Számok csoportosítása

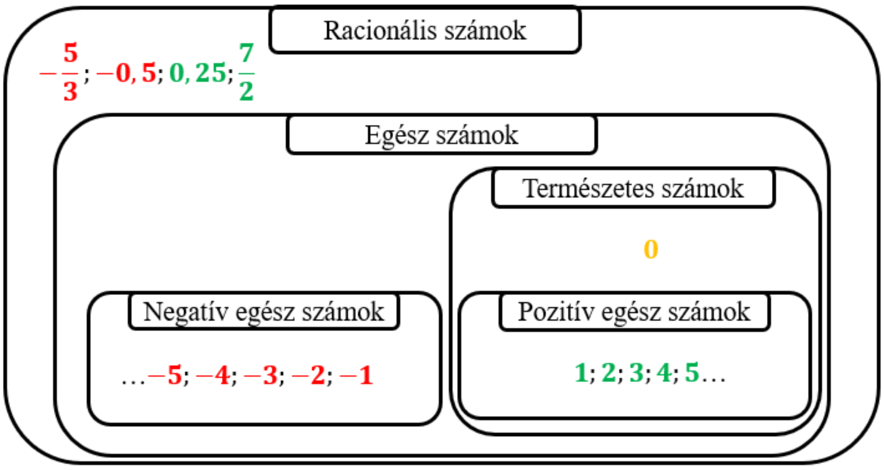
Egész számok ($\mathbb{Z}$): $\ldots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\ldots$

Pozitív egész számok ($\mathbb{Z}^+$): $1; 2; 3; 4; 5\ldots$

Negatív egész számok ($\mathbb{Z}^-$): $\ldots -5; -4; -3; -2; -1$

Természetes számok ($\mathbb{N}$): A pozitív egész számok és a 0 Felsorolva: $0; 1; 2; 3\ldots$

Racionális számok ($\mathbb{Q}$): Azok a számok, amik felírhatóak két egész szám hányadosaként, magyarán az összes egész szám a törtekkel és tizedes törtekkel kiegészülve Felsorolva: $\ldots -3; -\frac{5}{3}; -1; -0,5; 0; 0,25; 2; \frac{7}{2}; 5\ldots$



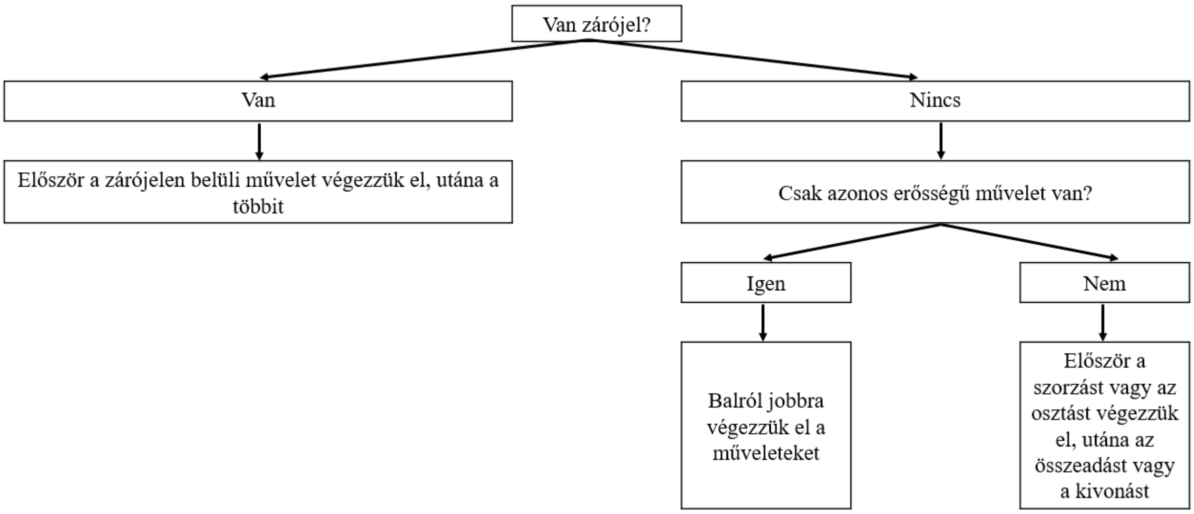
Műveletek sorrendje

1) Zárójelben lévő műveletek
2) Szorzás, osztás
3) Összeadás, kivonás

- Mindig balról jobbra haladva végezzük el a műveleteket!
- Figyelembe véve azt is, hogy melyiknek van „elsőbbsége”.
- A zárójel, ha van, mindig elsőbbséget élvez.
- Ezen túl meg a szorzás és osztás élvez elsőbbséget
- És legvégül az összeadásokat és kivonásokat végezzük el.

$(\ldots)$ $\cdot$ és $:$ $+$ és $-$

Műveltek sorrendje folyamatábra



Törtek

Törtek segítségével megadhatjuk, egy szám, síkidom, test, valahányadrészét

Törtek elképzeléséhez legkönnyebb a pizzára vagy tortára gondolni (attól függően ki mennyire édesszájú)

Törteket meg lehet adni szövegesen, és meg lehet adni őket számokkal is

Ahány egyenlő részre osztjuk annyiad rész lesz

Ha a tortát (pizzát) 4 egyenlő részre osztjuk, akkor 1 szelet a torta (pizza) negyed része lesz

Ha 4 egyenlő szeletre vágott tortából (pizzából) 3 szeletet kapunk meg, akkor a torta (pizza) **3** **negyed** részét kaptuk meg

Törtek bővítése

Miért bővítjük a törteket?

- Össze tudunk hasonlítani két törtet bővítés segítségével
- Törtek összeadását, kivonását tudjuk elvégezni bővítés segítségével
- Tizedes tört alakra tudjuk átírni a törteket bővítés segítségével

Hogyan fogunk bővíteni?

- A számlálót és a nevezőt is ugyanazzal az egész számmal fogjuk megszorozni
- Fontos, hogy a számláló és a nevező is meg legyen szorozva a számmal, ne csak az egyik
- Fontos, hogy a számláló és a nevező is ugyanazzal az egész számmal legyen megszorozva

Törtek egyszerűsítése

Miért egyszerűsítjük a törteket?

- Össze tudunk hasonlítani két törtet egyszerűsítés segítségével
- Törtek összeadását, kivonását tudjuk elvégezni egyszerűsítés segítségével
- Törtek szorzását, osztását tudjuk könnyebben elvégezni egyszerűsítés segítségével
- Tizedes tört alakra tudjuk átírni a törteket egyszerűsítés segítségével
- Kisebb számokkal kell dolgoznunk a számolások során (könnyebb elvégezni a számolásokat egyszerűsítés után)
- Szebb alakra tudjuk hozni a végeredményt

Hogyan fogunk egyszerűsíteni?

