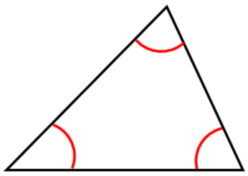
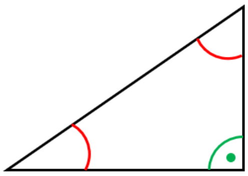
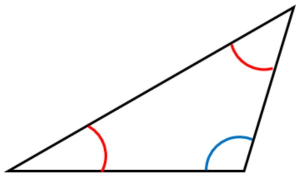
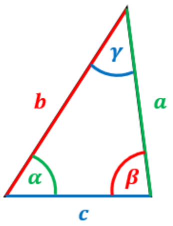
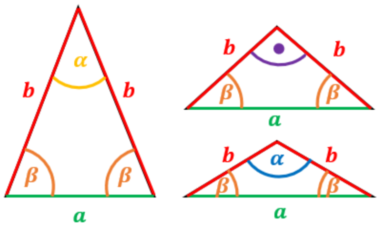
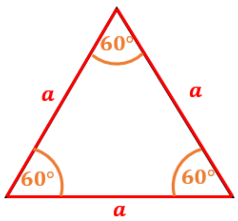
Háromszögek

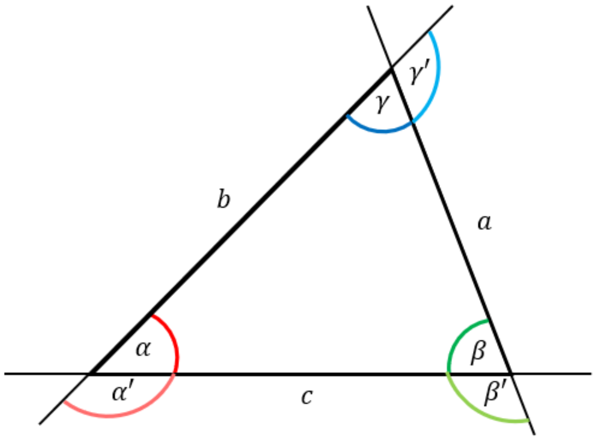
Háromszögek csoportosítása szögek szerint

<table>
<tr><th>Hegyesszögű háromszög</th><th>Derékszögű háromszög</th><th>Tompaszögű háromszög</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3 hegyesszöge van</td><td>2 hegyesszöge és 1 derékszöge van</td><td>2 hegyesszöge és 1 tompaszöge van</td></tr>
</table>

Háromszögek csoportosítása specialitás szerint

<table>
<tr><th>Általános háromszög</th><th>Egyenlő szárú háromszög</th><th>Szabályos (egyenlő oldalú) háromszög</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Lehet hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű is
Lényeg, hogy ne legyen két ugyanolyan hosszúságú oldala
Minden oldala és szöge különböző nagyságú</td><td>Lehet hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű is
2 oldala egyenlő hosszúságú lesz → Szárak
3. oldal → Alap
Az alapon fekvő két szöge egyenlő nagyságú
Szárak által bezárt szög → Szárszög</td><td>Mind a 3 oldala egyenlő hosszúságú lesz
Mind a 3 szöge egyenlő nagyságú lesz (60°)</td></tr>
</table>

Háromszögek belső és külső szögei



Háromszög belső szögei:

- A csúcsnál α szög
- B csúcsnál β szög
- C csúcsnál γ szög

Háromszög belső szögeinek összege mindig 180°

$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$

Háromszög külső szögeit úgy kapjuk meg, ha meghosszabbítjuk az oldalakat

Háromszög külső szögeit vesszővel fogjuk jelölni

Háromszög külső szögei:

- A csúcsnál α-hoz tartozó külső szög: α' szög
- B csúcsnál β-hoz tartozó külső szög: β' szög
- C csúcsnál γ-hoz tartozó külső szög: γ' szög

Belső szög és a hozzátartozó külső szög összege 180°

- $\alpha + \alpha' = 180°$
- $\beta + \beta' = 180°$
- $\gamma + \gamma' = 180°$

Külső szögek összege 360°

$\boldsymbol{\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°}$

Külső szög egyenlő a másik két belső szög összegével:

- $\alpha' = \beta + \gamma$
- $\beta' = \alpha + \gamma$

- $\gamma' = \alpha + \beta$

Összefüggések háromszögek oldalai és szögei között

Egy háromszög két oldalának összege mindig nagyobb kell, hogy legyen, mint a 3. oldal

