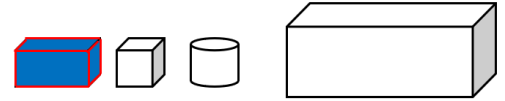


Test, felület, vonal, pont

Test:

- Van hosszúsága, mélysége, magassága (vastagsága)
- Felület határolja / Felületek határolják
- Pl.: Téglatest, Kocka, Henger, Gömb



Felület:

- Csak szélessége és magassága van, vastagsága nincs
- Vonallal határolja / Vonalak határolják
- Pl.: Téglalap, Négyzet, Kör, Háromszög



Vonal:

- Csak hosszúsága van, magassága és vastagsága nincs
- Pontok sokaságából áll
- Lehet egyenes vagy görbe
- Cérnaként vagy hajszálként tekintünk rá



Pont:

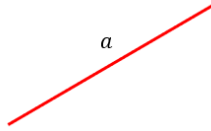
- Nincs sem hosszúsága, sem magassága, sem vastagsága
- Porszemként tekintünk rá



Egyenes vonalak típusai

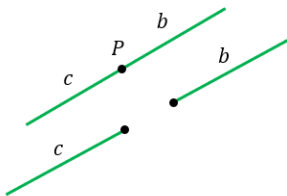
- Az ABC kis betűivel szoktuk jelölni

➤ Egyenes:



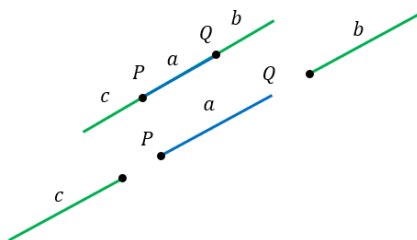
- Tetszőleges hosszúságú (úgy képzeljük el, mintha folytatódna a végtelenségig)
- Emiatt nem tudjuk lemérni, nincs hossza

➤ Félegyenes:



- Ha egy egyenesre berajzolunk egy pontot, akkor két félegyeneset kapunk
- A félegyenesnek van egy kezdőpontja, de ugyanúgy a végtelenségig folytatódik
- Nem tudjuk lemérni, nincs hossza

➤ Szakasz:

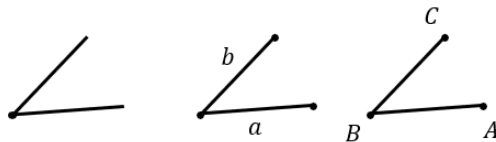


- Ha egy egyenesre berajzolunk két pontot, akkor kapunk két félegyeneset (c és b), a két félegyenes közötti részt (a) pedig szakasznak hívjuk
- A szakaszt le tudjuk mérni, van hossza
- Szakaszt az ABC kisbetűivel vagy a két végpontjával adhatunk meg (a szakasz, PQ szakasz)
- Vonalzó vagy körző segítségével mérhetjük le a szakaszt

Szögek

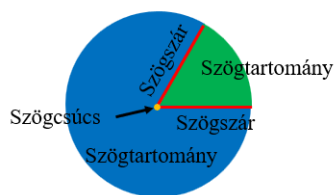
Hogy kapunk meg egy szöget?

- Két félegyenesből, amiknek ugyanaz a kezdőpontja
- Két szakaszból, amiknek az egyik végpontja közös
- Három pontból



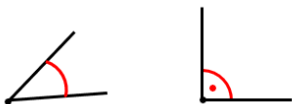
Szögek részei:

- Szögcsúcs
- Szögcsár
- Szögtartomány



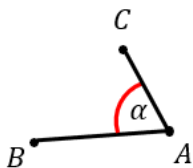
Szögek jelölése:

- Körívvel szoktuk jelölni a szögeket az ábrán
- A derékszögnek van külön jelölése, egy pontot rakunk a köríven belülré



Szögek elnevezése:


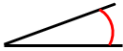
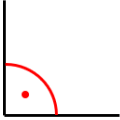

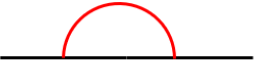
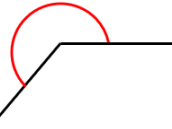
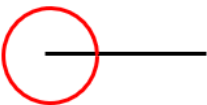
- A szögeket a görög ABC betűivel szoktuk jelölni:
(α (alfa), β (béta), γ (gamma), δ (delta))
- Ha három pontból kaptuk meg a szöget, akkor a három pont **megfelelő** felsorolásával is jelölhetjük ($ABC\hat{}$, $CBA\hat{}$, $BAC\hat{}$)



