontja (K)

A pont és az oldalakat érintő pontok távolsága a beírható kör sugara (r)

A beírható kör középpontja mindig a háromszögön belül van függetlenül attól, hogy hegyesszögű, derékszögű, vagy tompaszögű a háromszög

Háromszögek magasságpontja



Ha berajzoljuk (vagy megszerkesztjük) a háromszög magasságait (magasságvonalait), akkor azok egy pontban metszik egymást

Szerkesztés:

1) Beleszúrjuk a körzőnket az egyik csúcsba, kinyitjuk akkorára, hogy a vele szemben lévő oldalt két pontban metssze (ha ez nem oldható meg, akkor a szemben lévő oldalt meghosszabbítjuk)
2) Beleszúrjuk a körzőnket az egyik metszéspontba, és tetszőleges nagyságúra kinyitva a körzőt körzünk
3) Beleszúrjuk a körzőnket a másik metszéspontba is, és ugyanazzal a nagysággal körzünk, mint az előbb
4) A két körív metszéspontjait összekötjük a csúccsal (a 3 pontnak egy egyenesen kell lennie)

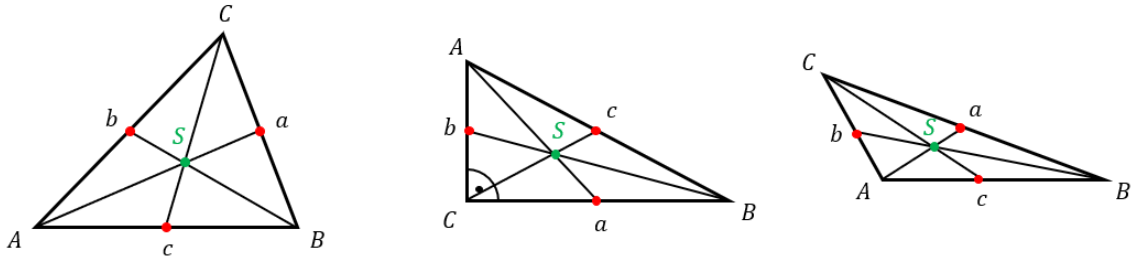
Ez a pont a háromszög magasságpontja (M)

A magasságpont:

- Hegyesszögű háromszögek esetén a háromszögön belül van
- Derékszögű háromszögek esetén a derékszögnél lévő csúcs a magasságpont (itt nem kell megrajzolni a magasságokat, ugyanis a 2 befogó 2 magasság is egyben)
- Tompaszögű háromszögek esetén a háromszögön kívül van

Elegendő 2 magasságvonalat berajzolni, nem muszáj mind a 3-at

Háromszögek súlypontja



Ha összekötjük a háromszögek csúcsait a velük szemben lévő oldalak felezőpontjával, akkor megkapjuk a háromszög súlyvonalait

A súlyvonalak egy pontban metszik egymást

Felezőpont szerkesztése:

1) Beleszúrjuk a körzőnket az egyik csúcsba, kinyitjuk nagyobbra, mint az oldal fele, és körzünk

2) Ugyanezzel a távolsággal körzünk a másik csúcsból is

3) A két körív metszéspontjait összekötjük, ahol metszi az oldalt, az a felezőpont

Ez a pont a háromszög súlypontja (S)

A háromszög súlypontja az a pont, amin ha alátámasztanánk, akkor egyensúlyban maradna

A súlypont a súlyvonalakat $1:2$ arányban osztja fel

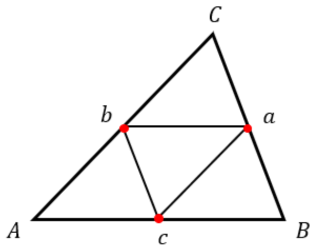
Ez azt jelenti, hogy a csúcsot és a súlypontot összekötő szakasz 2-szer olyan hosszú lesz, mint a felezőpontot a súlyponttal összekötő szakasz

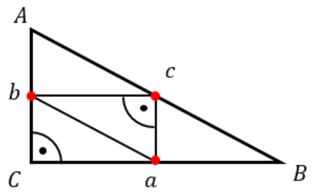
A súlyvonal felezni fogja a háromszög területét

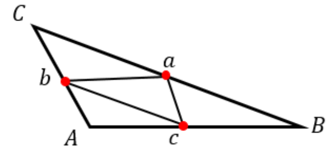
A súlypont mindig a háromszögön belül lesz függetlenül attól, hogy hegyesszögű, derékszögű, vagy tompaszögű a háromszög

Elegendő 2 súlyvonalat berajzolni, nem muszáj mind a 3-at

Háromszögek középvonalai







Ha a háromszög két oldalának összekötjük a felezőpontjait, akkor a háromszög középvonalait kapjuk meg

A középvonalak behúzásából kapunk egy háromszöget a háromszögön belül

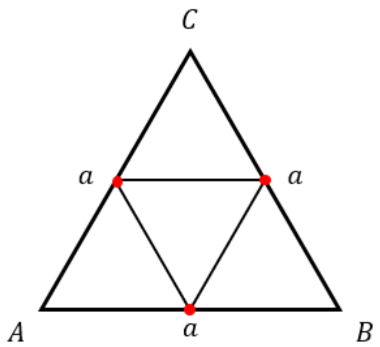
Felezőpont szerkesztése:

1) Beleszúrjuk a körzőnket az egyik csúcsba, kinyitjuk nagyobbra, mint az oldal fele, és körzünk
2) Ugyanezzel a távolsággal körzünk a másik csúcsból is
3) A két körív metszéspontjait összekötjük, és ahol metszi az oldalt, az a felezőpont

A középvonalak párhuzamosak a velük szemben lévő oldallal

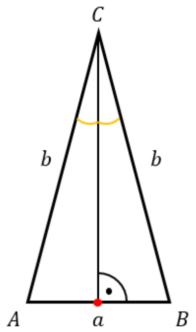
A középvonal fele olyan hosszú, mint a vele szemben lévő oldal

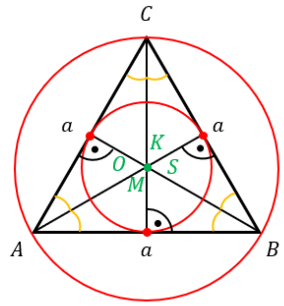
A szabályos háromszög középvonalai 4 egyenlő szabályos háromszögre bontják az eredeti háromszöget



Speciális háromszögek vonalai

Egyenlő szárú háromszög	Szabályos háromszög
Az a vonal, ami a szimmetria tengelyre esik egyszerre lesz oldalfelező merőleges, szögfelező egyenes, magasságvonal és súlyvonal is	Mind a 3 vonal egyszerre lesz oldalfelező merőleges, szögfelező egyenes, magasságvonal és súlyvonal is Az összes pont egybeesik (a beírható kör, a köré írható kör középpontja, a magasságpont és a súlypont) A beírható kör az oldalak felezőpontjában érinti az oldalakat



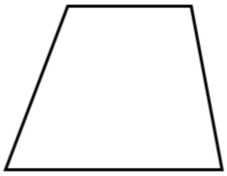
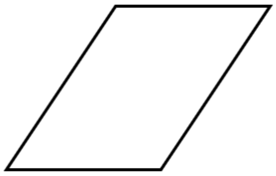
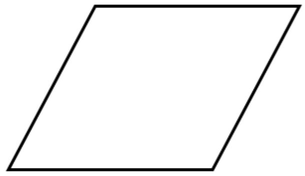


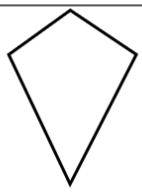
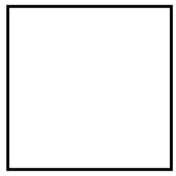
Háromszögek különböző pontjainak összefoglalása

	Oldalfelező merőlegesek	Szögfelező egyenesek	Magasságvonalak	Súlyvonalak
Hogy kapjuk meg?	Az oldalak felezőpontjaira merőlegeseket állítunk	Elfelezzük a szögeket	Csúcsból a szemközti oldalra merőlegest állítunk	Csúcsot a szemközti oldal felező pontjával kötjük össze
Specialitás	Köré írható kör	Beírható kör		
Metszéspont neve	Köré írható kör középpontja	Beírható kör középpontja	Magasságpont	Súlypont
Metszéspont helye	Hegyesszögű: Belül Derékszögű: Átfogó felén Tompaszögű: Kívül	Mindig a körön belül	Hegyesszögű: Belül Derékszögű: Derékszögnél Tompaszögű: Kívül	Mindig a körön belül

Négyszögek

Négyszögek fajtái

Trapéz	Paralelogramma	Rombusz
		
Olyan négyszög, aminek van 1 párhuzamos oldalpárja	Olyan négyszög, aminek van 2 párhuzamos oldalpárja	Olyan paralelogramma, aminek minden oldala egyenlő hosszúságú

Deltoid	Téglalap	Négyzet
		
Olyan négyszög, aminek az egyik átlója szimmetria tengely	Olyan paralelogramma, aminek minden szöge derékszög	Olyan téglalap, aminek minden oldala egyenlő hosszúságú

Trapéz

Olyan négyszög, aminek van 1 párhuzamos oldalpárja

A párhuzamos oldalakat hívjuk **alap**oknak

A másik két oldalt hívjuk **szár**aknak

Alapvetően nem szimmetrikus

Alapvetően az átlói **nem egyenlő** hosszúak

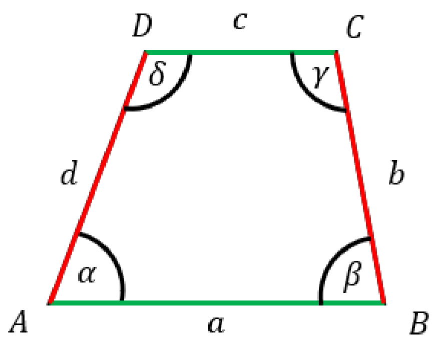
Átlói **nem felezik** egymást

Átlói **nem merőlegesek** egymásra

Az 1 száron fekvő két szögének összege 180°

$\alpha + \delta = 180°$

$\beta + \gamma = 180°$



Szimmetrikus trapéz (Húrtrapéz)

Szimmetrikus

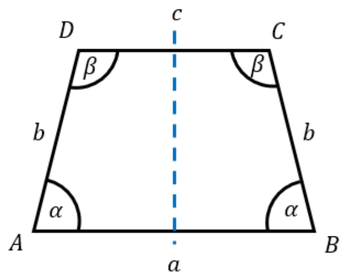
Szárai egyenlő hosszúak

Átlói egyenlő hosszúak

Az átlói **nem felezik** egymást

Átlói a szimmetria tengelyen metszik egymást

Az alapokon fekvő szögei ugyanakkorák a szimmetria miatt



Derékszögű trapéz

Van 2 derékszöge

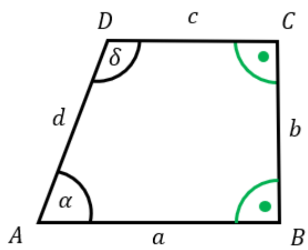
Nincs olyan trapéz, aminek csak 1 derékszöge van

Nem szimmetrikus

Szárai nem egyenlő hosszúak

Átlói **nem egyenlő** hosszúak

Az átlói **nem felezik** egymást

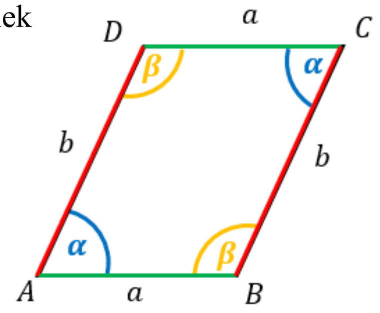


Paralelogramma

Olyan négyszög, aminek van 2 párhuzamos oldalpárja

A trapéz minden tulajdonsága igaz lesz rá, lesz pár új tulajdonsága pluszba

Az egymással szemben lévő oldalai azonos hosszúságúak lesznek



Középpontosan szimmetrikus, tengelyesen nem

A középpont, amire szimmetrikus az átlók metszéspontja lesz

Átlói **nem egyenlő** hosszúak

Átlói **felezik** egymást

Átlói **nem merőlegesek** egymásra

Az 1 **oldalon** fekvő két szögének összege 180°

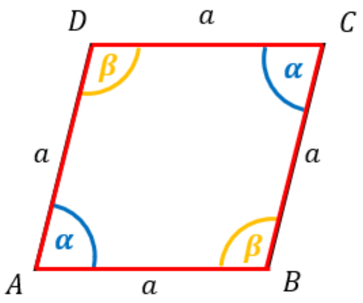
Az egymással szemben lévő szögei egyenlő nagyságúak

Rombusz

Olyan paralelogramma, aminek minden oldala egyenlő hosszúságú

A paralelogramma minden tulajdonsága igaz lesz rá, lesz pár új tulajdonsága pluszba

Mind a 4 oldala ugyanolyan hosszúságú



Középpontosan és **tengelyesen is** szimmetrikus

A középpont, amire szimmetrikus az átlók metszéspontja lesz

2 szimmetria tengelye is lesz, ezek az átlói lesznek

Átlói **nem egyenlő** hosszúak

Átlói **felezik** egymást

Átlói **merőlegesek** egymásra (Változás a sima paralelogrammához képest)