- A számlálót és a nevezőt is ugyanazzal az egész számmal fogjuk elosztani
- Fontos, hogy a számláló és a nevező is el legyen osztva a számmal, ne csak az egyik
- Fontos, hogy a számláló és a nevező is ugyanazzal az egész számmal legyen elosztva

Bővíteni mindig tudunk, egyszerűsíteni viszont nem mindig

Akkor tudunk egyszerűsíteni, ha a tört számlálója és nevezője is osztható ugyanazzal a számmal

Mindig igyekszünk a lehető legnagyobb számmal egyszerűsíteni

Egy törtet lehet többször is egyszerűsíteni

Egyszerűsítés ”jelölése”: Áthúzzuk a számlálót és a nevezőt is és az egyszerűsített számokat írjuk a tört fölé és alá

Törtek és az osztás művelet

A törtek osztás műveletet jelentenek

Ennek a tizedes törteknél lesz jelentősége

A törtet át tudjuk írni egy osztás műveletre, de az osztás műveletet is át tudjuk írni egy törtté:

- Az osztandó lesz a számláló
- Az osztó lesz a nevező

Tört esetén, ha a számláló osztható a nevezővel (a nevező osztója a számlálónak), akkor egész számot kapunk eredményül

Törtek típusai nagyság szerint

Az, hogy a tört 1-nél kisebb lesz, 1-gyel egyenlő lesz, vagy 1-nél nagyobb lesz, mindig attól függ, hogy a számláló és a nevező közül melyik a nagyobb

- 1-nél kisebb törtek: Számláló<Nevező
- 1-gyel egyenlő törtek: Számláló=Nevező
- 1-nél nagyobb törtek: Számláló>Nevező

Törtek vegyes alakja

1-nél nagyobb törteket átírhatunk vegyes tört alakba/vegyes tört alakban adhatjuk meg

A vegyes tört alak egy **egész számból** és egy **tört számból** áll, amiket egymás mellé írunk le

1-nél nagyobb törtek átírhatók vegyes tört alakba, de a vegyes tört alak is visszaírható tört alakba (oda-vissza működik)

Az egész szám és a törtrész között összeadásjel van, amit nem írunk ki

Hogy írjuk át a vegyes tört alakban lévő törtet sima (közönséges) tört alakra?

- Átírjuk az egész részt ugyanolyan nevezőjű törtként, mint a törtrész, majd összeadjuk őket

Hogy írjuk át a sima (közönséges) tört alakban lévő törtet vegyes tört alakra?

- A tört egy osztás műveletnek felel meg
- Megnézzük, hogy a számlálóban hányszor van meg a nevező, ez lesz egész rész, a maradék lesz a törtrész számlálójában

Törtek összeadása és kivonása

Törteket akkor tudunk összeadni egymással és kivonni őket egymásból, ha a két törtnek közös a nevezője (ugyanannyi szeletre vannak vágva a pizzák)

Ilyenkor csak össze kell adni a számlálókat (összeadásnál), valamint ki kell vonni egymásból őket (kivonásnál)

Mi van, ha nem ugyanaz a két tört nevezője?

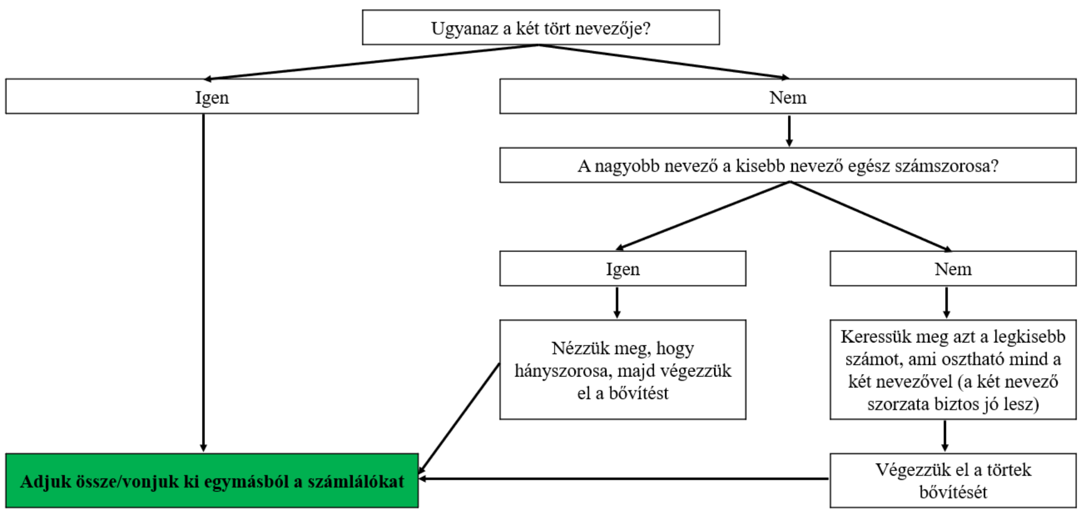
- Ilyenkor közös nevezőre kell hoznunk a két törtet

Hogy hozzuk közös nevezőre a törteket?

- Vagy egyik vagy mind a két törtet bővíteni fogjuk
- Ha az egyik nevező a másik nevező egész számszorosa, akkor a kisebb nevezőt fogjuk bővíteni a nagyobb nevezőre
- Ha a nevezők nem egymás egész számszorosai, akkor közös nevezőre hozzuk őket (mind a két törtet bővíteni fogjuk)
- Ilyenkor két dolgot tehetünk:
- Az egyik, hogy összeszorozzuk a nevezőket, és az lesz az új közös nevező (ez mindig működni fog, viszont van, hogy nagy számokkal kell dolgoznunk)
- A másik, hogy keresünk egy olyan számot, ami osztható az egyik és osztható a másik nevezővel is (van, hogy ez a szám a két szám szorzata lesz (előző eset), de van, hogy lesz kisebb szám is, ez azért előnyösebb, mint az összeszorzás, mert így nem kell nagy számokkal számolnunk)

A végén, ha tudunk, egyszerűsítünk (nem kötelező)

Törtek összeadásának és kivonásának lépései



Törtek összeadása és kivonása Pillangó módszer segítségével

Pillangó módszert akkor alkalmazzuk, ha a két tört nevezője különböző

Először összeszorozzuk a nevezőket, ez lesz a végeredmény nevezője

Ezután keresztbe szorozzuk az egyik tört számlálóját a másik tört nevezőjével, majd a másik tört számlálóját az egyik tört nevezőjével

A kapott eredményt a törtek fölé írjuk

Végül elvégezzük a kapott szorzatok összeadását/kivonását attól függően, hogy a két tört között összeadás jel vagy kivonás jel szerepelt

Ez a módszer csak kis számok (egyjegyű számok) esetén alkalmazható!!!

$$\overset{8\,+\,9}{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}=\frac{8+9}{3\cdot 4}$$

Törtek és egész számok összeadása és kivonása

Törtet és egész számot úgy adunk össze, vagy úgy vonjuk ki egymásból őket, hogy az egész számot felírjuk olyan nevezőjű törtként, mint a tört nevezője

Vegyes törtek összeadása és kivonása

Vegyes törtek összeadását kétféleképpen végezhetjük el:

- Összeadjuk az egészrészeket, és összeadjuk a törtrészeket, ha a törtrészek összegéből 1-nél nagyobb tört jön ki, akkor azt hozzáadjuk az egészrészhez
- Átírjuk mind a két vegyes törtet közönséges tört alakra, és úgy végezzük el az összeadást

Vegyes törtek kivonását is kétféleképpen végezhetjük el:

- Kivonjuk egymásból az egészrészeket és kivonjuk egymásból a törtrészeket, ez a módszer akkor előnyös, ha a törtrészek különbsége pozitív lesz (a kisebbítendő tört nagyobb, mint a kivonandó tört)
- Átírjuk mind a két vegyes törtet közönséges tört alakra, és úgy végezzük el a kivonást (ez mindig használható)

Vegyes tört és közönséges tört összeadása/kivonása során vagy összeadjuk a törtrészeket, vagy a vegyes törtet írjuk át közönséges tört alakra, és úgy végezzük el a műveleteket

Törtek szorzása egész számmal

Törteket úgy tudunk szorozni egész számmal, hogy a tört számlálóját megszorozzuk a számmal (ez a módszer mindig működni fog)

Ennél a módszernél ugyanúgy, mint összeadás vagy kivonás esetén, a végén, ha tudunk, akkor egyszerűsítünk

A szorzást úgy is elvégezhetjük, hogy az egész számot és a tört nevezőjét egyszerűsítjük egymással (ez csak akkor alkalmazható, ha az egész számnak és a tört nevezőjének van közös osztója)

Ennél a módszernél az eredményt a lehető legegyszerűbb alakban fogjuk megkapni, így a végén nem kell egyszerűsítenünk (mert közben elvégeztük)

Vegyes törtek szorzása egész számmal

Vegyes törteket úgy tudunk szorozni egész számmal, hogy szorozzuk az egész részt is az egész számmal, valamint a tört részt is, ha a tört részre, 1-nél nagyobb tört jön ki, akkor azt hozzáadjuk az egész részhez

Úgy is elvégezhetjük a szorzást, hogy a vegyes törtet átírjuk közönséges tört alakra, onnantól pedig ugyanúgy végezzük el a szorzást, mint tört és egész szám szorzása esetén

Törtek osztása egész számmal

Törteket úgy tudunk osztani egész számmal, hogy a tört **nevezőjét** megszorozzuk a számmal (ez a módszer mindig működni fog)

Ennél a módszernél ugyanúgy, mint összeadás vagy kivonás esetén, a végén, ha tudunk, akkor egyszerűsítünk

Az osztást úgy is elvégezhetjük, hogy a tört számlálóját és az egész számot elosztjuk/egyszerűsítjük egymással (ez csak akkor alkalmazható, ha a tört számlálójának és az egész számnak van közös osztója)

Ennél a módszernél az eredményt a lehető legegyszerűbb alakban fogjuk megkapni, így a végén nem kell egyszerűsítenünk (mert közben elvégeztük)

Vegyes törtek osztása egész számmal

Vegyes törteket úgy tudunk osztani egész számmal, hogy a vegyes törtet átírjuk közönséges tört alakra, onnantól pedig ugyanúgy végezzük el az osztást, mint tört és egész szám osztása esetén

Amennyiben a vegyes tört egészrésze és az egész szám oszthatóak egymással, azokat elosztjuk egymással, majd a törtrészt is elosztjuk az egész számmal (ez az eset elég ritka)

Törtek szorzásának és osztásának összehasonlítása

Szorzás:

A tört **számlálóját** és az egész számot **szorozzuk** egymással:

$5 \cdot \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{15}{4}}$

$3 \cdot \frac{2}{7} = \mathbf{\frac{6}{7}}$

A tört **nevezőjét** és az egész számot **egyszerűsítjük** egymással:

$\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \mathbf{\frac{5}{3}}$

$\frac{7}{\cancel{8}} \cdot \cancel{8} = \mathbf{7}$

Osztás:

A tört **nevezőjét** és az egész számot **szorozzuk** egymással:

$\frac{5}{4} : 2 = \mathbf{\frac{5}{8}}$

$\frac{7}{9} : 3 = \mathbf{\frac{7}{27}}$

A tört **számlálóját** és az egész számot **egyszerűsítjük** egymással:

$\frac{6}{7} : 3 = \mathbf{\frac{2}{7}}$

$\frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{9} : \overset{2}{\cancel{4}} = \frac{5}{9} : 2 = \mathbf{\frac{5}{18}}$

Tört szorzása törttel

Törtet úgy tudunk szorozni törttel, hogy a **számlálót** a **számlálóval**, a **nevezőt** a **nevezővel** szorozzuk

Szorzás esetén **nem kell közös nevezőre hozni** a két törtet, mint összeadásnál vagy kivonásnál

Ennél a módszernél a végén, ha tudunk, akkor egyszerűsítünk

A szorzás elvégzése előtt is egyszerűsíthetünk:

- Egyszerűsíthetjük a törteket külön-külön is (ha tudjuk)
- A számlálót és a nevezőt keresztbe tudjuk egyszerűsíteni (az egyik tört **számlálóját** a másik tört **nevezőjével**)
- Ha tudunk a törtön belül, valamint keresztbe is egyszerűsíteni, akkor mindegy a sorrend

Érdemes mindig elvégezni az egyszerűsítést, mert így kisebb számokkal kell dolgoznunk, és a végén a lehető legegyszerűbb alakban kapjuk meg az eredményt

Vegyes tört szorzása törttel vagy vegyes törttel

Vegyes törtet úgy tudunk szorozni törttel, hogy átírjuk közönséges tört alakra, majd elvégezzük a szorzást (**számlálót** a **számlálóval**, **nevezőt** a **nevezővel** szorozzuk, és ha tudunk, akkor a törteken belül vagy keresztbe egyszerűsítünk)

Vegyes törtet úgy tudunk szorozni vegyes törttel, hogy átírjuk mind a két vegyes törtet közönséges tört alakra, majd elvégezzük a szorzást (**számlálót** a **számlálóval**, **nevezőt** a **nevezővel** szorozzuk, és ha tudunk, akkor a törteken belül vagy keresztbe egyszerűsítünk)

Törtek reciproka

Egy tört reciprokát úgy kapjuk meg, hogy megcseréljük egymással a tört **számlálóját** és **nevezőjét**

Mire lesz jó, mikor fogjuk használni?

- Akkor, amikor törttel osztunk

Mi a helyzet egész számokkal?

- Egész számok felírhatóak eggyedekként, úgy már tudjuk venni a reciprokukat

1-nek a reciproka 1, ez az egyetlen pozitív szám, aminek a reciproka önmaga lesz

Negatív törtek, negatív számok esetén ugyanazt csináljuk, mint pozitív törtek és számok esetén, csak rakunk eléjük egy mínusz előjelet

A 0-nak nincs reciproka

Tört és reciprokának szorzata mindig 1 (a számlálót és a nevezőt is teljesen le tudjuk egyszerűsíteni keresztbe)

Ha a tört **számlálójában** 1 van, akkor a tört reciproka egész szám lesz

Törtek osztása törtekkel

Törtet úgy tudunk osztani törttel, hogy az osztó tört (osztásjel utáni tört) reciprokával szorzunk

Az első törttel (osztandó) nem csinálunk semmit, a második törtnek vesszük a reciprokát (megcseréljük a számlálót és a nevezőt), az osztás jelet pedig szorzásjelre cseréljük

Ha ezekkel a lépésekkel megvagyunk, akkor visszavezettük a példát két tört szorzására, innentől ugyanazt csináljuk, mint törtek szorzása esetén:

- A **számlálót** a **számlálóval**, a **nevezőt** a **nevezővel** szorozzuk

- Egyszerűsíthetjük a törteket külön-külön is (ha tudjuk)
- A **számlálót** és a **nevezőt** keresztbe is tudjuk egyszerűsíteni (az egyik tört számlálóját a másik tört nevezőjével)
- Egyszerűsítést érdemes a reciprokkal való szorzás átírása után elvégezni (ne kavarodjunk bele később)

Egész számok, törtek, vegyes törtek osztása

Tört osztása egész számmal: A tört nevezőjét szorozzuk az egész számmal, vagy ha tudjuk, akkor a számlálót és az egész számot egyszerűsítjük (Ha egyszerűbb, akkor az egész számot átírhatjuk eggyed tört alakra, onnantól pedig tört osztása törttel)

Egész szám osztása törttel: A tört reciprokával szorozzuk az egész számot (Ha egyszerűbb, akkor az egész számot átírhatjuk eggyed tört alakra, onnantól pedig tört osztása törttel)

Vegyes tört osztása törttel/Tört osztása vegyes törttel: A vegyes törtet átírjuk közönséges tört alakra, innentől a tört osztása törttel lépéseit követjük

Vegyes tört osztása vegyes törttel: Átírjuk mind a két vegyes törtet közönséges tört alakra, innentől a tört osztása törttel lépéseit követjük

Emeletes törtek

Emeletes törteknek nevezzük azokat a törteket, ahol egy törtet osztunk el egy másik törttel

Az emeletes tört alakot átírhatjuk két tört osztására, innentől pedig a tört osztása törttel szabályait alkalmazzuk

Tizedes törtek

Tizedesvessző helyett szokás pontot (**tizedespont**) is használni (legyakrabban informatikában, programozásban) **36. 12**

Tizedes törtek helyi értéke

Eggyedek nem lesznek

A tizedesvessző utáni 1. számjegy lesz a tized

A tizedesvessző utáni 2. számjegy lesz a század

A tizedesvessző utáni 3. számjegy lesz az ezred

Ezt lehet folytatni tovább is (4. számjegy tízezred, 5. számjegy százezred …)

Helyi érték								Szám
ezres (E)	százas (sz)	tízes (t)	egyes (e)		tized (t)	század (sz)	ezred (E)	
1	1	4	5	,	8	6	7	1145,867

Egész számok esetén a tizedesvessző után 0 szerepel (ezt nem szoktuk kiírni)

Pl.: $2 = 2{,}0$

A tizedesvessző utáni számjegy mögé bármennyi 0-t írhatunk, nem fog változni a szám értéke

Pl.: $2{,}2 = 2{,}20 = 2{,}200$

Ha a tizedesvessző és a törtrész között van 0, vagy vannak 0-k, azt nem hagyhatjuk el sosem

Pl.: $3{,}08 \neq 3{,}8 \qquad 4{,}002 \neq 4{,}02 \neq 4{,}2$

Tizedes törtek kimondása: Kimondjuk a tizedesvessző előtti számot (**egészrész**), utána azt mondjuk, hogy egész, ezután kimondjuk a tizedesvessző utáni számot, és utána a **törtrész** elnevezést (tized, század, ezred)

Ha a tizedesvessző után 1 számjegy van, akkor tizedet mondunk, ha 2 számjegy, akkor századot, ha 3 számjegy, akkor ezredet

Tizedes törteket felsorolás esetén pontos vesszővel (;) választjuk el: $\mathbf{1{,}2;\ 3{,}5;\ 6{,}85;\ 9{,}791}$

Törtek, vegyes törtek és tizedes törtek

A törteket át tudjuk írni tizedes tört alakra, és a tizedes törteket is át tudjuk írni tört alakra (oda-vissza működik)

1-nél kisebb törtek vagy tizedes törtek esetén nagyon egyszerű dolgunk lesz, csak ki kell mondani a törtet vagy a tizedes törtet és már kész is vagyunk

1-nél nagyobb tizedes tört átírásakor az egészrészt és a törtrészt is átírjuk tört alakra, és a kettőt összeadjuk

1-nél nagyobb törtek esetén megnézzük, mennyi lesz az egészrész és mennyi törtrész marad, majd elvégezzük az átírást

Vegyes törtek esetén nagyon egyszerű dolgunk lesz, csak felírjuk az egészrészt, és a tizedesvessző után a törtrészt

Tizedes törtek összehasonlítása

Tizedes törtek összehasonlítása esetén (Melyik a nagyobb?) először mindig az egészrészeket hasonlítjuk össze

Amelyiknek nagyobb az egészrésze, az lesz a nagyobb

Ha az egészrészek megegyeznek, akkor összehasonlítjuk a törtrészeket (tizedesvessző utáni részt)

Először a tizedeket nézzük meg, és amelyik szám tized helyi értékén nagyobb számjegy szerepel, az a szám lesz a nagyobb

Ha megegyezik a tized helyi értéken álló két számjegy, akkor a századokat nézzük meg, és amelyik szám század helyi értékén nagyobb számjegy szerepel, az a szám lesz a nagyobb

Ha a század helyi értéken álló két számjegy is megegyezik, akkor az ezredeket nézzük meg, és amelyik szám ezred helyi értékén nagyobb számjegy szerepel, az a szám lesz a nagyobb

Ha az egyik számban kevesebb számjegy van a tizedesvessző után, mint a másikban, akkor 0-kat képzelünk oda

Tizedes törtek kerekítése

Egészre kerekítés

Egészre kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb egész szomszédját, és eldöntjük, a kettő közül melyikhez van közelebb

A két egész szomszéd között félúton lévő szám mindig az 5, 50, 500 lesz (Félúton: Ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)

Ha a tized helyén 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor **lefelé** (↓) kerekítünk

Ha a tized helyén 5, 6, 7, 8, 9 számejgyek szerepelnek, akkor **felfelé** (↑) kerekítünk

Ha egész számot kell egészre kerekíteni, akkor a szám és a kerekített értéke megegyezik

Tizedre kerekítés (1 tizedesjegyre)

Tizedre kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb tized szomszédját, és eldöntjük, a kettő közül melyikhez van közelebb

A két tized szomszéd között félúton lévő szám mindig a ,05 ,050 lesz (Félúton: Ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)

Ha a század helyén 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor **lefelé** (↓) kerekítünk

Ha a század helyén 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek szerepelnek, akkor **felfelé** (↑) kerekítünk

Ha egész számot vagy 1 tizedesjegyű számot kell tizedre kerekíteni, akkor a szám és a kerekített értéke megegyezik

Századra kerekítés (2 tizedesjegyre)

Századra kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb század szomszédját, és eldöntjük, a kettő közül melyikhez van közelebb

A két század szomszéd között félúton lévő szám mindig az ,005 lesz (Félúton: Ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)

Ha az ezred helyén 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor **lefelé** (↓) kerekítünk

Ha az ezred helyén 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek szerepelnek, akkor **felfelé** (↑) kerekítünk

Ha egész számot, vagy 1 tizedesjegyű, vagy 2 tizedesjegyű számot kell századra kerekíteni, akkor a szám és a kerekített értéke megegyezik

Ezredre kerekítés (3 tizedesjegyre)

Ezredre kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb ezred szomszédját, és eldöntjük, a kettő közül melyikhez van közelebb

A két ezred szomszéd között félúton lévő szám mindig az ,0005 lesz (Félúton: Ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)