- $a + b > c$
- $a + c > b$
- $b + c > a$

Rövidebben: A két rövidebb oldal összege nagyobb kell, hogy legyen, mint a leghosszabb oldal

Ha ez nem teljesülne, akkor a két rövidebb oldal nem érne össze

Pl.: $a = 2\ cm,\ \ b = 4\ cm,\ \ c = 10\ cm$ oldalú háromszöget nem tudunk rajzolni

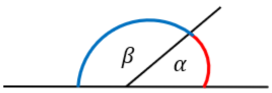
Az oldalak hosszúsága és a szögek nagysága összefügg egymással:

- A leghosszabb oldallal szemben van a legnagyobb szög
- A középső hosszúságú oldallal szemben van a középső nagyságú szög
- A legrövidebb oldallal szemben van a legkisebb szög

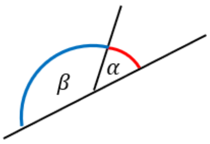
Egyenesen fekvő szögek

Az egy egyenesen fekvő szögek összege mindig 180°

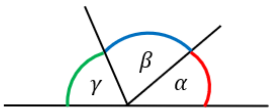
Ha ismerjük az egyik szöget a kettő közül, a másikat mindig ki tudjuk számolni



$\alpha + \beta = 180°$



$\alpha + \beta = 180°$



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Egyenesek metszésénél lévő szögek

Két egyenes metszésnél 4 szöget kapunk

Az egymással szemben lévő szögek ugyanakkorák

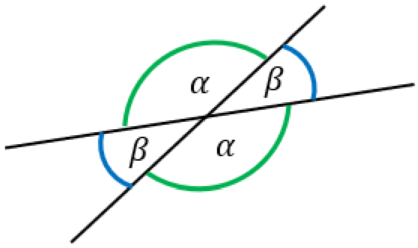
Az egymás mellett lévő szögek összege 180°

$\boldsymbol{\alpha + \beta = 180°}$

Ha a 4-ből ismerünk 1 szöget, a másik 3-at meg tudjuk határozni

A 4 szög összege 360°

$\boldsymbol{\alpha + \alpha + \beta + \beta = 360°}$



Egybevágó háromszögek

<u>Egybevágó</u>: Ugyanolyan

Egybevágóság esetén a két alakzatot tükrözéssel, forgatással, eltolással egymásba tudjuk vinni

Egybevágóság jele: ≅ (Pl.: $ABC\Delta \cong A'B'C'\Delta$)

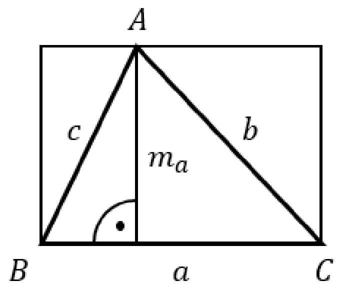
Háromszögek egybevágóságának esetei:

1) Ha a két háromszög mind a 3 oldala egyenlő ($a = a',\ b = b',\ c = c'$)
2) Ha a két háromszög 2 oldala és az általuk bezárt szög egyenlő ($a = a',\ b = b',\ \gamma = \gamma'$)
3) Ha a két háromszög 1 oldala és a rajtuk fekvő két szög egyenlő ($a = a',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma'$)
4) Ha a két háromszög 2 oldala és az egyiken lévő szög egyenlő ($a = a',\ b = b',\ \alpha = \alpha'$) $(a > b)$

Két háromszög nem biztos, hogy egybevágó, ha mind a 3 szöge egyenlő ($\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma'$)

Ezek megfordításai is igazak

Háromszögek területe



Általános háromszögek területe: Minden háromszög köré tudunk rajzolni egy téglalapot, a háromszög területe a téglalap területének pont a **fele** lesz

Téglalap területe: Szélesség · Magasság ($a \cdot b$)

Háromszög területe: (Szélesség · Magasság): $\mathbf{2}$ → (Alap · Magasság): $\mathbf{2}$

A háromszög magasságát m-mel jelöljük, az alsó indexbe azt az oldalt írva, amire merőleges (m_a, m_b, m_c)

Háromszög területe: $\boldsymbol{T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}}$

Ez az összefüggés igaz hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszögek esetén is

Specialitás szerint igaz általános, egyenlő szárú és szabályos háromszögek esetén is