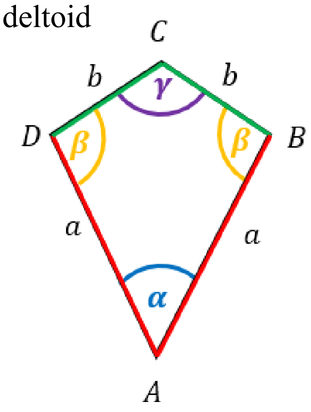
Az 1 oldalon fekvő két szögének összege 180°

Az egymással szemben lévő szögei egyenlő nagyságúak

Deltoid

Olyan négyszög, aminek egyik átlója szimmetria tengely

A trapéz, paralelogramma, rombusz tulajdonságaitól függetlenek a deltoid tulajdonságai



Az egymás melletti oldalai egyenlő hosszúságúak

Tengelyesen szimmetrikus, középpontosan nem

1 szimmetria tengelye lesz, ez az egyik átlója

Átlói <u>**nem egyenlő**</u> hosszúak

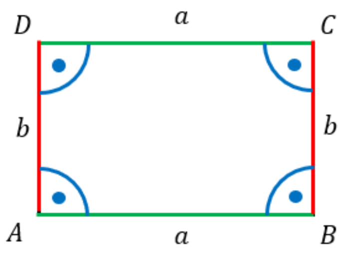
Átlói közül a szimmetria tengely átló <u>**felezi**</u> a nem szimmetria tengely átlót

Átlói <u>**merőlegesek**</u> egymásra

A szimmetria tengely átló felezi azokat a szögeket, amiken átmegy

Azok a szögek, amiken nem megy át a szimmetria tengely azonos nagyságúak lesznek

Téglalap



Olyan paralelogramma, aminek minden szöge derékszög

Egymás melletti oldalai egymásra merőlegesek

Az egymással szemben lévő oldalai azonos hosszúságúak lesznek

A paralelogramma minden tulajdonsága igaz lesz rá, lesz pár új tulajdonsága pluszba

Középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus (Tengelyes szimmetria új a paralelogrammához képest)

A középpont, amire szimmetrikus az átlók metszéspontja lesz

2 szimmetria tengelye is lesz, ezek az oldalak felező pontjait összekötő szakaszok lesznek

A szimmetria tengelyek metszéspontja a téglalap középpontja lesz

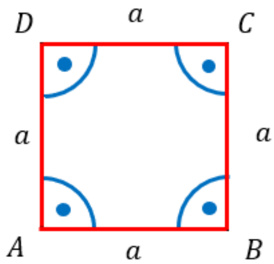
Átlói **egyenlő** hosszúak

Átlói **felezik** egymást

Átlói **nem merőlegesek** egymásra

Minden szöge 90°

Négyzet



Olyan téglalap, aminek minden oldala egyenlő hosszúságú

Olyan rombusz, aminek minden szöge derékszög

A téglalap és a rombusz minden tulajdonsága igaz lesz rá

Mind a 4 oldala ugyanolyan hosszúságú

Középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus

A középpont, amire szimmetrikus az átlók metszéspontja lesz

4 szimmetria tengelye is lesz:

- 2 az oldalak felező pontjait összekötő szakasz lesz (téglalap)
- 2 a négyzet átlója lesz (rombusz)

A szimmetria tengelyek metszéspontja a négyzet középpontja lesz

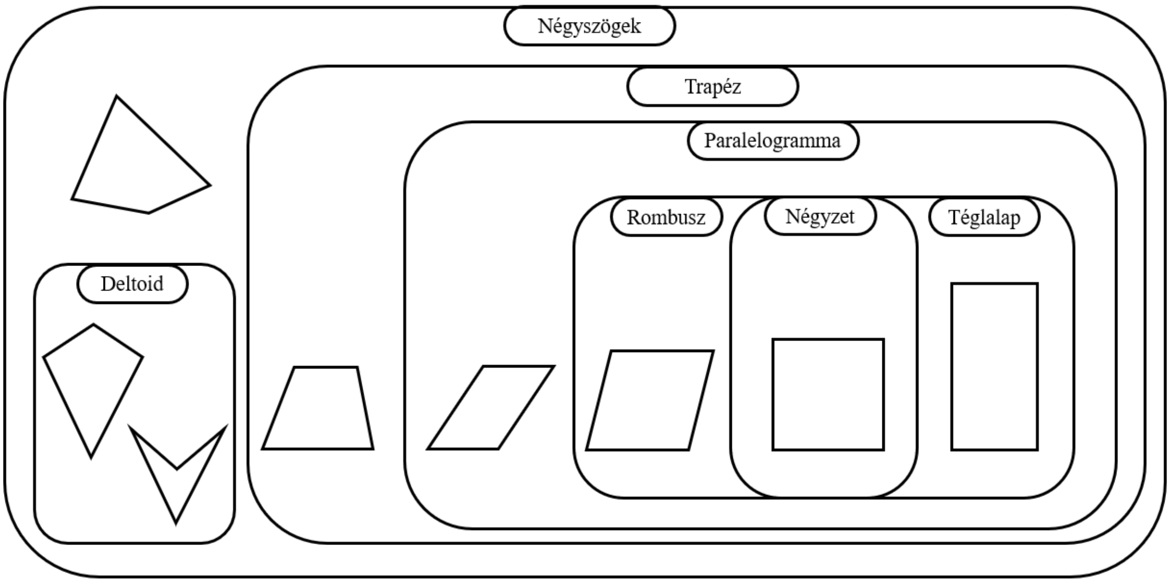
Átlói **egyenlő** hosszúak

Átlói **felezik** egymást

Átlói **merőlegesek** egymásra

Minden szöge 90°

Négyszögek összefoglalása



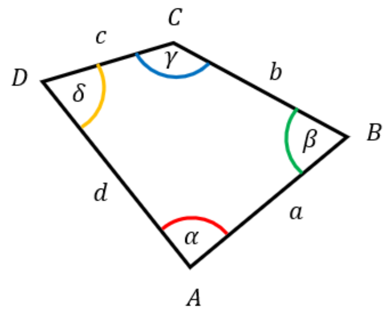
<u>Minden négyzet</u>: téglalap is, rombusz is, paralelogramma is, trapéz is, **deltoid!** is

<u>Minden téglalap</u>: paralelogramma is, trapéz is

<u>Minden rombusz</u>: paralelogramma is, trapéz is

<u>Minden paralelogramma</u>: trapéz is

Négyszögek



Olyan sokszögek, amelyeknek 4 oldala és 4 csúcsa van

Általános négyszögeknek nincs párhuzamos oldalpárja, mind a 4 oldal és mind a 4 szög különböző nagyságú általában (de lehetnek ugyanakkora szögek és oldalak is)

Oldalak, csúcsok elnevezése:

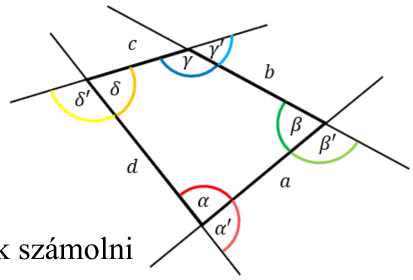
- A csúcsokat az ABC **nagy** betűivel nevezzük el (A, B, C, D)
- Az oldalakat az ABC **kis** betűivel nevezzük el (a, b, c, d), az ugyanolyan hosszúságú oldalakat ugyanazzal a betűvel szoktuk jelölni
- Ha nincsenek ugyanolyan hosszúságú oldalak: A csúcsok mellett lesz a hozzátartozó oldal (A csúcs mellett lesz a oldal, B csúcs mellett lesz b oldal…)

Szögek elnevezése: Hasonlóan, mint a háromszögnél:

- A csúcsnál α
- B csúcsnál β
- C csúcsnál γ
- D csúcsnál δ

Négyszögek átlóit e-vel és f-fel szoktuk jelölni (négyzet esetén d-vel)

Négyszögek szögei



Négyszög belső szögeinek összege mindig 360°

$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°}$

Ha a 4 szög közül ismerjük 3 szög nagyságát, a 4.-et ki tudjuk számolni

Lesznek olyan speciális négyszögek, ahol elegendő 1 szög nagyságát ismerni, a többi pedig ez alapján lesz meghatározható (Paralelogramma, Szimmetrikus trapéz)

Lesznek olyan négyszögek, amiknek tudjuk mind a 4 szögét, mert ugyanakkorák (Téglalap, Négyzet)

Négyszög külső szögeit úgy kapjuk, ha meghosszabbítjuk az oldalakat

Négyszög külső szögeit vesszővel fogjuk jelölni

Négyszög külső szögei:

- A csúcsnál α-hoz tartozó külső szög: α' szög
- B csúcsnál β-hoz tartozó külső szög: β' szög
- C csúcsnál γ-hoz tartozó külső szög: γ' szög
- D csúcsnál δ-hoz tartozó külső szög: δ' szög

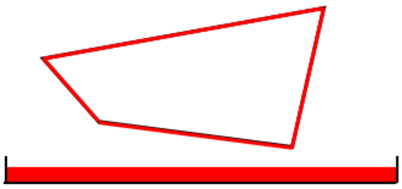
Belső szög és a hozzátartozó külső szög összege 180°

- $\alpha + \alpha' = 180°$
- $\beta + \beta' = 180°$
- $\gamma + \gamma' = 180°$
- $\delta + \delta' = 180°$

Külső szögek összege 360°

$\boldsymbol{\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360°}$

Konvex és konkáv alakzatok



Konvex

Konvex alakzatok: Azok az alakzatok, amiknek bármelyik két pontját összekötve egy egyenessel az egyenes **minden része az alakzaton belül lesz**

Másképpen megfogalmazva: Ha a földön van egy vékony festékes tálca, akkor, ha a konvex alakzatot elkezdjük forgatni a festékben minden oldalát **be tudjuk** festeni

Konvex alakzatnak **nincs** homorúszöge (180°-nál nagyobb)

Konkáv

Konkáv alakzatok: Azok az alakzatok, amik esetén tudunk találni két olyan pontot az alakzaton belül, amiket, ha összekötünk egy egyenessel, akkor az egyenes **nem minden része lesz az alakzaton belül**

Másképpen megfogalmazva: Ha a földön van egy vékony festékes tálca, akkor ha a konkáv alakzatot elkezdjük forgatni a festékben **nem tudjuk** minden oldalát befesteni

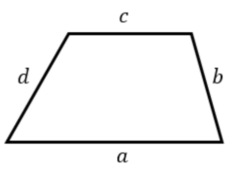
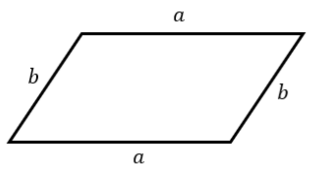
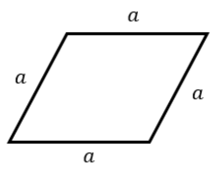
Konkáv alakzatnak **van** homorúszöge (180°-nál nagyobb)

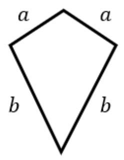
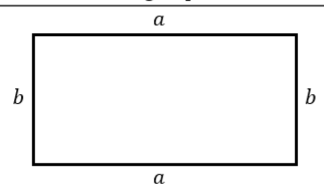
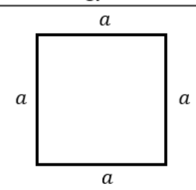
Példák:

Konvex alakzatok: Minden háromszög, Trapéz, Paralelogramma, Rombusz, Téglalap, Négyzet, Deltoidok egy része, Általános négyszögek egy része, Szabályos ötszög, Ötszögek egy része, Szabályos hatszög, Hatszögek egy része, Kör …

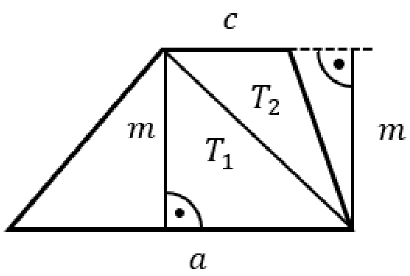
Konkáv alakzatok: Deltoidok másik része, Általános négyszögek másik része, Ötszögek másik része, Hatszögek másik része …

Négyszögek kerülete

<table>
<tr><td>Trapéz</td><td>Paralelogramma</td><td>Rombusz</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{K = a + b + c + d}$</td><td>$\boldsymbol{K = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b)}$</td><td>$\boldsymbol{K = 4a}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Deltoid</td><td>Téglalap</td><td>Négyzet</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{K = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b)}$</td><td>$\boldsymbol{K = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b)}$</td><td>$\boldsymbol{K = 4a}$</td></tr>
</table>

Trapéz területe



Szimmetrikus trapéz esetén, ha behúzzuk a rövidebb alap két végpontjába a magasságokat, akkor kapunk egy téglalapot középen, és 2 ugyanolyan derékszögű háromszöget a jobb és bal oldalon