Ha a tízezred helyén 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor **lefelé** (↓) kerekítünk

Ha a tízezred helyén 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek szerepelnek, akkor **felfelé** (↑) kerekítünk

Ha egész számot, vagy 1 tizedesjegyű, vagy 2 tizedesjegyű, vagy 3 tizedesjegyű számot kell ezredre kerekíteni, akkor a szám és a kerekített értéke megegyezik

Tizedes törtek összeadása és kivonása

Tizedes törtek összeadása és kivonása esetén az egészrészeket az egészrészekkel adjuk össze, vagy vonjuk ki őket egymásból, valamint a törtrészeket a törtrészekkel adjuk össze, vagy vonjuk ki őket egymásból

Ha szép számokról van szó, akkor ezt fejben is el lehet végezni, ha csúnyább (nehezebb, nagyobb) számokról van szó, akkor írásban fogjuk elvégezni a műveleteket úgy, hogy először mindig a törtrészek műveletét végezzük el, utána pedig az egészrészek műveletét

Pl.: $3{,}2 + 4{,}6 = \mathbf{7{,}8}$ $\quad$ $13{,}12 + 11{,}23 = \mathbf{24{,}35}$

Ha a tizedesek összeadásakor az összeg pontosan 10 tized, 100 század, vagy 1000 ezred, akkor egész számot fogunk kapni, az egészrészhez még 1-et fogunk hozzáadni (ilyenkor nem kell tizedesvesszőt írni, elég csak leírni az egész számot)

Pl.: $2{,}3 + 5{,}7 = \mathbf{8}$ $\quad$ $16{,}88 + 13{,}12 = \mathbf{30}$

Kivonásnál, ha megegyeznek a tizedesek, akkor egész számot fogunk kapni (ilyenkor nem kell tizedesvesszőt írni, elég csak leírni az egész számot)

Pl.: $8{,}4 - 3{,}4 = \mathbf{5}$ $\quad$ $18{,}36 - 12{,}36 = \mathbf{6}$

Ha a tizedesek összeadásakor az összeg nagyobb, mint 10 tized, 100 század, vagy 1000 ezred, akkor egy egészet fogunk még hozzáadni az egészrészhez

Pl.: $3{,}5 + 4{,}7 = \mathbf{8{,}2}$ $\quad$ $14{,}67 + 12{,}52 = \mathbf{27{,}19}$

Ha nem ugyanannyi tizedesjegy szerepel a két szám esetén, akkor 0-t vagy 0-kat fogunk képzeletben odarakni a kevesebb tizedesjegyű szám utolsó tizedesjegye mögé

Pl.: $5{,}5\mathbf{0} + 3{,}12 = \mathbf{8{,}62}$ $\quad$ $12{,}3\mathbf{00} + 14{,}168 = \mathbf{26{,}468}$

Ha az összeadás vagy kivonás művelet elvégzése után a tizedek 0-ra végződnek, akkor a 0-t nem muszáj kiírnunk

Pl.: $5{,}12 + 4{,}28 = \mathbf{9{,}4}$ $\quad$ $11{,}127 + 13{,}273 = \mathbf{24{,}4}$

Kivonás esetén, ha a kisebbítendő törtrésze kisebb, mint a kivonandó törtrésze, akkor az egészrészből fogunk ”kölcsönkérni”, (maradék) és úgy végezzük el a kivonást

Pl.: $5{,}1 - 3{,}4 = \mathbf{1{,}7}$ $\quad$ $15{,}26 - 12{,}42 = \mathbf{2{,}84}$

Ha egész számot és tizedes törtet adunk össze, akkor összeadjuk az egészrészeket, és mögé írjuk a törtrészt

Pl.: $4 + 5{,}9 = \mathbf{9{,}9}$ $\quad$ $17{,}36 + 12 = \mathbf{29{,}36}$

Ha tizedes törtből vonunk ki egész számot, akkor csak kivonjuk egymásból az egészrészeket és mögé írjuk a törtrészt

Pl.: $8{,}3 - 2 = \mathbf{6{,}3}$ $\quad$ $16{,}46 - 14 = \mathbf{2{,}46}$

Ha egész számból vonunk ki tizedes törtet, akkor az egészrészből ”kölcsön kell kérnünk”, és úgy tudjuk elvégezni a kivonást, vagy elvégezzük az egészrészek kivonását, és a kapott eredményből még kivonjuk a törtrészt

Pl.: $7 - 5{,}2 = \mathbf{1{,}8}$ $\qquad$ $15 - 11{,}46 = \mathbf{3{,}54}$

Tizedes törtek szorzása 10-zel, 100-zal, 1000-rel

Ha a tizedes törteket 10-zel, 100-zal, 1000-rel szorozzuk meg, akkor annyiszor fogjuk **jobbra** (→) vinni a tizedesvesszőt, amennyi 0 az 1-es mögött szerepel (1**0**-nél **1-gyel**, 1**00**-nál, **2-vel**, 1**000**-nél **3-mal**, és így tovább…)

Ha nem tudjuk már tovább **jobbra** (→) vinni a tizedesvesszőt (az utolsó szám mögé került), de még kellene, akkor a szám mögé 0-kat fogunk írni (még annyi 0-t, amennyiszer **jobbra** (→) kellene vinni a tizedesvesszőt)

Ilyen feladatok elején érdemes mindig megbecsülni az eredményt úgy, hogy a tizedes tört törtrészét elhagyjuk, és úgy szorozzuk meg az egészrészt 10-zel, 100-zal, 1000-rel, így biztosan nem lesz benne hiba

Tizedes törtek szorzása egész számmal, és tizedes törttel

Ha tizedes törtet egész számmal szorzunk meg, akkor szép számok esetén csinálhatjuk ugyanazt, mint összeadás vagy kivonás esetén (megszorozzuk az egészrészt, valamint a törtrészt is a számmal), de ezt ritkán fogjuk használni, leggyakrabban írásban fogjuk elvégezni a szorzást

Pl.: $124{,}3 \cdot 2 = \mathbf{248{,}6}$

Tizedes törtet írásban ugyanúgy fogunk megszorozni egész számmal, mint ahogy két egész számot szorzunk össze egymással

A tizedesvesszőt mindig a szorzás végén írjuk oda a megfelelő helyre

A szabály az, hogy a végeredménynek ugyanannyi számjegye lesz a tizedesvessző után, mint amennyi a tizedes törtnek volt (Ha 1 tizedesjegye volt a tizedes törtnek, akkor az eredménynek is 1 tizedesjegye lesz, ha 2 volt, akkor az eredménynek is 2 lesz, ha 3 volt, akkor az eredménynek is 3 lesz)

Ami fontos ilyenkor, hogy a 0 is bele fog számítani (Ha a legutolsó egy vagy több számjegy 0 lesz)

A szorzás elvégzése előtt, vagy a tizedesvessző beírása előtt érdemes egy becslést elvégezni kerekítés segítségével, hogy biztosak legyünk abban, hogy hova kerül a tizedesvessző

A szorzás felcserélhető művelet, mindegy, hogy melyik tag szerepel az írásbeli szorzás jobb és bal oldalán