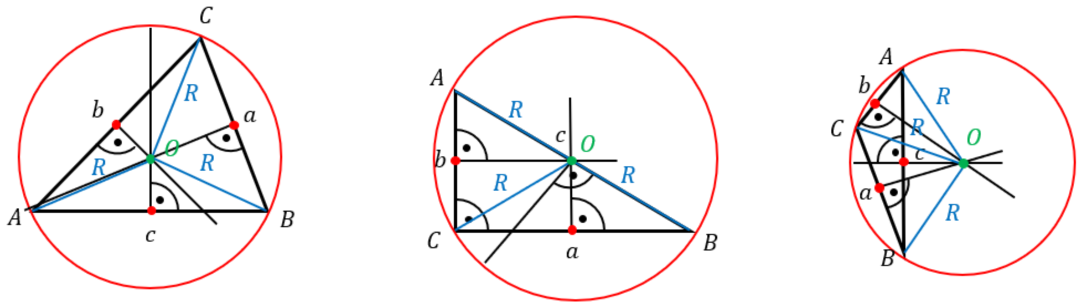
Tompaszögű háromszögek esetén a magasságot úgy tudjuk berajzolni, hogy az alapot meghosszabbítjuk (a magasság a háromszögön kívülre esik)

Ha két háromszögnek ugyanakkora egy oldala és az ahhoz tartozó magassága (a felső pontot csúsztatjuk egy vízszintes egyenes mentén), akkor a háromszögek területe megegyezik egymással

Derékszögű háromszögek területe: Derékszögű háromszög esetén az alap az egyik befogó (ha szokásos módon áll, akkor a vízszintes befogó), a magasság pedig a másik befogó lesz (ha szokásos módon áll, akkor a függőleges befogó)

Derékszögű háromszögek területe: $\boldsymbol{T = \frac{a \cdot b}{2}}$

Háromszögek köré írt köre



Ha berajzoljuk (vagy megszerkesztjük) a háromszög oldalfelező merőlegeseit, akkor azok egy pontban metszik egymást

Szerkesztés:

1) Beleszúrjuk a körzőnket az egyik csúcsba, kinyitjuk nagyobbra, mint az oldal fele, és körzünk
2) Ugyanezzel a távolsággal körzünk a másik csúcsból is
3) A két körív metszéspontjait összekötjük, ez az oldalfelező merőleges

Ez a pont ugyanolyan távol van a háromszög mind 3 csúcsától

Ez a pont a háromszög köré írható körének a középpontja (O)

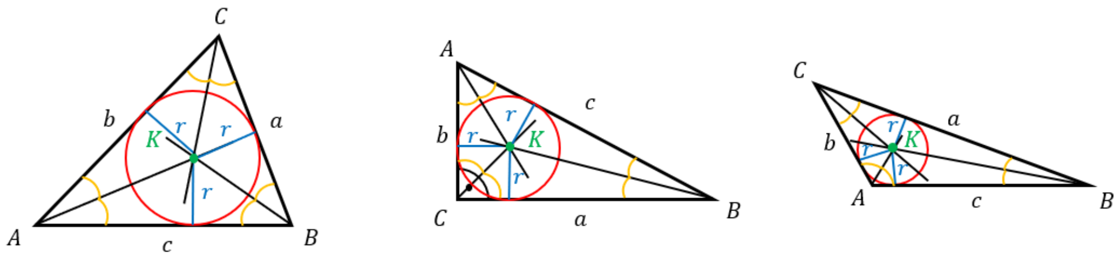
A pont és a csúcsok távolsága a köré írható kör sugara (R)

A köré írt kör középpontja:

- Hegyesszögű háromszögek esetén a háromszögön belül van
- Derékszögű háromszögek esetén az átfogó felén van (itt elég csak megkeresni az átfogó felezőpontját, a sugár pedig az átfogó fele lesz)
- Tompaszögű háromszögek esetén a háromszögön kívül lesz

Elegendő 2 oldalfelező merőlegest berajzolni, nem muszáj mind a 3-at

Háromszögek beírt köre



Ha berajzoljuk (vagy megszerkesztjük) a háromszög szögfelező egyeneseit, akkor azok egy pontban metszik egymást

Szerkesztés:

1) Beleszúrjuk a körzőnket az egyik csúcsba, kinyitjuk tetszőleges nagyságúra, és körzünk
2) Körzünk mind a két pontból, ahol a körív elmetszette az oldalakat
3) A két körív metszéspontját összekötjük a csúccsal, ez a szögfelező egyenes