Derékszögű trapéz esetén egy téglalapra és egy derékszögű háromszögre tudjuk felbontani az alakzatot

Ez a módszer működhet általános trapéz esetén is, csak általános trapéz esetén nem tudjuk a háromszögek szélességét (hacsak nincs megadva)

A trapéz magassága az alapok távolsága

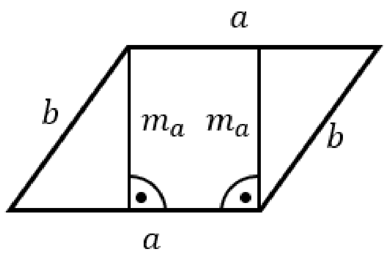
Általános trapéz területe esetén behúzzuk a trapéz egyik átlóját, ez két háromszögre fogja bontani a trapézt

Az egyik háromszög alapja a hosszabb alap lesz, a másik háromszög alapja a rövidebb alap lesz, mind a két háromszög magassága meg fog egyezni a trapéz magasságával

A trapéz területe a két háromszög területének összegével fog megegyezni:

$$\boldsymbol{T} = T_1 + T_2 = \frac{a \cdot m}{2} + \frac{c \cdot m}{2} = \frac{a \cdot m + c \cdot m}{2} = \boldsymbol{\frac{(a + c) \cdot m}{2}}$$

Paralelogramma területe



Paralelogramma esetén, ha behúzunk két magasságot, akkor kapunk középen egy téglalapot, jobb és bal oldalon pedig 2 ugyanolyan derékszögű háromszöget

Ha az egyik derékszögű háromszöget átrakjuk a másik derékszögű háromszög alá/fölé, akkor egy téglalapot fogunk kapni

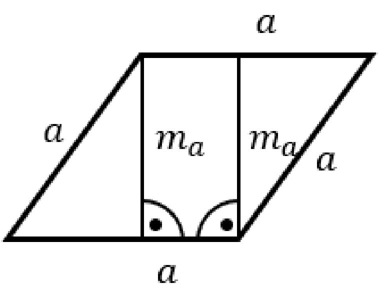
A téglalap szélessége megegyezik a paralelogramma oldalával, magassága is meg fog egyezni a paralelogramma magasságával

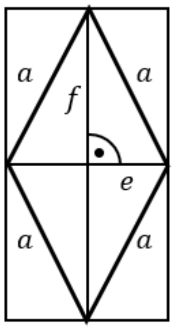
Ez azt jelenti, hogy egy a oldalú, m_a magasságú paralelogramma területe megegyezik egy ugyanilyen széles, ugyanilyen magas téglalap területével

A paralelogramma magassága a szemben lévő oldalak távolsága (2 magasság is van)

Paralelogramma területe: $\boldsymbol{T = a \cdot m_a = b \cdot m_b}$

Rombusz területe





A rombusz egy speciális paralelogramma (minden oldala egyenlő), tehát ugyanúgy ki tudjuk számolni a területét, mint egy paralelogrammának

<u>Rombusz területe</u>: $\boldsymbol{T = a \cdot m_a}$

A rombusz területét egy másik módszerrel is ki lehet számolni:

A rombusz átlóit e-vel és f-fel szoktuk jelölni

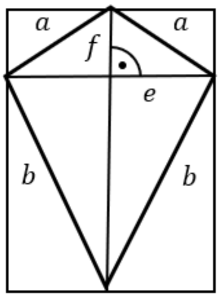
A rombusz átlói merőlegesek egymásra, ez azt jelenti, hogy köré tudunk rajzolni egy olyan téglalapot, aminek a szélessége megegyezik az egyik átló hosszával, magassága pedig megegyezik a másik átló hosszával, ez alapján:

<u>Rombusz területe</u>: $\boldsymbol{T = \frac{e \cdot f}{2}}$

Mikor melyiket használjuk?

- Ez attól függ, hogy milyen adatok vannak megadva, ha a feladat az oldalakat és a magasságot adja meg, akkor az első összefüggést használjuk, ha az átlókat, akkor a másodikat

Deltoid területe



A deltoid köré tudunk rajzolni egy téglalapot, aminek a szélessége megegyezik az egyik átló hosszával, magassága pedig megegyezik a másik átló hosszával

<u>**Deltoid területe**</u>: $\boldsymbol{T = \frac{e \cdot f}{2}}$

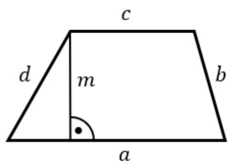
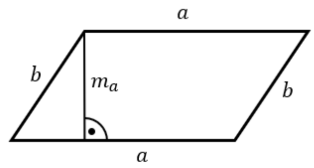
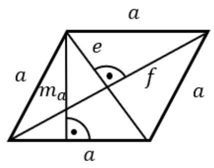
Egy deltoidnak csak ezzel az összefüggéssel tudjuk kiszámolni a területét, tehát az oldalak hossza nem fog számítani (nyilván az oldalak hossza befolyásolja az átlók hosszát is)

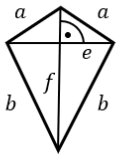
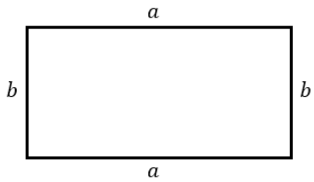
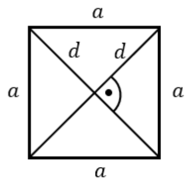
Úgy is gondolkozhattunk volna, hogy a szimmetriatengely-átló felezi a másik átlót, így két ugyanakkora háromszöget kapunk, amiknek az alapja a szimmetriatengely-átló (f), magassága pedig a másik átló fele ($\frac{e}{2}$):

$$\boldsymbol{T = \frac{\frac{e}{2} \cdot f}{2} \cdot 2 = \frac{e}{2} \cdot f = \frac{e \cdot f}{2}}$$

Az összefüggés igaz konvex (szokásos, papír sárkány) és konkáv (ritka, iránytű) deltoidok esetén is

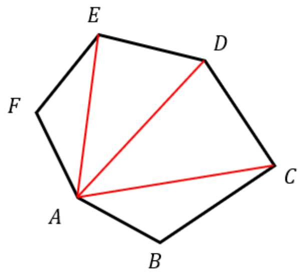
Négyszögek területe

Trapéz	Paralelogramma	Rombusz
		
$\boldsymbol{T = \frac{a+c}{2} \cdot m}$	$\boldsymbol{T = a \cdot m_a}$	$\boldsymbol{T = a \cdot m_a = \frac{e \cdot f}{2}}$

Deltoid	Téglalap	Négyzet
		
$\boldsymbol{T = \frac{e \cdot f}{2}}$	$\boldsymbol{T = a \cdot b}$	$\boldsymbol{T = a^2 = \frac{d^2}{2}}$

Sokszögek

Sokszögek átlói



Egy csúcsból 3-mal kevesebb átlót tudunk behúzni, mint a csúcsok száma:

- Nem tudunk átlót húzni önmagába
- Nem tudunk átlót húzni a 2 szomszédos csúcsba (azok az oldalak lesznek)

Legyen a sokszög n oldalú (n csúcsa is van)

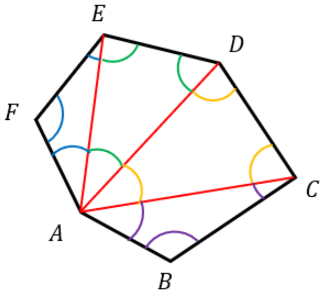
Egy csúcsból húzható átlók száma: $\boldsymbol{n-3}$

Minden csúcsból $n-3$ átlót tudunk behúzni

Az összes behúzható átló száma:

Azért kell osztani 2-vel, mert minden átlót kétszer számoltunk (az átló egyik végpontjánál és a másik végpontjánál is)

Sokszögek szögei



Az egy csúcsból húzott átlók 2-vel kevesebb háromszögre fogják bontani a sokszöget a csúcsok számánál → **Háromszögek száma**: $\boldsymbol{n-2}$

A belső szögek összege: $\boldsymbol{(n-2)\cdot 180°}$

Szabályos sokszögek esetén, ha egy belső szögre vagyunk kíváncsiak, akkor a belső szögek összegét elosztjuk a csúcsok számával

Egy belső szög nagysága:

A külső szögek összege mindig $360°$ lesz függetlenül a csúcsok számától

Egy külső szög nagyságát úgy kapjuk meg, ha $360°$-ot elosztjuk a csúcsok számával:

Egy külső szög nagysága:

Minél több csúcsa van a szabályos sokszögnek, annál nagyobbak lesznek a belső szögei, és annál kisebbek lesznek a külső szögei

Egy belső szög és a hozzátartozó külső szög összege mindig $180°$ lesz

Sokszögek oldalai, kerülete, területe

Sokszögek: Olyan síkidomok, amiket csak egyenes vonalak határolnak

Az ilyen típusú feladatoknál általában egy téglalapból vannak kivágva kisebb téglalapok, így kapunk egy sokszöget

A sokszög oldalai vízszintesek és függőlegesek szoktak lenni

A feladat 3 dologra szokott rákérdezni:

- Hiányzó oldalak hosszára

Hiányzó oldal hossza esetén meg kell nézni, hogy melyik másik oldalakból tudjuk megkapni a hiányzó oldal hosszát

Ha a hiányzó oldal vízszintes, akkor a vízszintes oldalakat fogjuk megnézni, ha függőleges, akkor a függőleges oldalakat

Általában két megadott oldal összegből vagy különbségéből tudjuk kiszámolni a hiányzó oldal hosszát

Nem mindig abban a sorrendben fogjuk meghatározni az oldalakat, amilyen sorrendben meg vannak adva (ABC sorrend)

- A sokszög kerületére

Sokszög kerületét kétféle módon lehet meghatározni:

- Az egyik mód, hogy kiválasztunk egy csúcsot (én a bal alsót szoktam) és körbemegyünk az oldalak mentén, közben összeadjuk az oldalak hosszúságát, amíg vissza nem érünk a kiválasztott csúcshoz
- A másik mód, hogy kiszámoljuk a nagy téglalap kerületét (amiből ki lettek vágva részek), figyelve a belső kivágásokra

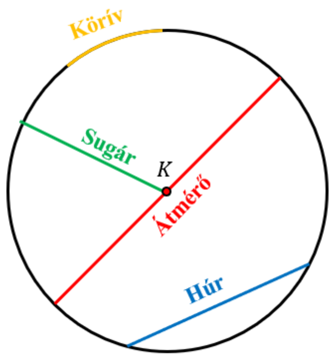
- A sokszög területére

A sokszög területét is kétféle módon lehet meghatározni:

- Az egyik mód, hogy kiszámoljuk a nagy téglalap területét, és ebből vonjuk ki a kivágott részek területét, amiket szintén kiszámolunk
- A másik mód, hogy a sokszöget felbontjuk téglalapokra, amiknek kiszámoljuk a területét, és ezeket összeadjuk

Kör

Kör részei



Kör középpontja: Az a pont, ahova beleszúrjuk a körzőnket, jele: K vagy O

Körvonal: Azok a pontok, amik ugyanolyan távol vannak egy megadott ponttól (kör középpontjától)

Körlap: A körvonalon belüli pontok alkotják

Húr: A körvonal két pontját összekötő szakasz

Átmérő: A leghosszabb húr, ami átmegy a középponton, jele: $d,\ D$ (diameter)

Sugár: A kör középpontját és a körvonal egy pontját összekötő szakasz, jele: $r,\ R$ (radius)

Körív: A körvonal egy darabja (Ha behúzunk két sugarat, a körív a sugarak végpontjai között lesz)

Körcikk: Egy körív és két sugara által határolt rész

Körszelet: Egy körív két végpontját összekötő húr és a körív által határolt alakzat

Kör kerülete

Sokszögek kerületét úgy tudjuk kiszámolni, hogy az oldalaik hosszát összeadjuk

Mi a helyzet a körrel?

- Kör kerületét úgy tudnánk meghatározni, hogy egy madzagot rakunk a körvonalra, és a madzagot kiegyenesítve rárakjuk egy vonalzóra (Nem túl tudományos)

A kör kerülete függ az átmérőtől (sugártól), minél nagyobb az átmérő, annál nagyobb a kör kerülete, és minél kisebb az átmérő, annál kisebb a kör kerülete

A kör kerületének és átmérőjének aránya mindig ugyanannyi

Ezt az arányt π (pí)-vel jelöljük

$$\pi = \frac{K}{d}$$

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{3,14}15926535\ldots$$

A π egy olyan tizedes tört, aminek a tizedesjegyei között nincs ismétlődés

A π értéke mindig ugyanannyi, ha számológéppel számolunk, akkor van külön π gomb is, mindig azzal számoljunk, hogy pontosabb értéket kapjunk

Ha meg van adva az átmérő (d) vagy a sugár (r), akkor ki tudjuk számolni a kör kerületét

<u>Kör kerülete</u>: $\boldsymbol{K = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi}$

Kör területe

Egy kör területét úgy tudjuk meghatározni, hogy a sugár négyzetét szorozzuk π-vel

<u>Kör területe</u>: $\boldsymbol{T = r^2 \cdot \pi}$

<u>Kör területe</u>: $\boldsymbol{T} = r^2 \cdot \pi = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{d^2}{4} \cdot \pi = \boldsymbol{\frac{d^2 \cdot \pi}{4}}$

Átmérővel nem nagyon szoktunk területet számolni, ha átmérő van megadva, kiszámoljuk belőle a kör sugarát, és úgy számoljuk ki a területet

Kerület és terület egymáshoz viszonyítva:

- A kerület és a terület 2 egységnyi sugár esetén egyezik meg ($2\ cm,\ 2\ dm,\ 2\ m\ldots$)
- 2-nél kisebb sugár esetén a kerület a nagyobb
- 2-nél nagyobb sugár esetén a terület a nagyobb

Felszín

Testek esetén tudunk felszínt számolni

A testek felszíne a lapok területének összege

A lapok legtöbbször téglalapok és négyzetek

Téglalap területét úgy számoljuk ki, hogy a szélességét és a magasságát összeszorozzuk egymással

Négyzetnek is ugyanígy számoljuk ki a területét, csak négyzet esetén a szélesség és a magasság megegyezik egymással

A lapok területének mértékegysége az oldalak mértékegységének négyzete lesz (cm^2, dm^2, m^2...)