Ha tizedes törtet tizedes törttel szorzunk, akkor mindent ugyanúgy végzünk el, mintha ott sem lenne a tizedesvessző, csak a végén az eredménynél ugyanannyi számnak kell lennie a tizedesvessző mögött, mint eredetileg a két tizedes törtnek összesen (Pl.: $26{,}36 \cdot 1{,}2$ esetén a $26,$**36**-nál **2 szám** szerepel a tizedesvessző mögött, az $1,$**2** esetén **1 szám** szerepel a tizedesvessző mögött, tehát **összesen 3**, a szorzás elvégzése után a végeredménynél úgy tesszük ki a tizedesvesszőt, hogy **3 szám** legyen mögötte)

Két tizedes tört szorzása esetén is érdemes elvégezni egy becslést, hogy tudjuk, hogy nagyságrendileg mekkora számnak kell kijönnie

Egész számok, tizedes törtek osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel

Egész számokat úgy osztunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel, hogy a szám végéről annyi 0-t hagyunk el, amennyi 0 van az osztóban az 1-es után (1**0**-nél **1**, 1**00**-nál, **2**, 1**000**-nél **3** 0-t fogunk elhagyni a szám végéről)

Ha az egész szám nem 0-ra végződik, vagy nincs elegendő 0 a végén, akkor az utolsó szám mögé képzeletben odateszünk egy tizedesvesszőt, és annyiszor fogjuk **balra** (←) vinni, amennyi 0 szerepel az osztóban az 1-es mögött (1**0**-nél **1-gyel**, 1**00**-nál, **2-vel**, 1**000**-nél **3-mal** fogjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt)

Ha tizedes törteket 10-zel, 100-zal, 1000-rel osztunk el, akkor pedig annyiszor fogjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt, amennyi 0 szerepel az osztóban az 1-es mögött (1**0**-nél **1-gyel**, 1**00**-nál, **2-vel**, 1**000**-nél **3-mal** fogjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt)

Ha már nem tudjuk többször balra vinni (az első számjegy elé került), akkor az első számjegy elé beírjuk, hogy 0,…, ha pedig még tovább kell vinnünk, akkor a tizedesvessző utáni első számjegy és a tizedesvessző közé még annyi 0-t írunk, amennyiszer még **balra** (←) kellene vinni a tizedesvesszőt (ha még 2-vel kellene **balra** (←) vinni, akkor 0,00…)

Egész számok osztása egész számokkal (Maradékos osztás)

Korábban a maradékos osztás végén, ha volt maradék, nem csináltunk vele semmit, csak leírtuk, hogy: Maradék: …

Így, hogy tanultunk a tizedes törtekről, tovább fogjuk vinni ezeket az osztásokat

Első lépésként az eredmény utolsó számjegye mögé teszünk egy tizedesvesszőt

Utána a maradék mellé egy 0-t fogunk írni, és az így kapott számot fogjuk elosztani az osztóval

Ha elvégeztük az osztást, és 0 a maradék, akkor kész vagyunk

Ha nem 0 a maradék, akkor az új maradék mögé megint írunk egy 0-t, és elvégezzük az osztást

Ezt egészen addig fogjuk csinálni, amíg a végén 0 maradékot nem kapunk, vagy nem veszünk észre valami ismétlődést

Az ismétlődést mindig pöttyel fogjuk jelölni a szám felett

Pöttyök típusai:

- 1 pötty: $23,\dot{7} = 23{,}7777777777\ldots$
- 2 pötty egymás mellett: $19,\dot{2}\dot{5} = 19{,}2525252525\ldots$
- 2 pötty nem egymás mellett: $22,\dot{4}31\dot{9} = 22,\mathbf{431943194319}\ldots$

Tizedes törtek osztása egész számokkal

Az elején ugyanúgy fogjuk végezni az osztást, mint amikor egész számot egész számmal osztunk, de ha eljutunk a tizedesvesszőig, akkor az eredménynél kitesszük a tizedesvesszőt, majd folytatjuk az osztást, és ha van maradék, akkor 0-t írunk mögé, és egészen addig folytatjuk az osztást, amíg 0 maradék nem lesz a végén, vagy nincs ismétlődés

Osztás tizedes törtekkel

Ha egy számot (akár egész számot, akár tizedes törtet) tizedes törttel kell osztanunk, akkor a tizedes törtet meg kell szoroznunk annyival, hogy egész számot kapjunk (bármilyen számmal lehet szorozni, de 10-zel, 100-zal, 1000-rel szoktunk), ilyenkor, hogy a hányados ne változzon, az osztandót is ugyanezzel a számmal kell megszoroznunk (egész számokkal példa: $20:4 = \mathbf{5}$ és $200:40 = \mathbf{5}$)

Ha mind a két szám (osztandó és osztó is) tizedes tört, akkor elegendő, ha csak az osztó lesz egész szám, az osztandó maradhat tizedes tört (tizedes törtet tudunk írásban osztani egész számmal)

Egész számok szorzása, osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel

	Szorzás (→)	Osztás (←)
10-zel	1 db 0-t írunk a szám végére $35 \cdot 10 = \mathbf{350}$	Ha a szám 0-ra végződik, akkor 1 db 0-t elhagyunk $810 : 10 = \mathbf{81}$
		Ha a szám nem 0-ra végződik, akkor 1-gyel **balra** (←) visszük a tizedesvesszőt $38 : 10 = \mathbf{3,8}$
100-zal	2 db 0-t írunk a szám végére $47 \cdot 100 = \mathbf{4700}$	Ha a szám 00-ra végződik, akkor 2 db 0-t elhagyunk $3800 : 100 = \mathbf{38}$
		Ha a szám nem 00-ra végződik, akkor 2-vel **balra** (←) visszük a tizedesvesszőt $902 : 100 = \mathbf{9,02}$
1000-rel	3 db 0-t írunk a szám végére $61 \cdot 1000 = \mathbf{61\,000}$	Ha a szám 000-ra végződik, akkor 3 db 0-t elhagyunk $9000 : 1000 = \mathbf{9}$
		Ha a szám nem 000-ra végződik, akkor 3-mal **balra** (←) visszük a tizedesvesszőt $530 : 1000 = \mathbf{0,53}$

Tizedes törtek szorzása, osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel

	Szorzás (→)	Osztás (←)
10-zel	Ha 1 számjegy van a tizedesvessző után, akkor 1 **jobbra** (→) vitelnél egész számot kapunk eredményként $31{,}2 \cdot 10 = \mathbf{312}$	1-gyel **balra** (←) visszük a tizedesvesszőt $26{,}3 : 10 = \mathbf{2,63}$
	Ha 1-nél több számjegy van a tizedesvessző után, akkor 1-szer **jobbra** (→) visszük a tizedesvesszőt $16{,}75 \cdot 10 = \mathbf{167,5}$	Ha nem tudjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt (már az első számjegy előtt van), akkor 0,-et írunk a szám elé $2{,}7 : 10 = \mathbf{0,27}$
100-zal	Ha 1 számjegy van a tizedesvessző után, akkor 1 **jobbra** (→) vitel után 1 db 0-t írunk a szám mögé $25{,}7 \cdot 100 = \mathbf{2570}$	2-vel **balra** (←) visszük a tizedesvesszőt $153{,}9 : 100 = \mathbf{1,539}$
	Ha 2 vagy több számjegy van a tizedesvessző után, akkor 2-ször **jobbra** (→) visszük a tizedesvesszőt $17{,}937 \cdot 100 = \mathbf{1793,7}$	Ha nem tudjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt (már az első számjegy előtt van), akkor 0,-et írunk a szám elé $3{,}8 : 100 = \mathbf{0,038}$
1000-rel	Ha 1 vagy 2 számjegy van a tizedesvessző után, 1 vagy 2 **jobbra** (→) vitel után 1 vagy 2 db 0-t írunk a szám mögé $29{,}32 \cdot 1000 = \mathbf{29\,320}$	3-mal **balra** (←) visszük a tizedesvesszőt $1693{,}7 : 1000 = \mathbf{1,6937}$
	Ha 3 vagy több számjegy van a tizedesvessző után, akkor 3-szor **jobbra** (→) visszük a tizedesvesszőt $13{,}5189 \cdot 1000 = \mathbf{13\,518,9}$	Ha nem tudjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt (már az első számjegy előtt van), akkor 0,-et írunk a szám elé $29{,}5 : 1000 = \mathbf{0,0295}$