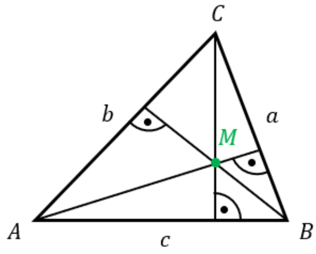
Ez a pont ugyanolyan távol van a háromszög mind 3 oldalától (nem feltétlenül az oldala felezőpontjától)

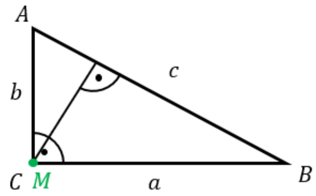
Ez a pont a háromszög beírható körének a középpontja (K)

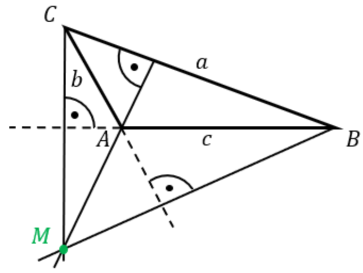
A pont és az oldalakat érintő pontok távolsága a beírható kör sugara (r)

A beírható kör középpontja mindig a háromszögön belül van függetlenül attól, hogy hegyesszögű, derékszögű, vagy tompaszögű a háromszög

Háromszögek magasságpontja







Ha berajzoljuk (vagy megszerkesztjük) a háromszög magasságait (magasságvonalait), akkor azok egy pontban metszik egymást

Szerkesztés:

1) Beleszúrjuk a körzőnket az egyik csúcsba, kinyitjuk akkorára, hogy a vele szemben lévő oldalt két pontban metssze (ha ez nem oldható meg, akkor a szemben lévő oldalt meghosszabbítjuk)

2) Beleszúrjuk a körzőnket az egyik metszéspontba, és tetszőleges nagyságúra kinyitva a körzőt körzünk

3) Beleszúrjuk a körzőnket a másik metszéspontba is, és ugyanazzal a nagysággal körzünk, mint az előbb

4) A két körív metszéspontjait összekötjük a csúccsal (a 3 pontnak egy egyenesen kell lennie)

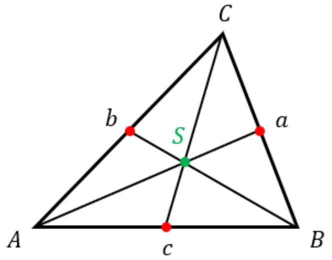
Ez a pont a háromszög magasságpontja (M)

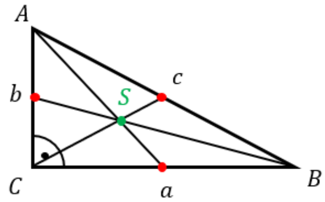
A magasságpont:

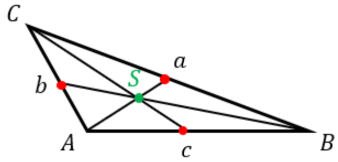
- Hegyesszögű háromszögek esetén a háromszögön belül van
- Derékszögű háromszögek esetén a derékszögnél lévő csúcs a magasságpont (itt nem kell megrajzolni a magasságokat, ugyanis a 2 befogó 2 magasság is egyben)
- Tompaszögű háromszögek esetén a háromszögön kívül van

Elegendő 2 magasságvonalat berajzolni, nem muszáj mind a 3-at

Háromszögek súlypontja







Ha összekötjük a háromszögek csúcsait a velük szemben lévő oldalak felezőpontjával, akkor megkapjuk a háromszög súlyvonalait

A súlyvonalak egy pontban metszik egymást

Felezőpont szerkesztése:

1) Beleszúrjuk a körzőnket az egyik csúcsba, kinyitjuk nagyobbra, mint az oldal fele, és körzünk

2) Ugyanezzel a távolsággal körzünk a másik csúcsból is

3) A két körív metszéspontjait összekötjük, ahol metszi az oldalt, az a felezőpont

Ez a pont a háromszög súlypontja (S)

A háromszög súlypontja az a pont, amin ha alátámasztanánk, akkor egyensúlyban maradna