Görög ABC betűi, amiket érdemes tudni

Görög betű	Kimondva
α	Alfa
β	Béta
γ	Gamma
δ	Delta
ε	Epsilon
λ	Lambda
μ	Mü
σ	Sigma
φ	Fí
ω	Omega

Szögek típusai

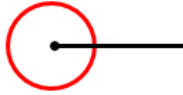
Szög neve	Szög értéke	Szög jelölése
Nullszög	$\alpha = 0^\circ$	
Hegyesszög	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	
Derékszög	$\alpha = 90^\circ$	
Tompaszög	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	
Egyenesszög	$\alpha = 180^\circ$	
Homorúsög	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$	
Teljesszög	$\alpha = 360^\circ$	

Szögek mértékegysége

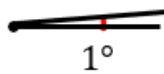
Ugyanúgy, mint a hosszúság, tömeg és űrtartalom esetén a szögeknek is van mértékegysége, amivel meg tudjuk határozni egy szög nagyságát

A szögek mértékegysége a fok, aminek a jele: °

A teljeszög 360°-os



Az 1° a teljeszög 360-ad része, amit úgy kapunk meg, hogy a teljeszög körívét 360 egyenlő részre osztjuk (nagyon kicsike lesz)



Minél jobban kinyitjuk a szárakat, annál nagyobb szöget fogunk kapni

Minél jobban összecusukjuk a szárakat, annál kisebb szöget fogunk kapni

A szögeket szögmérő segítségével tudjuk megmérni

A szögek további mértékegységei a szögperc és a szögmásodperc

Szögperc jele: '

Szögmásodperc jele: ''

A szögperc a fok 60-ad részét jelenti $\rightarrow 1^\circ = 60'$

A szögmásodperc a szögperc 60-ad részét jelenti (a fok 3600-ad részét) $\rightarrow 1' = 60''$ és $1^\circ = 3600''$

Ezek nagyon picik, szabad szemmel nem láthatóak

Trükk a megjegyzéshez: **Idő**

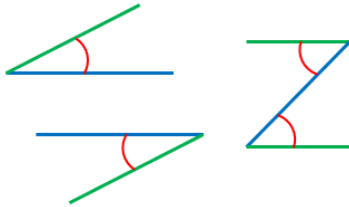
Szög	Idő
Fok	Óra
Szögperc	Perc
Szögmásodperc	Másodperc

Szög	Idő
$1^\circ = 60'$	$1 \text{ ó} = 60 \text{ p}$
$1' = 60''$	$1 \text{ p} = 60 \text{ mp}$
$1^\circ = 3600''$	$1 \text{ ó} = 3600 \text{ mp}$

Szögpárok

- **Váltószögek (Fordított állású szögek):** Ha a két szög szárai egymással párhuzamosak (vagy az egyik szár megegyezik a két szög esetén (Z betű))

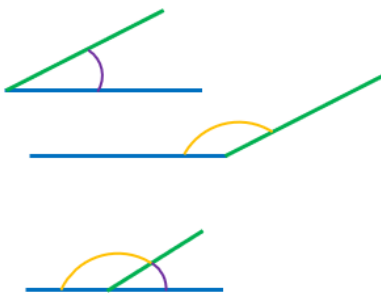
Ha egy szöget középpontosan tükrözünk, akkor kaphatunk váltószöget



- **Egyállású szögek:** Ha egy szöget eltolunk a síkon, akkor szárai ugyanúgy párhuzamosak lesznek, mint váltószög esetén, csak egy irányba is fognak állni, a szög és az eltolt szög ugyanakkora lesz



- **Kiegészítő szögek:** Ha két szög 180° -ra egészíti ki egymást, akkor azok kiegészítő szögek



Geometriai transzformációk

Tengelyes tükrözés

Az az egyenes, amire tükrözünk, a **tükörtengely**, általában t -vel szoktuk jelölni

Bármit is szeretnénk tükrözni (félegyenes, egyenes, szakasz, alakzat, síkidom, sokszög), mindig a pontokat fogjuk tükrözni, a pontok tükörképeit pedig a megfelelő sorrendben össze fogjuk kötni

Pontok tükrözése: A pontból merőlegest állítunk a tükörtengelyre, ezt meghosszabbítjuk, és ahol metszi a tükörtengelyt, ott beleszúrjuk a körzőnket, kinyitjuk akkorára, mint a metszéspont és az eredeti pont távolsága, és a tükörtengely másik oldalán elmetsszük a merőlegest