Arra figyeljük, hogy ha nem azonos mértékegységben vannak megadva az oldalak, akkor végezzük el az átváltást

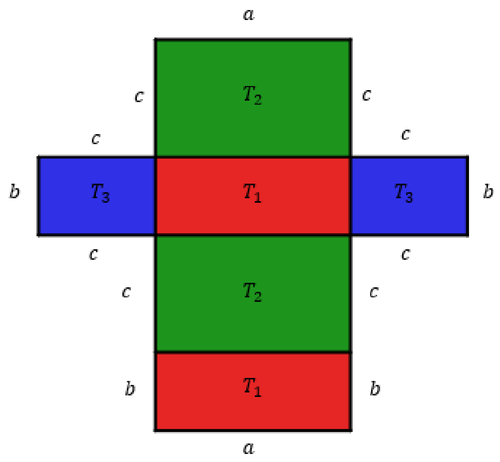
A felszín mértékegysége ugyanolyan lesz, mint a terület mértékegysége (cm^2, dm^2, m^2...)

Ha át kell váltanunk egyik mértékegységről a másikra, akkor ugyanazok a váltószámok érvényesek, mint terület esetén

Érdemesebb a feladat elején a hosszúságokat átváltani a kívánt mértékegységre, mert így nem kell a végén a nehezebb átváltást elvégezni

Felszín jele: $\boldsymbol{A}$ (Area latin (angol) szó miatt)

Téglatest felszíne



Egy téglatestnek 6 téglalap alakú lapja van, felszínét úgy kapjuk meg, hogy a 6 lap területét összeadjuk

Mivel az egymással szemben lévő lapok ugyanakkorák, ezért elegendő 3 különböző lapnak kiszámolni a területét

<u>Téglatest felszíne</u>: $\boldsymbol{A} = T_1 + T_1 + T_2 + T_2 + T_3 + T_3 = \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{T_1} + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{T_2} + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{T_3}$

Más alakban: $\boldsymbol{A} = \mathbf{2} \cdot (\boldsymbol{T_1} + \boldsymbol{T_2} + \boldsymbol{T_3})$

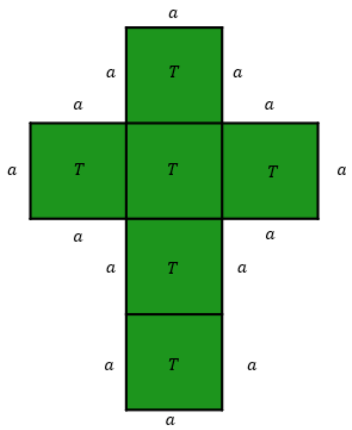
Mindegy, hogy melyik lapokat jelöljük T_1, T_2, T_3-mal

Egy téglatestnek 3 mérete van (Szélesség, mélység, magasság)

A lapok területének kiszámításakor 2-2-t szorzunk össze egymással (3 párosítás)

Ha már profibbak leszünk: $\boldsymbol{A} = \mathbf{2} \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$

Kocka felszíne

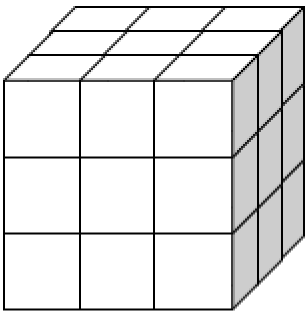


Egy kockának 6 négyzet lapja van, felszínét pedig úgy kapjuk meg, hogy a 6 lap területét összeadjuk

Mivel minden lapja ugyanakkora, ezért elegendő 1 lap területét kiszámolni

<u>**Kocka felszíne**</u>: $\boldsymbol{A} = T + T + T + T + T + T = \mathbf{6} \cdot \boldsymbol{T} = \mathbf{6} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$

Felszín kiskockákkal



A testeket kirakhatjuk kiskockákból vagy téglatestekből is (leggyakrabban kiskockából szoktuk kirakni)

Az ábrán látható nagy kocka $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kiskockából van kirakva

Fontos, hogy ilyenkor a felszínt nem úgy számoljuk ki, hogy kiszámoljuk 1 kiskocka felszínét, és azt szorozzuk meg a kiskockák számával

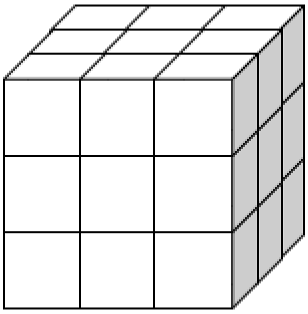
Azért nem így fogunk számolni, mert azokat a lapokat nem számolhatjuk a felszínbe, amik egy másik kiskockához csatlakoznak (amikkel össze vannak ragasztva), ez a módszer csak térfogatnál fog működni

Lépések a felszín kiszámításához:

- Meghatározzuk 1 kiskocka 1 lapjának a területét ($T_{kis} = a \cdot a$)
- Meghatározzuk, hogy a nagy kocka 1 lapja hány kiskockányi lapból áll (Ábrán: 9)
- A kiskocka 1 lapjának területét megszorozzuk a lapok számával, így megkapjuk a nagy kocka 1 lapjának területét (Ábrán: $T_{nagy} = 9 \cdot T_{kis}$)

Ezt beszorozzuk 6-tal (6 ugyanolyan lapja van a nagykockának): $A = 6 \cdot T_{nagy}$

Felszín változása kiskockák elvétele/hozzáadása esetén



Ha a nagyobb testből kiskockákat veszünk el, akkor a felszín **csökkenhet**, **nőhet**, de olyan is van, hogy **nem változik**

Ez attól fog függni, hogy honnan vesszük el a kiskockákat

3 helyről tudunk kiskockákat elvenni:

- Vehetünk el kiskockát a nagy kocka sarkáról (csúcsáról)
- Vehetünk el kiskockát a nagy kocka egy lapjának közepéről
- Vehetünk el kiskockát a nagy kocka egy élének közepéről

Felszín változása ezekben az esetekben:

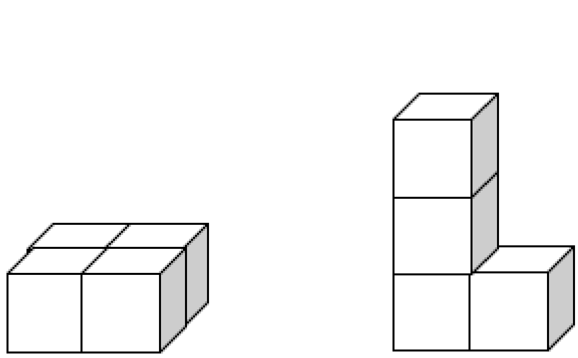
- Ha a nagy kocka sarkáról veszünk el kiskockát, akkor a felszín **nem fog megváltozni**, ugyanis 3 lap el fog tűnni, de 3 pluszba meg fog jelenni (azok a lapok, amik eddig az elvett kocka lapjaihoz csatlakoztak)
- Ha a nagy kocka lapjának közepéről veszünk el 1 kiskockát, akkor a felszín meg fog nőni, ugyanis 1 lap fog eltűnni, viszont 5 lap meg fog jelenni pluszba (azok a lapok, amik eddig az elvett kocka lapjaihoz csatlakoztak), így a test felszíne **4 kiskockányi lappal fog megnőni**
- Ha a nagy kocka élének közepéről veszünk el 1 kiskockát, akkor a felszín meg fog nőni, ugyanis 2 lap fog eltűnni, viszont 4 lap meg fog jelenni pluszba (azok a lapok,

amik eddig az elvett kocka lapjaihoz csatlakoztak), így a test felszíne **2 kiskockányi lappal fog megnőni**

Akkor csökken a felszín, ha például elveszünk több kiskockát is (pl. az első lapot teljesen)

Ha kiskockákat adunk hozzá, akkor általában növekedni fog a felszín, de van olyan eset is, hogy csökken

Felszín kiszámításának módjai



Ha kiskockából nem egy nagyobb kockát, hanem másmilyen testet csináltunk, akkor többféle módon is kiszámolhatjuk a test felszínét

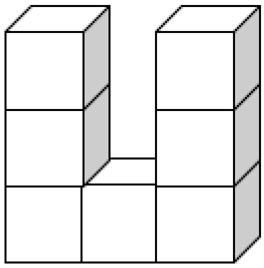
Fontos, hogy ebben az esetben nem mindegy a kockák elhelyezkedése egymáshoz képest

Bármilyen módszerrel is számoljuk ki felszínt, első lépésként meg kell határoznunk 1 kiskocka 1 lapjának a területét

Módszerek:

- Megszámoljuk kiskockánként a lapok számát, ezeket összeadjuk, és megszorozzuk 1 lap területével
- Kiszámoljuk 1 kiskocka felszínét, beszorozzuk a kiskockák számával, és ebből kivonjuk az ”összeragasztott” lapok területét (itt figyelni kell, hogy duplán számoljuk az összeragasztott lapokat)
- Ha a kiskockákból egy szabályos testet kapunk, akkor a testnek meghatározzuk az oldalait, és úgy számoljuk ki a felszínt

Felszín kiszámítása trükk



Ha nagyon bonyolult a kirakott test (6-7-8-9 kiskockából van kirakva), akkor alkalmazhatunk egy trükköt (ha kevesebb kiskockából van kirakva, akkor is alkalmazható)

<u>A trükk</u>: Ugyanazt látjuk elölről, mint hátulról, ugyanazt látjuk jobbról, mint balról, ugyanazt látjuk felülről, mint alulról

Vagyis, ha ránézünk elölről (↗), jobbról (←) és felülről (↓), kiszámoljuk ezekből a nézetekből a lapok területét (vagy a lapok számát), akkor ezt csak meg kell szoroznunk 2-vel

$\boldsymbol{A = 2 \cdot \left(T_{elöl} + T_{oldal} + T_{felül}\right)}$

Nem jelent gondot, ha a kockák el vannak csúsztatva egymáshoz képest (ami elöl bemegy, hátul kijön)

Ha ezzel a módszerrel számolunk, akkor nagyon kell figyelni, amikor U alakú alakzattal találkozunk (vagy olyannal, aminek vannak ”belső” lapjai is)

Ilyenkor az összefüggés kiegészül:

$\boldsymbol{A = 2 \cdot \left(T_{elöl} + T_{oldal} + T_{felül}\right) + T_{rejtett}}$

Térfogat

Testek esetén tudunk térfogatot számolni

Testek térfogatát különböző módon lehet kiszámolni a különböző testek esetén

Téglatest típusú testeknél (Téglatest, Négyzetes hasáb, Kocka) kiszámoljuk az alaplap területét, és ezt szorozzuk meg a magasággal

Az alaplap négyzet vagy téglalap szokott lenni

Téglalap területét úgy számoljuk ki, hogy a szélességét és a magasságát összeszorozzuk egymással

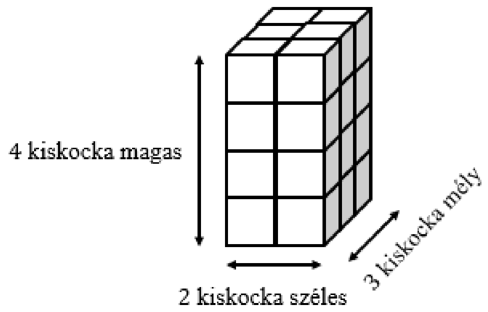
Négyzetnek is ugyanígy számoljuk ki a területét, csak négyzet esetén a szélesség és a magasság megegyezik egymással

Arra figyeljük, hogy ha nem azonos mértékegységben vannak megadva az oldalak, akkor végezzük el az átváltást

A térfogat mértékegysége az oldalak mértékegységének köbe lesz (cm^3, dm^3, m^3...)