A súlypont a súlyvonalakat $1:2$ arányban osztja fel

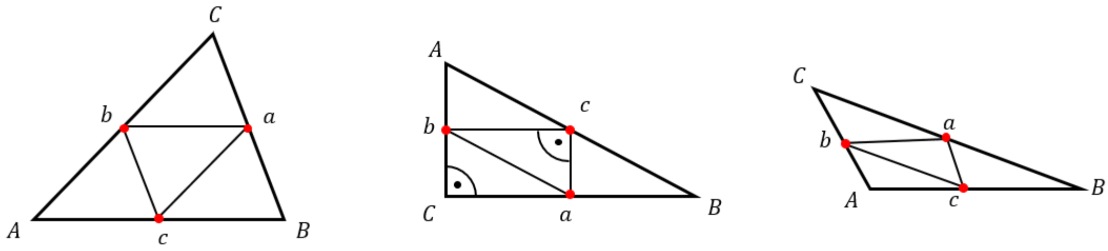
Ez azt jelenti, hogy a csúcsot és a súlypontot összekötő szakasz 2-szer olyan hosszú lesz, mint a felezőpontot a súlyponttal összekötő szakasz

A súlyvonal felezni fogja a háromszög területét

A súlypont mindig a háromszögön belül lesz függetlenül attól, hogy hegyesszögű, derékszögű, vagy tompaszögű a háromszög

Elegendő 2 súlyvonalat berajzolni, nem muszáj mind a 3-at

Háromszögek középvonalai



Ha a háromszög két oldalának összekötjük a felezőpontjait, akkor a háromszög középvonalait kapjuk meg

A középvonalak behúzásából kapunk egy háromszöget a háromszögön belül

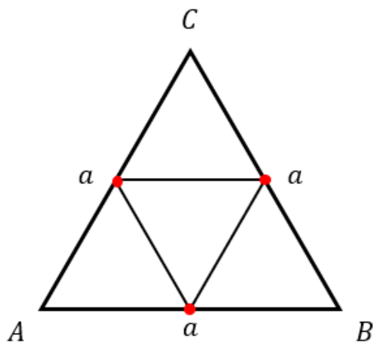
Felezőpont szerkesztése:

1) Beleszúrjuk a körzőnket az egyik csúcsba, kinyitjuk nagyobbra, mint az oldal fele, és körzünk
2) Ugyanezzel a távolsággal körzünk a másik csúcsból is
3) A két körív metszéspontjait összekötjük, és ahol metszi az oldalt, az a felezőpont

A középvonalak párhuzamosak a velük szemben lévő oldallal

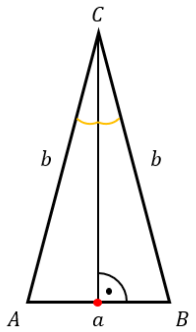
A középvonal fele olyan hosszú, mint a vele szemben lévő oldal

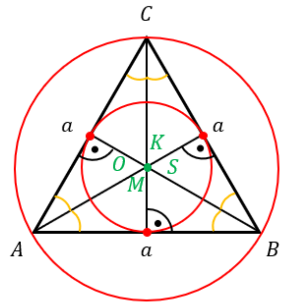
A szabályos háromszög középvonalai 4 egyenlő szabályos háromszögre bontják az eredeti háromszöget



Speciális háromszögek vonalai

Egyenlő szárú háromszög	Szabályos háromszög
Az a vonal, ami a szimmetria tengelyre esik egyszerre lesz oldalfelező merőleges, szögfelező egyenes, magasságvonal és súlyvonal is	Mind a 3 vonal egyszerre lesz oldalfelező merőleges, szögfelező egyenes, magasságvonal és súlyvonal is Az összes pont egybeesik (a beírható kör, a köré írható kör középpontja, a magasságpont és a súlypont) A beírható kör az oldalak felezőpontjában érinti az oldalakat



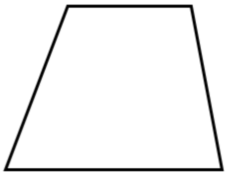
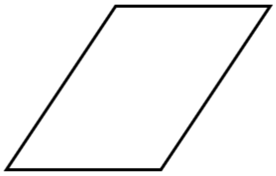
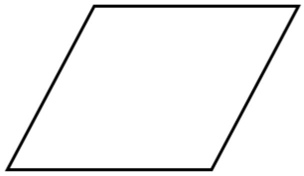


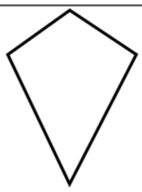
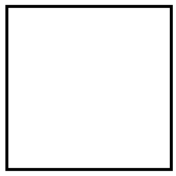
Háromszögek különböző pontjainak összefoglalása