A pont tükörképe ugyanolyan távol lesz a tükörtengelytől, mint az eredeti pont

A pont tükörképét $'$ -vel jelöljük (Ha A pont volt az eredeti pont, a tükörképe A' lesz)

Minél közelebb van a pont a tükörtengelyhez, annál közelebb lesz a tükörképe is

Szakaszok tükrözése: A szakasz két végpontját tükrözzük, majd összekötjük ezeket

Félegyenesek tükrözése: Kiválasztunk egy tetszőleges pontot a félegyenesen, ezt és a félegyenes kezdőpontját tükrözzük, majd összekötjük őket, az összekötésnél tovább fogjuk húzni a vonalat

Egyenesek tükrözése: Kiválasztunk két tetszőleges pontot az egyenesen, ezeket tükrözzük, a pontok tükörképeit összekötjük meghosszabbítva

Sokszögek tükrözése: A sokszög minden pontját tükrözzük, majd ezeket a megfelelő sorrendben összekötjük (ugyanolyan sorrendben, mint az eredeti alakzat esetén)

Kör tükrözése: A kör középpontját tükrözzük, a körzőnket beleszúrjuk az eredeti kör középpontjába, kinyitjuk sugárnyira, a tükörkép középpontjába beleszúrjuk, és körzünk

Tengelyes tükrözés speciális esetei

Pont: Ha a pont a tükörtengelyen van, akkor a pont és a tükörképe megegyezik egymással

Szakasz: Ha a szakasz a tükörtengelyen van, akkor a szakasz és a tükörképe megegyezik egymással

Egyenes: A tükörtengellyel párhuzamos egyenes tükörképe is párhuzamos lesz a tükörtengellyel

Egyenes: Abban a pontban, ahol az egyenes metszi a tükörtengelyt, ott fogja metszeni a tükörképe is a tükörtengelyt (ez lesz az egyik választott pont)

Egyenes: Ha az egyenes rajta van a tükörtengelyen, akkor az egyenes és a tükörképe megegyezik egymással

Egyenes: Ha az egyenes merőleges a tükörtengelyre, akkor az egyenes és a tükörképe megegyezik egymással

Tengelyesen szimmetrikus sokszögek: Ha a sokszög úgy helyezkedik el, hogy a szimmetriatengelye egybeesik a tükörtengellyel, akkor a sokszög és a tükörképe megegyezik egymással

Kör: Ha a kör középpontja rajta van a tükörtengelyen, akkor a kör és a tükörképe megegyezik egymással

Kör: Ha a kör érinti a tükörtengelyt, akkor a tükörképe ugyanabban a pontban fogja érinteni a tükörtengelyt, mint az eredeti alakzat

Kör: Ha két pontban metszi a tükörtengelyt, akkor a tükörkép ugyanebben a két pontban fogja metszeni a tükörtengelyt

Tengelyes tükrözés tulajdonságai

Egyenestartó: Egyenes képe egyenes

Távolságtartó: A szakaszok hossza nem változik a tükrözés során

Szögtartó: A szögek nagysága nem változik a tükrözés során

Körtartó: Kör tükörképe is kör lesz

Egybevágósági transzformáció: Az alakzat és a tükörképe egybevágóak lesznek egymással (ugyanolyanok)

Egybevágóság jele: \cong

Megfordítható transzformáció: Ha a tükrözés során A pont tükörképe A' lett, akkor A' tükörképe A lesz

Megváltoztatja a körüljárási irányt: Ha az eredeti alakzat esetén az óramutató járásával **megegyező** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörkép esetén az óramutató járásával **ellentétes** irányba fogjuk összekötni a pontokat (Ha az eredeti alakzatnál az óramutató járásával **ellentétes** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörképnél az óramutató járásával **megegyező** irányba fogjuk összekötni a pontokat)

Középpontos tükrözés

Az a pont, amire tükrözünk, a szimmetriaközéppont, általában K -val szoktuk jelölni

Bármit is szeretnénk tükrözni (félegyenes, egyenes, szakasz, alakzat, síkidom, sokszög), mindig a pontokat fogjuk tükrözni, a pontok tükörképeit pedig a megfelelő sorrendben össze fogjuk kötni

Pontok tükrözése: A pontot összekötjük a K középponttal és meghosszabbítjuk, a pont tükörképe a meghosszabbított egyenesen lesz ugyanolyan távolságra K -tól, mint az eredeti pont