<u>Térfogat jele</u>: $\boldsymbol{V}$ (Volumen latin (angol) szó miatt)

Téglatest térfogata



Kiskockákból kirakott téglatest térfogatát (hány kiskockából áll) úgy számoljuk ki, hogy megszámoljuk az egy szinten lévő kiskockák számát, és beszorozzuk a szintek számával (minden szinten ugyanannyi van)

Alsó szint: $2 \cdot 3 = 6$ kiskocka

Szintek száma: 4

Kiskockák száma (térfogat): $4 \cdot 6 = \mathbf{24}$ **kiskocka**

Ezt úgy is megkaphatjuk, ha összeszorozzuk a szélességet, a mélységet és a magasságot:

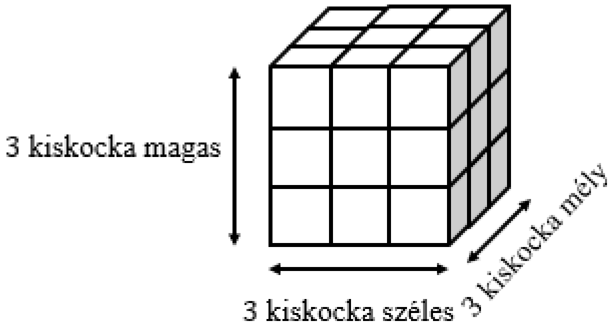
$2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = \mathbf{24}$

Ezzel a módszerrel fogjuk kiszámolni a téglatest térfogatát is

Téglatest térfogatának képlete szövegesen: $\boldsymbol{V}$ =**Szélesség · Mélység · Magasság**

Téglatest térfogata: $\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$

Kocka térfogata



Kiskockákból kirakott kocka térfogatát (hány kiskockából áll) ugyanúgy számoljuk ki, mint a téglatest esetében, vagyis megszámoljuk az egy szinten lévő kiskockák számát, és beszorozzuk a szintek számával (minden szinten ugyanannyi van)

Alsó szint: $3 \cdot 3 = 9$ kiskocka

Szintek száma: 3

Kiskockák száma (térfogat): $3 \cdot 9 = \mathbf{27}$ **kiskocka**

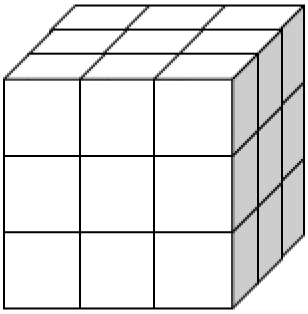
Ezt úgy is megkaphatjuk, ha összeszorozzuk a szélességet, a mélységet és a magasságot:

$3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = \mathbf{27}$

Ezzel a módszerrel fogjuk kiszámolni a kocka térfogatát is, kocka esetén a szélesség, a mélység és a magasság megegyeznek egymással, tehát a kocka élhosszát fogjuk összeszorozni önmagával 3-szor

Kocka térfogata: $\boldsymbol{V = a \cdot a \cdot a}$

Térfogat kiskockákkal



A testeket kirakhatjuk kiskockákból, vagy téglatestekből is (leggyakrabban kiskockából szoktuk kirakni)

Az ábrán látható nagy kocka $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kiskockából van kirakva

Térfogat esetén sokkal könnyebb dolgunk lesz, mint felszín esetén

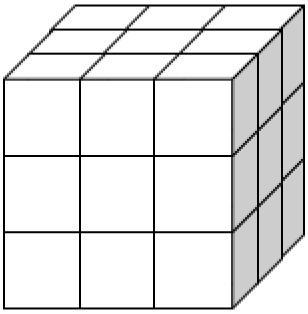
Térfogat esetén kiszámoljuk egy kiskocka térfogatát, és szorozzuk a kiskockák számával

A nagy kocka (vagy test) térfogata nem függ a kiskockák elrendezésétől

Térfogat meghatározásának lépései:

- Meghatározzuk 1 kiskocka térfogatát ($V_{kis} = a \cdot a \cdot a$)
- Megszámoljuk a kiskockák számát (n)
- Egy kiskocka térfogatát beszorozzuk a kiskockák számával: $\boldsymbol{V_{nagy} = n \cdot V_{kis}}$

Térfogat változása kiskockák elvétele/hozzáadása esetén



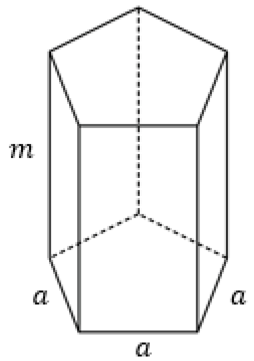
Térfogat esetén egyszerű lesz a helyzet, amikor a nagy testből kiskockákat veszünk el, vagy adunk hozzá:

- Amennyi kiskockát elvettünk, annyi kiskockányi térfogattal **csökken** a test térfogata
- Amennyi kiskockákat hozzáadtunk, annyi kiskockányi térfogattal **növekszik** a test térfogata

Mindegy, hogy melyik helyről vesszük el a kiskockákat

Ha a sarkáról vesszük el, vagy a lap közepéről, vagy az él közepéről, akkor is 1 kiskockányi térfogattal csökken a test térfogata

Hasábok



Hasábok olyan testek, amiknek van két egybevágó alaplapja, ami egy sokszög (általában szabályos, de nem muszáj, hogy az legyen), oldallapjai pedig téglalapok

Hasábok elnevezése: Alaplap után (Háromszög alapú, Négyzet alapú hasáb (Négyzetes oszlop), Ötszög alapú hasáb, Hatszög alapú hasáb…)

A téglatest és a kocka is hasábnak számít, csak külön elnevezésük van

Hasábokat kétféle módon lehet elképzelni:

- Van a két alaplap, amik ugyanakkora sokszögek, az egyik alaplap a földön van, a másik pedig fölötte a levegőben, és téglalappokkal rakjuk körbe a két sokszöget, a téglalapok szélessége a sokszög egy-egy oldalhosszával, magassága pedig a test magasságával egyezik meg
- Van egy sokszög a földön (képzeljük el papírvastagságúként), és nagyon sok ugyanilyen papírt teszünk egymásra, így kapunk egy testet

<u>Hasáb részei</u>:

- Alaplapok: Általában szabályos sokszögek
- Alapélek (a): Az alaplap oldalai
- Oldallapok: Téglalapok
- Oldalél: A téglalapok oldalai (a magasság)
- Palást: Oldallapok összege
- Magasság ($m,\ M,\ h,\ H$): A két alaplap közötti távolság

Hasábok felszíne

Hasábok felszínét úgy kapjuk meg, hogy a lapok területét össze fogjuk adni

Az alaplapok területe: T_{alap}

Az oldallapok területe: T_{oldal}

A palást területe: $T_{palást}$

<u>Hasábok felszíne</u>: $\boldsymbol{A = 2 \cdot T_{alap} + T_{palást}}$

Ha szabályos sokszög a hasáb alapja (legtöbbször az), akkor:

Palást területe: $\boldsymbol{T_{palást} = n \cdot T_{oldal}}$

Ahol:

n – A szabályos sokszög csúcsainak, oldalainak száma (ennyi lesz az oldallapok száma is)

T_{oldal} – Az oldallap területe (alapél szélességű, test magasságú téglalap területe)

Oldallap területe: $\boldsymbol{T_{oldal} = a \cdot m}$

Hasábok térfogata

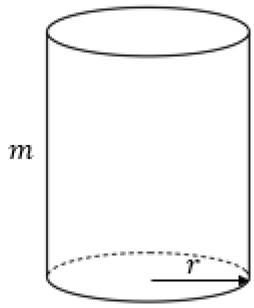
Hasábok térfogatát úgy kapjuk meg, hogy az alaplap területét megszorozzuk a hasáb magasságával

<u>Hasábok térfogata</u>: $\boldsymbol{V = T_{alap} \cdot m}$

Téglatestnek vagy kockának is ki lehet számolni ilyen módszerrel a térfogatát:

- Téglatest: $\boldsymbol{V} = a \cdot b \cdot c = \boldsymbol{T_{alap} \cdot m}$
- Kocka: $\boldsymbol{V} = a \cdot a \cdot a = \boldsymbol{T_{alap} \cdot m}$

Hengerek



Henger: ”Kör alapú hasáb”

Olyan alakzat, melynek két alaplapja két ugyanakkora kör, palástja pedig egy téglalap, ami rá van csavarva a körökre

Hengereket négyféle módon lehet elképzelni:

- Van a két kör alaplap, amik ugyanakkorák, az egyik alaplap a földön lesz, a másik pedig fölötte lesz a levegőben, és egy téglalappal körbe csavarjuk a két kört, ez lesz a palást, a téglalap szélessége a körök kerületével egyezik meg (arra csavarodik rá teljesen), magassága pedig a test magasságával egyezik meg
- Van egy kör a földön (képzeljük el papírvastagságúként), és nagyon sok ugyanilyen papír kört teszünk egymásra így kapunk egy testet
- Egy téglalapot forgatunk meg a függőleges szimmetria tengelye mentén (ekkor a téglalap szélessége lesz a henger körének **átmérője**)
- Egy téglalapot forgatunk meg az egyik oldala mentén (ekkor a téglalap szélessége lesz a henger körének **sugara**)

Henger részei:

- Alaplapok: Körök
- Alaplap sugara (r, R), alaplap átmérője ($d,\ D$)
- Palást: Téglalap
- Magasság ($m,\ M,\ h,\ H$): A két alaplap közötti távolság (a téglalap palást magassága)

Hengerek felszíne

Hengerek felszínét úgy kapjuk meg, hogy a lapok területét össze fogjuk adni (ugyanúgy, mint hasáb esetén, csak itt az alaplap mindig kör lesz)

Az alaplapok területe: T_{alap}

A palást területe: $T_{palást}$

Hengerek felszíne: $\boldsymbol{A = 2 \cdot T_{alap} + T_{palást}}$

Az alaplapok területe: $\boldsymbol{T_{alap} = r^2 \cdot \pi}$

Palást területe: $\boldsymbol{T_{palást}} = K \cdot m = \boldsymbol{2 \cdot r \cdot \pi \cdot m}$

Hengerek felszíne: $\boldsymbol{A} = 2 \cdot T_{alap} + T_{palást} = \boldsymbol{2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot m}$

Hengerek térfogata

Hengerek térfogatát úgy kapjuk meg, hogy az alaplap területét megszorozzuk a henger magasságával

Hengerek térfogata: $\boldsymbol{V = T_{alap} \cdot m = r^2 \cdot \pi \cdot m}$

Hengerek térfogatának képlete megegyezik a hasáb térfogatának képletével, itt az alaplap mindig kör lesz, hasáb esetén pedig több alakzat is lehet az alaplap

Oszthatóság

Oszthatósági szabályok

2-vel való oszthatóság: Egy szám osztható 2-vel, ha páros, vagyis, ha utolsó számjegye **0**, **2**, **4**, **6**, vagy **8**

3-mal való oszthatóság: Egy szám akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal

4-gyel való oszthatóság: Egy szám akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó 2 számjegyéből képzett szám osztható 4-gyel

5-tel való oszthatóság: Egy szám akkor osztható 5-tel, ha **0-ra** vagy **5-re** végződik

6-tal való oszthatóság: Egy szám akkor osztható 6-tal, ha páros (utolsó számjegye 0, 2, 4, 6, vagy 8) **és** osztható 3-mal (számjegyeinek összege osztható 3-mal)

8-cal való oszthatóság: Egy szám akkor osztható 8-cal, ha utolsó 3 számjegyéből képzett szám osztható 8-cal

9-cel való oszthatóság: Egy szám akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel

10-zel való oszthatóság: Egy szám akkor osztható 10-zel, ha **0-ra** végződik

Prímtényezős felbontás és alkalmazásai

Prímszám: Olyan szám, mely pontosan két számmal osztható: eggyel és önmagával. A legkisebb prímszám a 2, mert az 1 csak egyetlen számmal osztható, 1-gyel.