	Oldalfelező merőlegesek	Szögfelező egyenesek	Magasságvonalak	Súlyvonalak
Hogy kapjuk meg?	Az oldalak felezőpontjaira merőlegeseket állítunk	Elfelezzük a szögeket	Csúcsból a szemközti oldalra merőlegest állítunk	Csúcsot a szemközti oldal felező pontjával kötjük össze
Specialitás	Köré írható kör	Beírható kör		
Metszéspont neve	Köré írható kör középpontja	Beírható kör középpontja	Magasságpont	Súlypont
Metszéspont helye	Hegyesszögű: Belül Derékszögű: Átfogó felén Tompaszögű: Kívül	Mindig a körön belül	Hegyesszögű: Belül Derékszögű: Derékszögnél Tompaszögű: Kívül	Mindig a körön belül

Négyszögek

Négyszögek fajtái

Trapéz	Paralelogramma	Rombusz
		
Olyan négyszög, aminek van 1 párhuzamos oldalpárja	Olyan négyszög, aminek van 2 párhuzamos oldalpárja	Olyan paralelogramma, aminek minden oldala egyenlő hosszúságú

Deltoid	Téglalap	Négyzet
		
Olyan négyszög, aminek az egyik átlója szimmetria tengely	Olyan paralelogramma, aminek minden szöge derékszög	Olyan téglalap, aminek minden oldala egyenlő hosszúságú

Trapéz

Olyan négyszög, aminek van 1 párhuzamos oldalpárja

A párhuzamos oldalakat hívjuk **alap**oknak

A másik két oldalt hívjuk **szár**aknak

Alapvetően nem szimmetrikus

Alapvetően az átlói **nem egyenlő** hosszúak

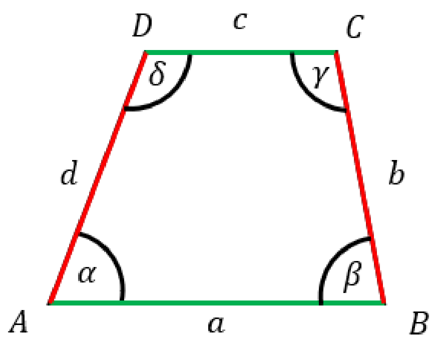
Átlói **nem felezik** egymást

Átlói **nem merőlegesek** egymásra

Az 1 száron fekvő két szögének összege 180°

$\alpha + \delta = 180°$

$\beta + \gamma = 180°$



Szimmetrikus trapéz (Húrtrapéz)

Szimmetrikus

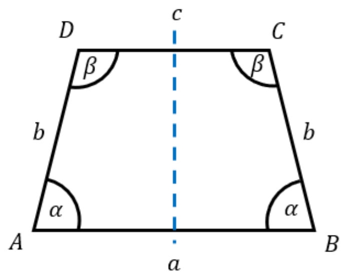
Szárai egyenlő hosszúak

Átlói egyenlő hosszúak

Az átlói **nem felezik** egymást

Átlói a szimmetria tengelyen metszik egymást

Az alapokon fekvő szögei ugyanakkorák a szimmetria miatt



Derékszögű trapéz

Van 2 derékszöge

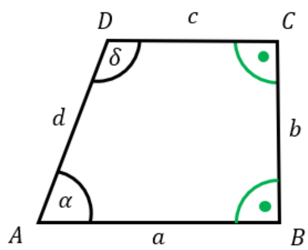
Nincs olyan trapéz, aminek csak 1 derékszöge van

Nem szimmetrikus

Szárai nem egyenlő hosszúak

Átlói **nem egyenlő** hosszúak

Az átlói **nem felezik** egymást

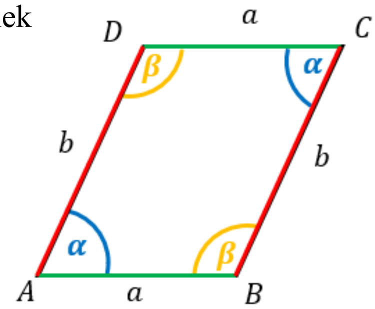


Paralelogramma

Olyan négyszög, aminek van 2 párhuzamos oldalpárja

A trapéz minden tulajdonsága igaz lesz rá, lesz pár új tulajdonsága pluszba

Az egymással szemben lévő oldalai azonos hosszúságúak lesznek



Középpontosan szimmetrikus, tengelyesen nem

A középpont, amire szimmetrikus az átlók metszéspontja lesz

Átlói **nem egyenlő** hosszúak

Átlói **felezik** egymást

Átlói **nem merőlegesek** egymásra

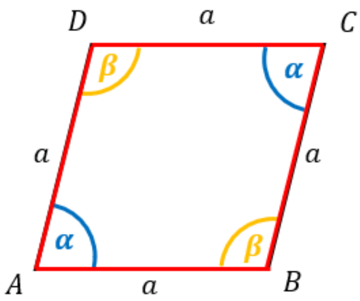
Az 1 **oldalon** fekvő két szögének összege 180°