Szorzás, osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel összefoglaló

Szorzás (→):

- **Egész számok**:

  Annyi 0-t fogunk írni a szám végére, amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (10-nél **1-et**, 100-nál, **2-t**, 1000-nél **3-at**)

- **Tizedes törtek**:

  Annyiszor visszük a tizedesvesszőt **jobbra** (→), amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (10-nél **1-gyel**, 100-nál, **2-vel**, 1000-nél **3-mal**)

  Ha már nem tudjuk **jobbra** (→) vinni, mert az utolsó számjegy mögött van, akkor 0-t vagy 0-kat fogunk a szám mögé írni (Ha 3-mal kellene **jobbra** (→) vinni a tizedesvesszőt, de az első **jobbra** (→) vitel után az utolsó számjegy mögé kerül, akkor még 2 db 0-t írunk a szám mögé, így kijön az $1 + 2 = 3$ **jobbra** (→) vitel)

Osztás (←):

- **Egész számok**:

  Ha a szám végén megfelelő mennyiségű 0 van, akkor annyi 0-t fogunk elhagyni szám végéről, amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (10-nél **1-et**, 100-nál, **2-t**, 1000-nél **3-at**)

  Ha a szám végén nincs megfelelő mennyiségű 0, akkor az utolsó számjegy mögé rakunk egy képzeletbeli tizedesvesszőt, és annyiszor visszük **balra** (←), amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (10-nél **1-gyel**, 100-nál, **2-vel**, 1000-nél **3-mal**)

- **Tizedes törtek**:

  Annyiszor visszük a tizedesvesszőt **balra** (←), amennyi 0 szerepel az 1-es mögött (10-nél **1-gyel**, 100-nál, **2-vel**, 1000-nél **3-mal**)

  Ha pont az első számjegy elé kerül a tizedesvessző a rakosgatás után, akkor elé írjuk, hogy 0, ...

  Ha az első számjegy elé került a tizedesvessző, de még tovább kellene vinni, akkor a 0, ... és a szám közé még annyi 0-t írunk, amennyivel még **balra** (←) kellene vinni azt

Hatványozás

Hatványozással találkoztunk már korábban a terület és térfogat mértékegységeinél (Terület: cm^2, m^2, Térfogat: cm^3, m^3)

A többszörös összeadás műveletet szorzással tudtuk kiváltani ($3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = \mathbf{12}$)

A többszörös szorzás műveletet **hatványozással** fogjuk kiváltani ($\mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{2}^{\mathbf{3}}$)

Kimondva: **Kettő** a **harmadikon**

A hatvány kifejezések két részből állnak:

Hatványkitevő

2^3

Hatványalap

Hatványalap (alsó szám)

Hatványkitevő (jobb felső szám)

A **hatványalap** az a szám, amit önmagával többször megszoroztunk, a **hatványkitevő** pedig az a szám, ahányszor szerepelt a **hatványalap**

Hatványozást ugyanazért fogjuk használni, mint összeadás esetén a szorzást, hogy ne kelljen 5, 6, 7, vagy még több szorzótényezőt leírni

A hatványozás oda-vissza működik, tehát szorzat alakból fel tudjuk írni a hatvány alakot, de a hatvány alakot is bármikor vissza tudjuk írni szorzat alakra

Fontos: $\mathbf{2^3 \neq 2 \cdot 3}$!!!!!!!!!!!

10 hatványai

Hatvány	Érték	Betűvel
10^1	10	Tíz
10^2	100	Száz
10^3	1000	Ezer
10^4	10 000	Tízezer
10^5	100 000	Százezer
10^6	1 000 000	Egymillió
10^7	10 000 000	Tízmillió
10^8	100 000 000	Százmillió
10^9	1 000 000 000	Egymilliárd

Hatványok, amiket jó tudni fejből

2. Hatványok	
1^2	**1**
2^2	**4**
3^2	**9**
4^2	**16**
5^2	**25**
6^2	**36**
7^2	**49**
8^2	**64**
9^2	**81**
10^2	**100**

3. Hatványok	
1^3	**1**
2^3	**8**
3^3	**27**
4^3	**64**
5^3	**125**

4. Hatványok	
1^4	**1**
2^4	**16**
3^4	**81**

2 hatványai	
2^2	**4**
2^3	**8**
2^4	**16**
2^5	**32**
2^6	**64**
2^7	**128**
2^8	**256**
2^9	**512**
2^{10}	**1024**

10 hatványai	
10^1	**10**
10^2	**100**
10^3	**1000**
10^4	**10 000**
10^6	**1 000 000**
10^9	**1 000 000 000**

Hatványozás azonosságai

Elnevezés	Azonosság
H1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
H2	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
H3	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
H4	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
H5	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

A H1 és H2 azonosságokat akkor használjuk, ha ugyanaz a hatványok **alapja**

A H3 és H4 azonosságokat akkor használjuk, ha ugyanaz a hatványok **kitevője**

A H5 azonosságot általában a zárójel felbontására szoktuk használni, ritkán használjuk a kitevők felcserélésére

Minden azonosságot oda-vissza tudunk alkalmazni (a H3 és H4 azonosságoknál van ennek a legtöbb értelme):

$$(3 \cdot x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = \boldsymbol{9x^2}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2^2} = \boldsymbol{\frac{x^2}{4}}$$

H1: Szorzás → **Kitevők** összeadása

H2: Osztás → **Kitevők** kivonása

Hatványok **alapjai** egyeznek meg

H3: Zárójelbe vitel → **Alapok** szorzása

H4: Zárójelbe vitel → **Alapok** osztása

Hatványok **kitevői** egyeznek meg

H5: Hatvány hatványozása → **Kitevők** szorzása (vagy cseréje)

Hatványozás tudnivalók

A hatványozás nem felcserélhető művelet ($2^3 \neq 3^2$)

A 2. hatványra emelt számokat négyzetszámoknak nevezzük

Kimondva: 5^2 → Öt a másodikon vagy öt a négyzeten

A 3. hatványra emelt számokat köbszámoknak nevezzük

Kimondva: 2^3 → Kettő a harmadikon vagy kettő a köbön

Hatványozás eredményei nem szép fokozatosan fognak növekedni, mint a szorzás eredményei, hanem egyre gyorsabban

Az 1-et akárhanyadikra emeljük mindig 1-et kapunk eredményül (mindegy, hogy hányszor szorozzuk össze önmagával)

Az 0-t akárhanyadikra emeljük mindig 0-t kapunk eredményül (mindegy, hogy hányszor szorozzuk össze önmagával)

Ha valamit az 1. hatványra emelünk, önmagát kapjuk vissza ($2^1 = 2, \quad 3^1 = 3 \ldots$)

Ha valamit az 0. hatványra emelünk mindig 1-et kapunk és nem 0-t!!!!!!!!!!!!!!!