Prímszámok: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19…

Prímtényezős felbontás lépései:

1. lépés: Először nézzük meg páros-e, ha igen, akkor egészen addig osszunk 2-vel, amíg páros számot kapunk

2. lépés: Ha páratlant kaptunk, vagy az eredeti szám nem volt páros, akkor nézzük meg 3-mal osztható-e

3. lépés: Ha osztható 3-mal osszunk addig 3-mal, amíg bírunk

4. lépés: Ha nem tudunk már tovább osztani 3-mal, akkor osszunk 5-tel, amíg bírunk

5. lépés: Ha nem tudunk tovább 5-tel osztani, akkor megnézzük 7-tel, 11-gyel, 13-mal …

140	**2**
70	**2**
35	**5**
7	**7**
1	

$140 = \mathbf{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7} = \mathbf{2^2 \cdot 5 \cdot 7}$

Legnagyobb közös osztó

1. lépés: A számok prímtényezős felbontása

2. lépés: Azokat a prímtényezőket, amik mind a két számban szerepelnek összeszorozzuk

24	**2**
12	**2**
6	**2**
3	**3**
1	

40	**2**
20	**2**
10	**2**
5	**5**
1	

$24 = \mathbf{2^3 \cdot 3}$

$40 = \mathbf{2^3 \cdot 5}$

LNKO: $\mathbf{2^3 = 8}$

Legkisebb közös többszörös

1. lépés: A számok prímtényezős felbontása

2. lépés: Az összes prímtényezőt összeszorozzuk, de mindegyiket csak a legnagyobb előforduló kitevőn

$$\begin{array}{r|l} 8 & \mathbf{2} \\ 4 & \mathbf{2} \\ 2 & \mathbf{2} \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & \mathbf{2} \\ 6 & \mathbf{2} \\ 3 & \mathbf{3} \\ 1 & \end{array}$$

$8 = \mathbf{2^3}$

$12 = \mathbf{2^2 \cdot 3}$

$\mathbf{LKKT}$: $2^3 \cdot 3 = \mathbf{24}$

Arányosságok

Egyenes arányosság

Ahányszorosára **növeljük** (↑) az egyik mennyiséget, ugyanannyiszorosára fog **növekedni** (↑) a másik mennyiség

Ahányadrészére **csökkentjük** (↓) az egyik mennyiséget, ugyanannyiadrészére fog **csökkeni** (↓) a másik mennyiség

Egyenes arányosság esetén, ha elosztjuk egymással az egymáshoz tartozó értékeket, mindig ugyanazt a számot fogjuk kapni

Fordított arányosság

Ahányszorosára **növeljük** (↑) az egyik mennyiséget, ugyanannyiadrészére fog **csökkeni** (↓) a másik mennyiség

Ahányadrészére **csökkentjük** (↓) az egyik mennyiséget, ugyanannyiszorosára fog **növekedni** (↑) a másik mennyiség

Fordított arányosság esetén a számpárok szorzat állandó

Százalékszámítás

Százalék jele: %

Példák: 10%, 25%, 100%

Hol használunk százalékot?

- Akciók, kedvezmények
- Statisztika
- Adók
- Kamatok, hitelek
- Osztályzás
- Infláció
- Telefon akkumulátor töltöttsége

1 egész lesz a 100%

Általában 0% és 100% közötti százalékokról szoktunk beszélni, azokkal szoktunk találkozni, de 100%-nál nagyobb százalékok is lesznek

Százalék 3 alakban adható meg:

- Százalék alakban (20%)
- Tört alakban $\left(\frac{1}{5}\right)$
- Tizedes tört alakban ($0{,}2$)

Százalékszámítás tudnivalók

1 egész lesz a 100%

Az 1% a 100% 100-ad része, egy szám 1%-át úgy kapjuk meg, hogy a számot elosztjuk 100-zal

Százalékszámítás során egyenes arányosságot fogunk használni

Példa: Számoljuk ki 400 20%-át!

	400	100%	
$:5$	**80**	**20%**	$:5$

	400	100%	
$:100$	4	1%	$:100$
$\cdot 20$	**80**	**20%**	$\cdot 20$

Egy szám valahány százalékát kétféleképpen lehet kiszámolni:

- Egy lépésben: A százalékot átírjuk tört vagy tizedes tört alakra, majd a számot ezzel megszorozzuk
- Két lépésben: Kiszámoljuk a szám 1%-át, majd ezt a számot megszorozzuk a százalék értékével

Százalék átírása tört alakra: A százalék értékét elosztjuk 100-zal, ha tudunk, egyszerűsítünk, és a kapott számmal szorozzuk az eredeti számot

$20\% \rightarrow \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ $\qquad 400 \cdot \frac{1}{5} = \frac{400}{5} = \mathbf{80}$

400 20%-a 80.

Százalékalap: Aminek kiszámoljuk valamennyi százalékát

Százalékláb: A %-os kifejezés

Százalékérték: Az eredmény, amit kapunk a számolás során

Százalék átírása tizedes tört alakra: A százalék értéket elosztjuk 100-zal, és a kapott számmal szorozzuk az eredeti számot

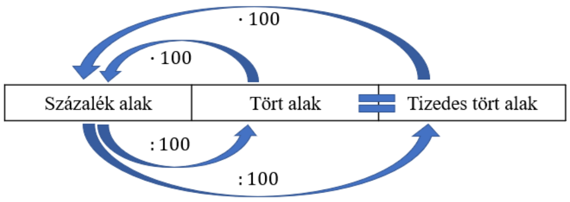
$20\% \rightarrow 0{,}2 \quad 400 \cdot 0{,}2 = 40 \cdot 2 = \mathbf{80}$

Kapcsolat százalék, tört alak és tizedes tört alak között

A 3 között mindig van átjárás (az egyiket át tudjuk írni a másikra)

Átírások:

- Ha százalékból írunk át valamit tört vagy tizedes tört alakra, akkor mindig osztani fogunk 100-zal, tört esetén mindig 100-adban kapjuk meg a törtet, amit, ha tudunk, akkor egyszerűsítünk, tizedes tört esetén pedig 2-vel **balra** (←) visszük a tizedesvesszőt
- Ha tört alakról írunk át valamit tizedes tört alakra, akkor vagy tudjuk az értéket (nevezetes törtek), vagy bővítjük a törtet 100-adra
- Ha tört alakról írunk át valamit százalék alakra, akkor 100-zal fogjuk szorozni a törtet, ha 100-ad alakban van, akkor csak eltűnik a nevező, ha nem 100-ad alakban van, akkor pedig elvégezzük a szorzást és az egyszerűsítést
- Ha tizedes tört alakról írunk át valamit tört alakra, akkor csak simán átírjuk, ha tudunk, egyszerűsítünk
- Ha tizedes tört alakról írunk át valamit százalék alakra, akkor 100-zal fogjuk szorozni a tizedes törtet, vagyis 2-ször visszük **jobbra** (→) a tizedesvesszőt



Nevezetes százalékok

Százalék	Osztás / Szorzás
10%	$:10$
50%	$:2$
25%	$:4$
20%	$:5$
5%	$:20$
1%	$:100$
100%	$\cdot 1$
200%	$\cdot 2$
300%	$\cdot 3$
150%	$\cdot 1{,}5$

Betűk a matematikában

Találkoztunk már betűkkel korábban, általában geometriában és térgeometriában (a, b, c, d, K, T, A, V)

Új betűk, amikkel találkozni fogunk a matematikában: x, y

Ezekkel fogjuk jelölni az egyenletek, egyenletrendszerek, szöveges feladatok megoldása során az ismeretleneket

Eddig különböző jelekkel jelöltük: ●▲■◆♥□◯☻☼, ezeket fogja felváltani x és y

Számok és betűk közé nem mindig szoktuk kitenni a szorzás jelet, de úgy képzeljük, mintha ott lenne

$2x = 2 \cdot x$ $\quad 3y = 3 \cdot y$ $\quad 5a = 5 \cdot a$ $\quad 10b = 10 \cdot b$

Más műveleti jeleket (összeadás, kivonás, osztás) nem hagyhatunk el

A betű előtti számot szorzótényezőnek, **együtthatónak** hívjuk: **6**x együtthatója: **6**

Az 1-es együtthatókat nem szoktuk kiírni (x együtthatója: **1**), a -1-es együtthatókat mínusz jellel jelöljük ($-x$ együtthatója: $\mathbf{-1}$)

Egynemű kifejezések: Amik csak együtthatójukban térnek el (de nem muszáj, hogy eltérjenek)

Egynemű kifejezések esetén fontos, hogy a betűk és azok kitevője is megegyezzen (ha van)

A betűk felcserélésével (ha több van összeszorozva) is kaphatunk egynemű kifejezéseket (xy és yx egyneműek)

Egynemű kifejezések könnyű elképzelése: Gyümölcsök segítségével, az együttható a darabszám, a betű a gyümölcs fajtája

Összeadás és kivonás betűkkel

Összeadást és kivonást csak egynemű kifejezésekkel végezhetünk el (almát az almával, körtét a körtével), ezt **<u>összevonásnak</u>** hívjuk

Ezeket a műveleteket úgy fogjuk elvégezni, hogy az együtthatókat adjuk össze, vagy vonjuk ki egymásból

Az együtthatókat mindig előjellel együtt nézzük

A végeredménynél mindegy a sorrend, ABC sorrendet szoktuk követni (először a, utána b, vagy először x, utána y), ha nemcsak sima betűk vannak, hanem hatványok is, akkor kitevő szerint csökkenő sorrendben szoktuk írni a tagokat (a legnagyobb kitevőjűt írjuk előre, utána a nála kisebbet, utána a még kisebbet, és így tovább), a számokat a legvégére szoktuk írni (amik mögött nincs betű)

Szorzás és osztás betűkkel

Szorzás és osztás esetén a számot számmal, a betűt betűvel fogjuk összeszorozni vagy elosztani

Ha ugyanolyan betűket szorzunk össze egymással, akkor hatvány alakban lehet felríni (Pl.: $a \cdot a = a^2$), ha különböző betűket kell összeszoroznunk, akkor csak elhagyjuk a szorzás jelet közülük (Pl.: $a \cdot b = ab$)

Ha ugyanolyan betűket osztunk el egymással, akkor egyszerűsíteni tudunk (Pl.: $\frac{a^2}{a} = a$), ha különböző betűket kell elosztanunk, akkor nem csinálunk semmit (Pl.: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$)

Az előjelekre mindig figyelünk:

Szorzásnál: $\oplus \cdot \oplus = \oplus$ $\quad \oplus \cdot \ominus = \ominus$ $\quad \ominus \cdot \ominus = \oplus$

Osztásnál: $\frac{\oplus}{\oplus} = \oplus$ $\quad \frac{\oplus}{\ominus} = \ominus$ $\quad \frac{\ominus}{\ominus} = \oplus$

Mérlegelv, egyenletek

A nyitott mondatokat mostantól egyenleteknek fogjuk hívni

A korábbi jelölések helyett az ismeretlenek x-ek és y-ok lesznek

Az egyenleteket mérlegelv segítségével fogjuk megoldani

Mérlegelv: A neve beszédes, mérlegre kell gondolni

A mérleg akkor lesz egyensúlyban, ha mind a két serpenyővel ugyanazt csináljuk (Ha mindkét serpenyőből 1-1 ugyanakkora súlyú almát veszünk el, akkor marad egyensúlyban)

Az egyenlőségjel $(=)$ jelképezi azt, hogy a mérleg egyensúlyban van, egyenlőtlenségek esetén a mérleg nincs egyensúlyban

Hogy oldjuk meg az egyenleteket?

- A célunk az, hogy a végén az egyik oldalon csak x, a másik oldalon pedig egy szám legyen, ez lesz az egyenlet megoldása (Pl.: $x = 3$)
- A különböző műveleteket mindig az ellentétes művelettel tudjuk eltüntetni (összeadást kivonással, kivonást összeadással, szorzást osztással, osztást szorzással)
- A műveleti sorrend alapján visszafele fogunk haladni (először az összeadást vagy a kivonást tüntetjük el, utána a szorzást vagy az osztást)
- Az egyenlet megoldás során a két oldal tetszőlegesen bármikor felcserélhető (az eredmény kijöhet $3 = x$ alakban is, a végén cserélhetünk)

Ha kész az egyenlet megoldása, akkor a végén ellenőrzünk

Ellenőrzésnél a kapott eredményt behelyettesítjük az eredeti egyenletbe, az ismeretlen helyére (ha több x is van, akkor mindegyik helyre)

Akkor lett jó a számolásunk, ha az egyenlőségjel mind a két oldalán ugyanazt a számot kapjuk (Pl.: $5 = 5$)

Ha nem ugyanaz a szám jött ki mind a két oldalon, akkor vagy elszámoltunk valamit az ellenőrzés során, vagy az egyenlet megoldása nem lett jó

Egyenlet megoldásának a lépései

- **Opcionális lépések (ha van)**:

Zárójel felbontása

Törtek eltüntetése (Közös nevezőre hozás és beszorzás a nevezővel)

Összevonás (x-es kifejezések összevonása az x-es kifejezésekkel, számok összevonása a számokkal)

- **Kötelező lépések**:

  Egy oldalra rendezzük az x-es kifejezéseket (mindegy, hogy melyik oldalra, úgy érdemes rendezni, hogy az x együtthatója pozitív legyen)

  A másik oldalra rendezzük a számokat

  Ha van x előtti együttható, akkor azzal osztunk

  Elvégezzük az ellenőrzést (A kapott eredményt visszahelyettesítjük x helyére az eredeti alakban megadott egyenletbe)

Egyenlőtlenségek

Egyenlőtlenségek esetén az egyenlőségjel $(=)$ helyett reláció jelek $(>, \geq, <, \leq)$ lesznek

Egyenlőtlenségeket is mérlegelv segítségével fogjuk megoldani, úgy, mint az egyenleteket

Amerre mutat a relációjel, az az oldal lesz a nagyobb ($<$ esetén a jobb oldal lesz a nagyobb, $>$ esetén a bal oldal)

Az egyenlőtlenség jobb és bal oldalát nem cserélhetjük fel tetszőlegesen, mint egyenlet esetén (vagy ha felcseréljük, akkor meg kell fordítani a reláció jelet)

Egy dologra kell nagyon figyelni egyenlőtlenség esetén, fontos, hogy, ha **negatív számmal szorzunk vagy osztunk, akkor megfordul a relációjel** (ezért is érdemes úgy rendezni a megoldás során, hogy x előtt pozitív együttható legyen, és ezt elkerüljük)