Az egymással szemben lévő szögei egyenlő nagyságúak

Rombusz

Olyan paralelogramma, aminek minden oldala egyenlő hosszúságú

A paralelogramma minden tulajdonsága igaz lesz rá, lesz pár új tulajdonsága pluszba



Mind a 4 oldala ugyanolyan hosszúságú

Középpontosan és **tengelyesen is** szimmetrikus

A középpont, amire szimmetrikus az átlók metszéspontja lesz

2 szimmetria tengelye is lesz, ezek az átlói lesznek

Átlói **nem egyenlő** hosszúak

Átlói **felezik** egymást

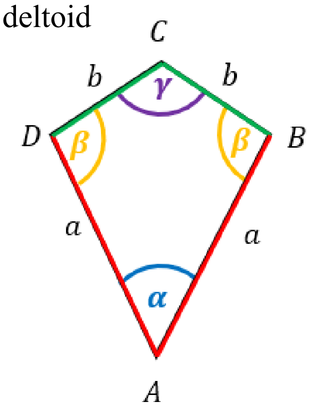
Átlói **merőlegesek** egymásra (Változás a sima paralelogrammához képest)

Az 1 oldalon fekvő két szögének összege 180°

Az egymással szemben lévő szögei egyenlő nagyságúak

Deltoid

Olyan négyszög, aminek egyik átlója szimmetria tengely



A trapéz, paralelogramma, rombusz tulajdonságaitól függetlenek a deltoid tulajdonságai

Az egymás melletti oldalai egyenlő hosszúságúak

Tengelyesen szimmetrikus, középpontosan nem

1 szimmetria tengelye lesz, ez az egyik átlója

Átlói **<u>nem egyenlő</u>** hosszúak

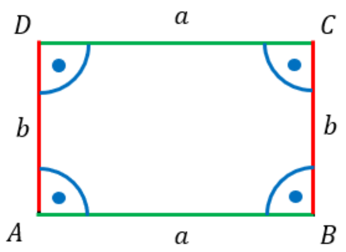
Átlói közül a szimmetria tengely átló **<u>felezi</u>** a nem szimmetria tengely átlót

Átlói **<u>merőlegesek</u>** egymásra

A szimmetria tengely átló felezi azokat a szögeket, amiken átmegy

Azok a szögek, amiken nem megy át a szimmetria tengely azonos nagyságúak lesznek

Téglalap



Olyan paralelogramma, aminek minden szöge derékszög

Egymás melletti oldalai egymásra merőlegesek

Az egymással szemben lévő oldalai azonos hosszúságúak lesznek

A paralelogramma minden tulajdonsága igaz lesz rá, lesz pár új tulajdonsága pluszba

Középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus (Tengelyes szimmetria új a paralelogrammához képest)

A középpont, amire szimmetrikus az átlók metszéspontja lesz

2 szimmetria tengelye is lesz, ezek az oldalak felező pontjait összekötő szakaszok lesznek

A szimmetria tengelyek metszéspontja a téglalap középpontja lesz

Átlói **egyenlő** hosszúak

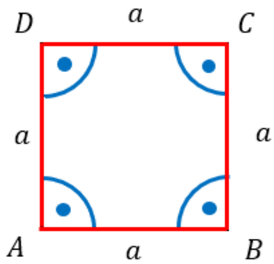
Átlói **felezik** egymást

Átlói **nem merőlegesek** egymásra

Minden szöge 90°

Négyzet

Olyan téglalap, aminek minden oldala egyenlő hosszúságú



Olyan rombusz, aminek minden szöge derékszög

A téglalap és a rombusz minden tulajdonsága igaz lesz rá

Mind a 4 oldala ugyanolyan hosszúságú

Középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus

A középpont, amire szimmetrikus az átlók metszéspontja lesz

4 szimmetria tengelye is lesz:

- 2 az oldalak felező pontjait összekötő szakasz lesz (téglalap)
- 2 a négyzet átlója lesz (rombusz)