$2^0 = 1, \quad 3^0 = 1 \quad 4^0 = 1\ldots$

Negatív kitevők hatványozás során

A hatványozás során negatív számok is lehetnek a kitevőben

Ez a H2-es azonosságból fog kijönni:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Ha a nevező kitevője nagyobb, mint a számlálóé, akkor kivonás során negatív számot fogunk kapni a kitevőben

Példa:

$$\frac{2^3}{2^4} = 2^{3-4} = \mathbf{2^{-1}}$$

$$\frac{2^3}{2^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Valamit a -1. hatványra emelve a kifejezés reciprokát kapjuk meg

$$3^{-1} = \frac{1}{3} \qquad 4^{-1} = \frac{1}{4} \ldots$$

Példa:

$$\frac{2^3}{2^6} = 2^{3-6} = \mathbf{2^{-3}}$$

$$\frac{2^3}{2^6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^3}}$$

Valamit negatív kitevőre emelve a kifejezés hatványának reciprokát kapjuk meg ($3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ $4^{-5} = \frac{1}{4^5}$ $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$ ...)

10 negatív hatványai

Hatvány	Érték (tört)	Érték	Betűvel
10^{-1}	$\frac{1}{10}$	0,1	Tized
10^{-2}	$\frac{1}{100}$	0,01	Század
10^{-3}	$\frac{1}{1000}$	0,001	Ezred
10^{-4}	$\frac{1}{10\,000}$	0,0001	Tízezred
10^{-5}	$\frac{1}{100\,000}$	0,00001	Százezred
10^{-6}	$\frac{1}{1\,000\,000}$	0,000001	Milliomod
10^{-9}	$\frac{1}{1\,000\,000\,000}$	0,000000001	Milliárdod

Negatív számok hatványozása

Negatív számok hatványozása során végeredményként kaphatunk pozitív, és kaphatunk negatív számot is

Ez a kitevőben lévő számtól függ:

Ha a szám **páros**, akkor a végeredmény **pozitív** lesz

Ha a szám **páratlan**, akkor a végeredmény **negatív** lesz

Páros esetben minden tagnak meglesz a párja ($\ominus \cdot \ominus = \oplus$)

Páratlan esetben minden tagnak meglesz a párja, kivéve az utolsó tagot ($\oplus \cdot \ominus = \ominus$)

Negatív szám hatványozása esetén a lépések:

Megnézzük, hogy a kitevő páros vagy páratlan

Ha **páros**, akkor pozitív lesz az eredmény, úgy oldjuk meg, mintha ott se lenne a mínusz jel

Ha **páratlan**, akkor az egyenlőség után teszünk egy mínusz jelet, de utána ugyanúgy oldjuk meg, mintha nem lenne ott mínusz jel

Normálalak

Normálalak nagy számok esetén

Nagyon nagy (általában sok 0-ra végződő) számok esetén használjuk a normálalakot

Azért használjuk, hogy ne kelljen a sok 0-t kiírni, ne írjunk le se kevesebbet, se többet, mint kéne

Föld és Nap távolsága 150 millió km, számmal: 150 000 000 km

A normálalak két tagból áll:

$150\,000\,000 = \mathbf{1,5} \cdot \mathbf{10^8}$

Egy 1 és 10 közötti számból (1 vagy annál nagyobb, 10-nél kisebb, és nem muszáj egész számnak lennie)

10 hatványából (10^2, 10^3, 10^4…)

Egy számot úgy írunk fel normálalakban, hogy az utolsó szám mögé képzeljük a tizedesvesszőt, és **balra** (←) visszük egészen az első számjegyig, és ahányszor **balra** (←) vittük a tizedesvesszőt, a 10 kitevőjében annyi lesz

Úgy is elképzelhető, mintha a számot 1-gyel szoroznánk meg, a számot folyamatosan osztjuk 10-zel, az 1-et pedig szorozzuk 10-zel, így nem változik a szorzat értéke

A tizedes tört végéről a 0-kat elhagyhatjuk, de ha van középen 0, azokat nem hagyhatjuk el

A normálalak ugyanúgy, mint a hatvány azonosságok, oda-vissza működik, tehát egy normálalakban felírt számot vissza tudunk írni ”rendes” alakra

Ha normálalakról ”rendes” alakra írjuk át a számot, akkor annyiszor visszük **jobbra** (→) a tizedesvesszőt, amennyi a 10 kitevője

Ha már nem tudjuk többször **jobbra** (→) vinni (utolsó számjegy mögé került), akkor 0-kat kezdünk írni az utolsó számjegy mögé (annyit, ahányszor még **jobbra** (→) kellene vinnünk a tizedesvesszőt)

Negatív számok esetén is ugyanúgy működik a normálalak, mint pozitív számok esetén, ugyanazokat a lépéseket fogjuk megcsinálni, csak a szám elé írunk egy mínusz előjelet

Normálalak esetén az 1-es szorzótényezőt is ki kell írnunk (Pl.: $10\,000 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{10^4}$)

Normálalak kis számok esetén

Nemcsak nagyon nagy, hanem nagyon kicsi számok esetén is használjuk a normálalakot $(0{,}0000\ldots)$

Itt is azért használjuk, hogy ne kelljen a sok 0-t kiírni, ne írjunk le se kevesebbet, se többet, mint kéne

Porszem tömege: $0{,}00000001\ g$

A normálalak két tagból áll:

$0{,}00000001 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{10^{-8}}$

Egy 1 és 10 közötti számból (1 vagy annál nagyobb, de 10-nél kisebb, és nem muszáj egész számnak lennie)

10 negatív hatványából $(10^{-2},\ 10^{-3},\ 10^{-4}\ldots)$

Nagyon kis számok esetén a 10 kitevőjében negatív szám lesz

Egy kis számot úgy írunk fel normálalakban, hogy a tizedesvesszőt addig visszük **jobbra** $(\rightarrow)$ a 0 mellől, míg az első nem 0 számjegy mögé nem kerül, és ahányszor **jobbra** $(\rightarrow)$ vittük a tizedesvesszőt, a 10 kitevőjében az a szám szerepel majd negatív előjellel

Úgy is elképzelhető, mintha a számot 1-gyel szoroznánk meg, a számot folyamatosan szorozzuk 10-zel, az 1-et pedig osztjuk 10-zel, így nem változik a szorzat értéke

Pici negatív számok (Pl.: $-0{,}000001$) esetén is ugyanígy működik minden, csak a szám elé írunk egy mínusz előjelet

Trükk: a 0, ... és az első számjegy között mindig eggyel kevesebb 0 lesz, mint amennyi a kitevőben szereplő szám

Ha normálalakról ”rendes” alakra írjuk át a számot, akkor annyiszor visszük **balra** $(\leftarrow)$ a tizedesvesszőt, amennyi a 10 kitevője