A pont tükörképe ugyanolyan távol lesz a középponttól, mint az eredeti pont

A pont tükörképét $'$ -vel jelöljük (Ha A pont volt az eredeti pont, a tükörképe A' lesz)

Minél közelebb van a pont a középponthez, annál közelebb lesz a tükörképe is

Szakaszok tükrözése: A szakasz két végpontját tükrözzük, majd összekötjük ezeket

Félegyenesek tükrözése: Kiválasztunk egy tetszőleges pontot a félegyenesen, ezt és a félegyenes kezdőpontját tükrözzük, majd összekötjük őket, az összekötésnél tovább fogjuk húzni a vonalat

Egyenesek tükrözése: Kiválasztunk két tetszőleges pontot az egyenesen, ezeket tükrözzük, a pontok tükörképeit összekötjük meghosszabbítva

Sokszögek tükrözése: A sokszög minden pontját tükrözzük, majd ezeket a megfelelő sorrendben összekötjük (ugyanolyan sorrendben, mint az eredeti alakzat esetén)

Kör tükrözése: A kör középpontját tükrözzük, a körzönket beleszúrjuk az eredeti kör középpontjába, kinyitjuk sugárnyíra, a tükörkép középpontjába beleszúrjuk, és körzünk

Középpontos tükrözés speciális esetei

Pont: Ha a pont a középponton van, akkor a pont és a tükörképe megegyezik egymással

Szakasz: Ha a szakasz átmegy a középponton, és a felezőpontja egybeesik középponttal, akkor a szakasz és a tükörképe megegyezik egymással

Szakasz: Ha a szakasz egyik végpontja a középponton van, akkor csak a másik végpontját kell tükrözni

Szakasz: Ha a szakasz nincs rajta a középponton, akkor a szakasz és a tükörképe párhuzamos lesz egymással, de a pontok felcserélődnek

Egyenes: Ha az egyenes nem megy át a középponton, akkor az egyenes és a tükörképe párhuzamos lesz egymással

Egyenes: Ha az egyenes átmegy a középponton, akkor az egyenes és a tükörképe megegyezik egymással

Középpontosan szimmetrikus sokszögek: Ha a sokszög úgy helyezkedik el, hogy a középpontja (átlók metszéspontja) egybeesik a szimmetriaközépponttal, akkor a sokszög és a tükörképe megegyezik egymással

Kör: Ha a kör középpontja egybeesik a szimmetriaközépponttal, akkor a kör és a tükörképe megegyezik egymással

Kör: Ha a körvonalon van a szimmetriaközéppont, akkor a tükörkép ugyanúgy át fog menni a középponton, és a középpontban fogja érinteni az eredeti kört

Kör: Ha a szimmetriaközéppont a körvonalon belül van, akkor körnek és a tükörképének két metszéspontja lesz

Középpontos tükrözés tulajdonságai

Egyenestartó: Egyenes képe egyenes

Távolságtartó: A szakaszok hossza nem változik a tükrözés során

Szögtartó: A szögek nagysága nem változik a tükrözés során

Körtartó: Kör tükörképe is kör lesz

Egybevágósági transzformáció: Az alakzat és a tükörképe egybevágóak lesznek egymással (ugyanolyanok)

Egybevágóság jele: \cong

Megfordítható transzformáció: Ha a tükrözés során A pont tükörképe A' lett, akkor A' tükörképe A lesz

Nem változtatja meg a körüljárási irányt: Ha az eredeti alakzat esetén az óramutató járásával **megegyező** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörkép esetén is az óramutató járásával **megegyező** irányba fogjuk összekötni a pontokat (Ha az eredeti alakzatnál az óramutató járásával **ellentétes** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörképénél is az óramutató járásával **ellentétes** irányba fogjuk összekötni a pontokat)

Tengelyesen szimmetrikus sokszögek vs középpontosan szimmetrikus sokszögek

		Tengelyesen	Középpontosan
Háromszögek	Általános	✗	✗
	Egyenlő szárú	✓	✗
	Szabályos	✓	✗
Négyszögek	Általános	✗	✗
	Általános trapéz	✗	✗
	Húrtrapéz	✓	✗
	Derékszögű trapéz	✗	✗
	Paralelogramma	✗	✓
	Rombusz	✓	✓
	Deltoid	✓	✗
	Téglalap	✓	✓
	Négyzet	✓	✓
Szabályos sokszögek	Páratlan csúcú	✓	✗
	Páros csúcú	✓	✓
Kör		✓	✓