Egyenlőtlenségnek nem egy megoldása lesz, hanem végtelen sok (Pl.: $x < 6$ Megoldások: $5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2\ldots$ (nem csak egész számok))

Ha kész az egyenlőtlenség megoldása, akkor a végén ellenőrzünk

Ellenőrizni többféle módon is lehet:

- A kapott számot behelyettesítjük x helyére az eredeti alakban, a reláció jelet kicseréljük egyenlőség jelre, és úgy csinálunk mindent, mint egyenlet esetén (ha a végén mind a két oldalon ugyanaz jön ki jól oldottuk meg az egyenlőtlenséget)
- Behelyettesítünk egy kisebb vagy nagyobb megoldást, mint az eredmény (attól függően, hogy merre mutat a reláció jel)

Függvények

A függvényeket koordináta-rendszerben ábrázoljuk

A vízszintes tengely az x tengely

A függőleges tengely az y tengely

A két tengely metszéspontjában van az origó ($(0; 0)$ pont)

A függvények elképzelhetőek halmazok hozzárendelésével

Az alaphalmazhoz rendeljük hozzá a képhalmaz elemeit

Az alaphalmazba az x koordináták kerülnek

Az alaphalmaz elemeit hívjuk **értelmezési tartománynak**

A képhalmazban az y koordináták vannak

A képhalmaz elemeit hívjuk **értékkészletnek**

Az összetartozó párok a pontok koordinátái

A pontok berajzolása után azokat össze tudjuk kötni

Egyenes megrajzolásához elegendő 5 pontot bejelölni (minimum 3 azért legyen bejelölve)

Egy y értékhez tartozhat több x érték is, viszont egy x értékhez csak egy y érték tartozhat

Ez a függvény egyik legfontosabb tulajdonsága

A függvények állhatnak egyenesekből és görbe vonalakból is

Lineáris függvények ábrázolása

Lineáris függvény: Egyenes

A lineáris függvények két részből fognak állni:

- x-es rész: Ez fogja megadni a függvény meredekségét
- Szám: Ez fogja megadni az indulás helyét (ahol az y tengelyt metszi a függvény)

Meredekség: Azt mutatja meg, hogy 1 **jobbra** (→) lépés esetén mennyit fogunk lépni **felfelé** (↑)

Az x előtti szorzótényező lesz a meredekség (Pl.: $\mathbf{3}x$ függvény **meredeksége 3**, vagyis 1

jobbra (→) lépés esetén **3-at** lépünk **felfelé** (↑))

Ha **balra** (←) lépünk, akkor annyit fogunk lépni **lefelé** (↓), amennyi a meredekség

Ha az x előtt negatív szorzótényező szerepel, az azt fogja jelenteni, hogy 1 **jobbra** (→) lépés esetén annyit fogunk lépni **lefelé** (↓) (Pl.: $\mathbf{-4}x$ függvény **meredeksége** $\mathbf{-4}$, vagyis 1 **jobbra** (→) lépés esetén **4-et** lépünk **lefelé** (↓))

Ha **balra** (←) lépünk, akkor annyit fogunk lépni **felfelé** (↑) amennyi a meredekség

Ha x előtt nincs semmi az 1-es meredekséget fog jelenteni, ha – jel (mínusz jel) van, az -1-es meredekséget jelent

Függvények típusai meredekség alapján:

- **Növekvő** (↗), ha a meredekség **pozitív**
- **Csökkenő** (↘), ha a meredekség **negatív**
- **Konstans** (→), ha a meredekség **0**

Lineáris (Elsőfokú) függvények ábrázolása tört meredekség esetén

Példa: $f(x) = \frac{1}{2}x$

Meredekség: $\frac{1}{2} \rightarrow$ 1 **jobbra** ($\rightarrow$) lépésnél $\frac{1}{2}$-et (vagyis felet) lépünk **felfelé** ($\uparrow$)

Példa: $f(x) = \frac{2}{3}x$

Meredekség: $\frac{2}{3} \rightarrow$ 1 **jobbra** ($\rightarrow$) lépésnél $\frac{2}{3}$-ot lépünk **felfelé** ($\uparrow$) (ez már nem annyira kellemes)

Ha 3-at lépünk **jobbra** ($\rightarrow$), akkor 3-szor lépünk $\frac{2}{3}$-ot **felfelé** ($\uparrow$) ($\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$), vagyis 3 **jobbra** ($\rightarrow$) lépés esetén 2-t kell lépni **felfelé** ($\uparrow$)

Tört meredekség esetén az lesz a szabály, hogy a tört **nevezőjével** fogunk **jobbra** ($\rightarrow$) lépni, a tört **számlálójával** pedig **felfelé** ($\uparrow$), így egész négyzetrácsokon leszünk végig

Ez működik egész számok esetén is ($2x = \frac{2}{1}x \rightarrow$ **1-et jobbra** ($\rightarrow$), **2-t fel** ($\uparrow$))

$f(x) = \frac{3}{4}x \rightarrow$ **4-et jobbra** ($\rightarrow$) **3-at fel** ($\uparrow$)

Tört lehet 1-nél nagyobb értékű is

$f(x) = \frac{5}{2}x \rightarrow$ **2-et jobbra** ($\rightarrow$) **5-öt fel** ($\uparrow$)

Negatív tört meredekség esetén a **nevezővel** ugyanúgy **jobbra** ($\rightarrow$) lépünk, a **számlálóval** pedig **lefelé** ($\downarrow$)

$f(x) = -\frac{3}{2}x = \frac{-3}{2}x \rightarrow$ **2-et jobbra** ($\rightarrow$) **3-at le** ($\downarrow$)

Hozzárendelési szabály leolvasása függvény grafikonjáról

Ha a függvény grafikonja van megadva, és a hozzárendelési szabályra vagyunk kíváncsiak, akkor le kell olvasnunk, hogy hol metszi az y tengelyt, és mennyi a meredeksége:

- Először mindig az y tengely metszetet olvassuk le (ez a könnyebb)
- Utána olvassuk le a függvény meredekségét

De lehet fordítva is

Egész meredekség esetén nincs nehéz dolgunk, mert a pontok egész rácsvonalakon vannak

Tört meredekség esetén meg kell keresnünk azokat a pontokat, amik egész négyzetrácsra esnek, és abból tudjuk meghatározni a meredekséget

Egyenletek grafikus megoldása

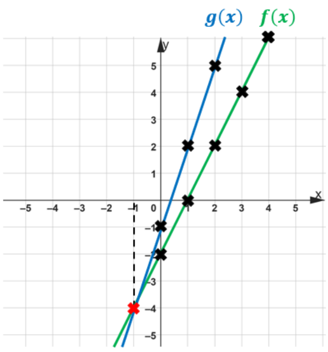
Egyenleteket nem csak mérlegelv segítségével lehet megoldani, hanem grafikusan is

Grafikus megoldás során az egyenlet jobb és bal oldalára is úgy tekintünk, mint 1-1 függvényre, ezeket fogjuk ábrázolni koordináta-rendszerben

Ha nem ábrázolható formában van, akkor először elvégezzük a zárójel felbontásokat, összevonásokat, egyszerűsítéseket, hogy ábrázolható formára hozzuk

$$2(x-1) = 4x - 1 - x \quad /(\square), Ö.V.$$

$$\underbrace{\mathbf{2x-2}}_{f(x)} = \underbrace{\mathbf{3x-1}}_{g(x)} \qquad \boldsymbol{x = -1}$$



A kapott metszéspont x koordinátája lesz a megoldásunk, az y koordináta megadja azokat az értékeket, amiket ellenőrzés során kapunk, ha behelyettesítünk

Ha ábrázoltuk a két függvényt, akkor:

- Kaphatunk 1 metszéspontot (esetek 99%-a): Ilyenkor az egyenlet megoldása a metszéspont x koordinátája lesz
- Kaphatunk 0 metszéspontot: Ez akkor van, ha a két ábrázolt egyenes egymással párhuzamos (ugyanannyi a meredekségük, de máshol metszik az y tengelyt, pl.: $2x+1$ és $2x-2$)

- Kaphatunk végtelen sok metszéspontot: Ez akkor van, ha a két egyenes megegyezik egymással (ugyanannyi a meredekségük, és ugyanott is metszik az y tengelyt, pl.: $2x + 3$ és $2x + 3$)

Átlag

Mire jó?

- Tudni fogjuk segítségével az év végi jegyünket, vagy ki tudjuk számolni, hogy hány 5-öst kell még kapni az év végi jobb jegy eléréséhez
- Sporteseményeknél tudni fogjuk hány gólra/pontra számíthatunk

Példák átlagra:

- Jegyek
- Hőmérséklet
- Magasság, kor
- Pénz
- Sportesemények (Gólok száma, gólpasszok száma, pontok száma (kosárlabda), lepattanók száma)
- Sport (szeretnénk lefutni/leúszni/letekerni valamennyi távolságot, ki tudjuk számolni, hogy naponta/hetente mennyit kell megtennünk)
- Könyvolvasás
- Sorozatnézés

Hogy fogunk átlagot számolni?

- Az adatok összegét elosztjuk az adatok számával
- **Átlag=Adatok összege**:**Adatok száma**
- Először összeadjuk az adatokat, utána megszámoljuk, hogy hány adat volt, és a kettőt elosztjuk egymással

Átlag trükk

Milyen számok közé esik az átlag? Hogy tudjuk magunkat ellenőrizni?

- Az átlag mindig a legkisebb és a legnagyobb adat közé fog esni, sosem lehet kisebb a legkisebb adattól és sosem lehet nagyobb a legnagyobb adattól
- Ha csak 2-es, 3-as, 4-es jegyeket kaptunk, akkor az átlagunk nem lehet sem 2-esnél kisebb, sem 4-esnél nagyobb
- Ezt az ellenőrzést minden átlagszámítás után el kell végezni (ránézésre)

Hogy tudjuk még magunkat ellenőrizni?

- Az átlag általában a legkisebb és a legnagyobb szám között nagyjából félúton lesz, de ez nem mindig van így
- Akkor lesz a legkisebb és a legnagyobb adat között nagyjából félúton, ha az adatok egyenletesek (nagyjából ugyanolyan távolságra vannak egymástól) és nincsenek nagyon kiugró értékek

Átlag típusai

Kétféle átlag típust különböztetünk meg:

- **Hagyományos átlag**: Az adatok fel vannak sorolva, azokat kell összeadni és elosztani az adatok számával
- **”Osztályzat típusú” átlag**: Amikor meg van adva, hogy melyik osztályzatból mennyi született, és az átlagot kell kiszámolnunk (osztályzat helyett lehet magasság vagy testsúly is, amik darabszámokkal vannak megadva)

”Osztályzat típusú” átlag esetén az adatok típusai is számok lesznek (Hagyományos átlag esetén nevek szoktak lenni, vagy napok, vagy más időszakok)

”Osztályzat típusú” átlag **adatainak összege**: Úgy számoljuk ki, hogy az adatokat (osztályzatok) összeszorozzuk az adatok számával (osztályzatok számával), és ezeket összeadjuk

”Osztályzat típusú” átlag **adatainak száma**: A darabszámok összege

Ha ezek megvannak, akkor ugyanúgy elosztjuk egymással a 2-t

Módusz

A leggyakrabban előforduló elem

Módusz jele: Mo

Nem lesz túl nehéz dolgunk a módusz meghatározása során, meg kell keresnünk azt az elemet, ami a leggyakrabban (legtöbbször) fordul elő az adatok között

Legtöbb esetben 1 módusz lesz, de elképzelhető, hogy több szám is az adatok módusza lesz (Ha több számból is ugyanannyi van a leggyakoribbak között)

Fontos, hogy módusz esetén az adat lesz a végeredmény, nem az, hogy hányszor fordult elő (Ha legtöbbször a **9-es szám** fordult elő az adatok között, és 6 db 9-es volt, akkor a **módusz 9 lesz**, nem pedig 6)

Medián

A sorba rendezett (növekvő sorrendbe) adatok közül a középső elem

Medián jele: Me

Módusz és medián megkülönböztetése: Medián → Medium (angol) → Közép

A mediántól ugyanannyi elem van jobbra, mint balra (ugyanannyi lesz kisebb tőle, mint amennyi nagyobb)

A feladatokban a legtöbbször növekvő sorrendbe vannak rendezve az adatok, de ha nincsenek, akkor az első lépés az lesz, hogy növekvő sorrendbe rendezzük őket

Az adatok száma lehet páros vagy páratlan:

- Ha az adatok száma **páratlan** (Pl.: 7 adat van), akkor a medián a középső szám lesz (4. szám, tőle 3 szám lesz balra, és 3 lesz jobbra)
- Ha az adatok száma **páros** (Pl.: 6 adat van), akkor a medián két szám közé fog esni, (a 3. és 4. számok közé) ilyenkor úgy kapjuk meg a mediánt, hogy kiszámoljuk a két szám átlagát:

- Ha a két szám, amik közé esik a medián ugyanazok (Pl.: 2 db 4-es közé esik), akkor a medián megegyezik a számokkal (a **medián 4** lesz)
- Ha a két szám, amik közé esik a medián nem ugyanazok (Pl.: 5-ös és 7-es közé esik), akkor kiszámoljuk az átlagot, vagyis összeadjuk a két számot, és elosztjuk 2-

vel ($\frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$, a **medián 6** lesz) (ebben az esetben a medián nem szerepel az adatok között)

Ha sok adatunk van, akkor kapcsos zárójelekkel és …-okkal tudjuk felsorolni az adatokat

Medián sorszámát egy 2-vel való osztással tudjuk kiszámolni:

- **Páratlan** adat szám esetén a kapott nem egész számot **felfelé** (↑) fogjuk kerekíteni (Pl.: 21 adat esetén: $\frac{21}{2} = 10{,}5 \rightarrow$ a **medián a 11. elem lesz**)
- **Páros** adat szám esetén a kapott egész szám lesz a kisebb sorszám, a tőle nagyobb szám lesz a nagyobb sorszám (Pl.: 16 adat esetén: $\frac{16}{2} = 8 \rightarrow$ a medián a **8. és 9. elemek közé esik**)

Terjedelem

A legnagyobb és legkisebb adat különbsége

Terjedelemnek nincs külön jele

Nem lesz túl nehéz dolgunk a terjedelem meghatározása során, meg kell keresnünk a legnagyobb és legkisebb elemeket, és a legnagyobból kivonni a legkisebbet

Ha az adatok növekvő sorrendbe vannak, akkor a legkisebb adat lesz a bal oldali adat, a legnagyobb adat lesz a jobb oldali adat

Gyakoriság, relatív gyakoriság

A gyakoriság lényegében a darabszámnak felel meg, ez vagy meg van adva a feladat szövegében, vagy táblázatos formában van megadva, vagy ki kell számolnunk (pl. %-okból)

A gyakoriságok összege kiadja az összes adat számát

Relatív gyakoriság esetén a gyakoriságokat osztjuk el az összes adat számával

Relatív gyakoriságokat megadhatjuk tört alakban vagy tizedes tört alakban is

Tört alak esetén, ha tudunk, egyszerűsíthetünk is

A relatív gyakoriságok összege mindig 1 kell, hogy legyen, így akár a végén ellenőrizni is tudunk

Valószínűség

Hol használunk valószínűséget?

- Kaszinóban
- Fogadásnál
- Befektetéseknél

A valószínűség mindig egy 0 és 1 közötti szám:

- Ha a valószínűség 0 (**Lehetetlen esemény**): Lehetetlen, hogy az adott dolog teljesüljön (Pl.: Dobókockával 7-nél nagyobb számot dobunk)
- Ha a valószínűség 0,5: Ugyanannyi az esélye annak, hogy teljesül, mint annak, hogy nem (Pl.: Dobókockával páros számot dobunk (vagy páratlant), vagy fej vagy írásnál fejet dobunk (vagy írást))
- Ha a valószínűség 1 (**Biztos esemény**): Biztosan teljesül az adott dolog (Pl.: Dobókockával egyjegyű számot dobunk)

Minél közelebb van a valószínűség 0-hoz, annál valószínűtlenebb az esemény (Pl.: 0,2)

Minél közelebb van a valószínűség 1-hez, annál valószínűbb az esemény (Pl.: 0,85)

Ha a valószínűséget %-ban szeretnénk megkapni, akkor be kell szorozni 100-zal, ebben az esetben 0% és 100% közötti értékeket kaphatunk

A valószínűség és a relatív gyakoriság egyes esetekben megegyezik egymással

A valószínűséget úgy tudjuk kiszámolni, hogy a kedvező esetek számát elosztjuk az összes eset számával

P-vel jelöljük a valószínűséget (Probability)

Valószínűség: $\boldsymbol{P = \frac{Kedvező\ esetek}{Összes\ eset}}$

Diagramok

Az adatokat meg lehet adni táblázatos formában, valamint diagram segítségével is

Miért alkalmazunk diagramokat?

- Azért, hogy átláthatóbb legyen, ne a táblázatban kelljen keresgélni a legkisebb/legnagyobb értéket, hanem ránézésre meg tudjuk mondani
- Nyomon tudjuk követni a változásokat (hőmérséklet esetén látjuk, hogy melyik nap nőtt, illetve melyik nap csökkent a hőmérséklet)

Milyen diagramokkal találkozhatunk?

- Oszlopdiagram (leggyakoribb)
- Vonaldiagram
- Pontdiagram
- Kördiagram
- Egyéb diagramok, kombinált diagramok

Diagramok esetén nagyon fontos a feliratozás, ha csinálunk egy diagramot mindig figyeljünk rá, hogy ezek meglegyenek:

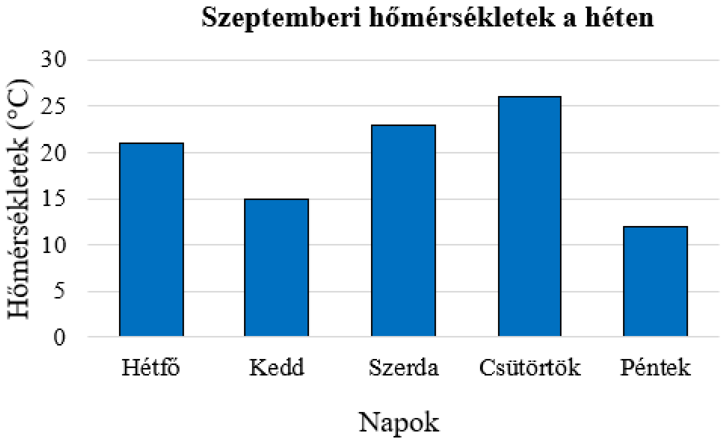
- Diagram cím (opcionális)
- Tengely feliratok (ha van értelme)
- Tengely feliratok mértékegysége (ha van)
- Jelmagyarázat (ha szükséges)

Az osztást mindig megfelelően válasszuk meg, nézzük meg a legnagyobb és legkisebb adatot, amit ábrázolnunk kell

Az osztások lehetnek 1-esével, 2-esével, 5-ösével, 10-esével, 20-asával, 50-esével, 100-asával …

Az osztásoknak nem muszáj mindig 0-ról indulnia, indulhat egy bizonyos értéktől is (pl.: Magasság)

Oszlopdiagram



Oszlopdiagram esetén van egy vízszintes és egy függőleges tengely

A vízszintes tengelyen lehetnek: Számok (Jegyek), Idő (Napok, hónapok, évek, dátumok), Nevek (5 barát neve)

A tengelyekhez mindig írunk megnevezést és mértékegységet (vagy csak mértékegységet)

A függőleges tengelyen számok szoktak lenni, legtöbbször darabszám, de lehet más is (Magasság, testsúly, pénz, hőmérséklet…)

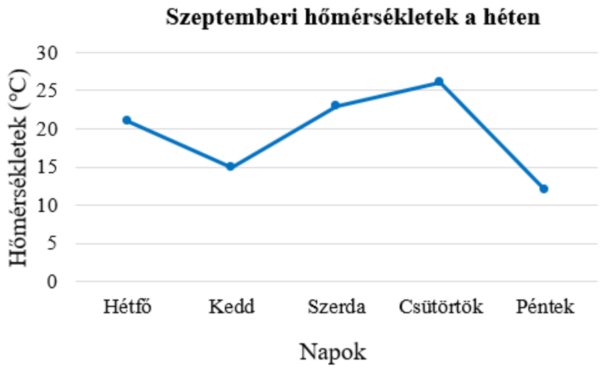
A tengelyeket fel lehet cserélni egymással, ezt akkor szoktuk megtenni, ha nagyobb és kisebb adatok is vannak, és a sima oszlopdiagramon nem férne ki rendesen (Fektetett oszlopdiagram)

Az oszlopok között ki szoktunk hagyni egy kis helyet (Ha nem hagyjuk ki, akkor hisztogramnak nevezzük, ami ugyanolyan, mint az oszlopdiagram, csak más a neve)

Oszlopdiagramon ábrázolhatunk több dolgot is egyszerre (pl.: több osztály, fiúk és lányok), ilyenkor fontos, hogy legyen jelmagyarázat is a diagram mellett, valamint egyértelmű legyen az oszlopok színezése/mintázata

Az oszlop színezése ilyenkor lehet: fehér, szürke, fekete, színes, pöttyös, sraffozott (csíkos)

Vonaldiagram



Az oszlopdiagramhoz hasonló a felépítése (Tengelyek, adatok elrendezése)

Vonaldiagram esetén is van egy vízszintes és egy függőleges tengely

A vízszintes tengelyen általában idő (Napok, hónapok, évek, dátumok) szerepel

A tengelyekhez mindig írunk megnevezést és mértékegységet (vagy csak mértékegységet)

A függőleges tengelyen olyan mennyiségek szerepelnek, amik nem csak egész számok lehetnek (Hőmérséklet, sebesség, megtett út)

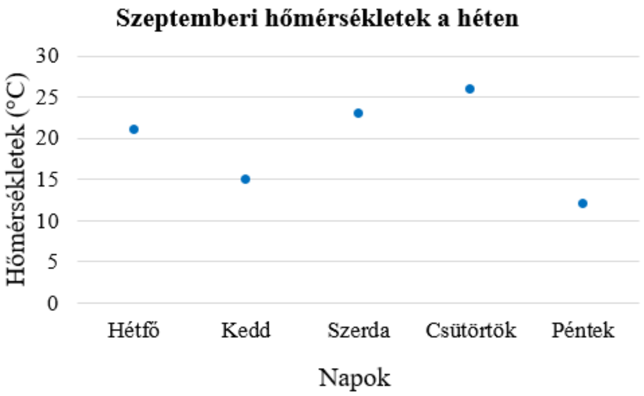
A tengelyeket **nem** lehet felcserélni egymással

Vonaldiagramon ábrázolhatunk több dolgot is egyszerre, ilyenkor fontos, hogy legyen jelmagyarázat is a diagram mellett, valamint egyértelmű legyen a vonalak színezése

A vonalakat ilyenkor különböző színekkel szoktuk jelölni: Piros, kék, zöld, sárga …

Jelölhetjük őket folytonos, szaggatott, pontozott vonalakkal is

Pontdiagram



A vonaldiagram megadható pontdiagramként, de az nem lesz annyira látványos

Pontdiagram esetén a pontok (pl.: Hőmérsékletnél a mérési pontok) nincsenek összekötve úgy, mint vonaldiagram esetén

Az oszlopdiagramhoz és vonaldiagramhoz hasonló a felépítése (Tengelyek, adatok elrendezése)

Pontdiagram esetén is van egy vízszintes és egy függőleges tengely

A vízszintes tengelyen általában idő (Napok, hónapok, évek, dátumok) szerepel

Tengelyekhez mindig írunk megnevezést és mértékegységet (vagy csak mértékegységet)

A függőleges tengelyen olyan mennyiségek szerepelnek, amik nem csak egész számok lehetnek (Hőmérséklet, sebesség, megtett út)

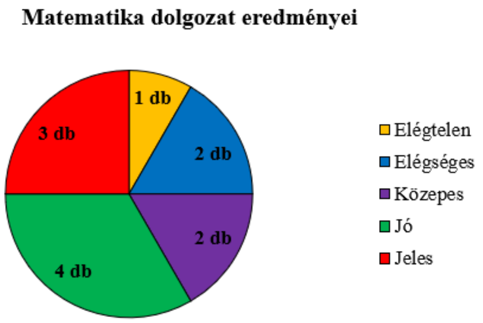
A tengelyeket **nem** lehet cserélni egymással

Pontdiagramon ábrázolhatunk több dolgot is egyszerre, ilyenkor fontos, hogy legyen jelmagyarázat is a diagram mellett, valamint egyértelmű legyen a magyarázat

A pontokat ilyenkor különböző színekkel szoktuk jelölni: Piros, kék, zöld…

Jelölhetjük őket különböző formával is: Teli pont, belül üres pont, x, négyzet

Kördiagram (tortadiagram)



A kördiagram teljesen más, mint a korábbi diagramok (nincsnek tengelyek)

Ugyanolyan típusú adatokat ábrázolhatunk kördiagramon, mint oszlopdiagramon (pl.: Jegyek)

Kördiagramon nem az adatok nagyságát, hanem az adatok egymáshoz képesti arányát szemléltethetjük

A kördiagramon ábrázolt adatokat megadhatjuk % segítségével, vagy a szeletek középponti szögével, vagy osztások segítségével is:

- A teljes kör 100%-nak felel meg
- A teljes kör 360°-nak felel meg
- A teljes kört feloszthatjuk 4, 5, 6, 7, 8… részre, ez mindig az adatok nagyságától fog függni

Ha két adat azonos értékű, akkor ugyanakkorák lesznek a tortaszeleteik is

Kördiagramon egyszerre csak egy dolgot ábrázolhatunk (Ha osztályokról van szó, akkor egyszerre vagy csak az egyik osztályt ábrázolhatjuk, vagy a teljes évfolyamot)

A körszeleteket különböző színekkel szoktuk jelölni: Piros, kék, zöld, sárga …