A szimmetria tengelyek metszéspontja a négyzet középpontja lesz

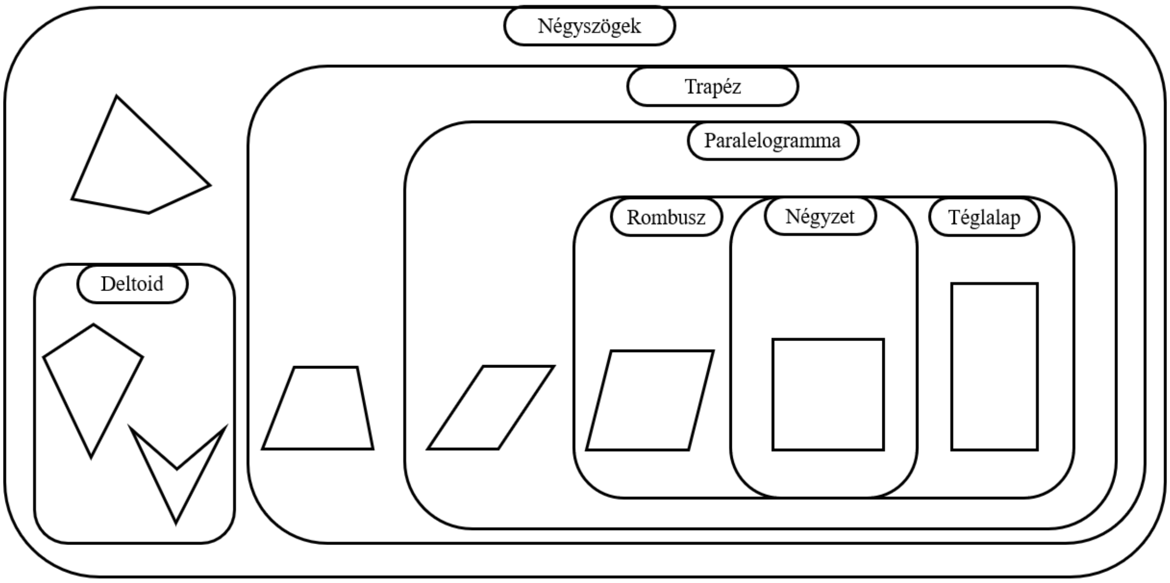
Átlói **egyenlő** hosszúak

Átlói **felezik** egymást

Átlói **merőlegesek** egymásra

Minden szöge 90°

Négyszögek összefoglalása



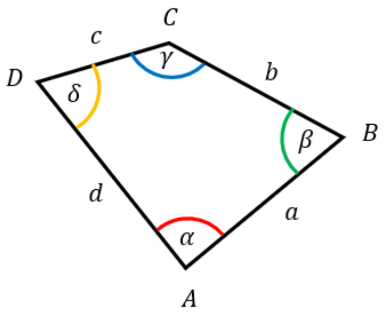
Minden négyzet: téglalap is, rombusz is, paralelogramma is, trapéz is, **deltoid!** is

Minden téglalap: paralelogramma is, trapéz is

Minden rombusz: paralelogramma is, trapéz is

Minden paralelogramma: trapéz is

Négyszögek



Olyan sokszögek, amelyeknek 4 oldala és 4 csúcsa van

Általános négyszögeknek nincs párhuzamos oldalpárja, mind a 4 oldal és mind a 4 szög különböző nagyságú általában (de lehetnek ugyanakkora szögek és oldalak is)

<u>Oldalak, csúcsok elnevezése</u>:

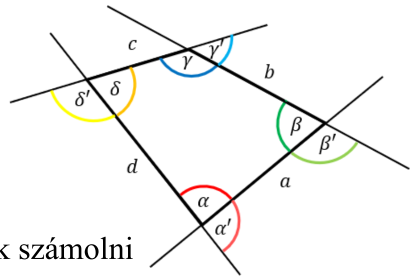
- A csúcsokat az ABC **<u>nagy</u>** betűivel nevezzük el (A, B, C, D)
- Az oldalakat az ABC **<u>kis</u>** betűivel nevezzük el (a, b, c, d), az ugyanolyan hosszúságú oldalakat ugyanazzal a betűvel szoktuk jelölni
- Ha nincsenek ugyanolyan hosszúságú oldalak: A csúcsok mellett lesz a hozzátartozó oldal (A csúcs mellett lesz a oldal, B csúcs mellett lesz b oldal…)

<u>Szögek elnevezése</u>: Hasonlóan, mint a háromszögnél:

- A csúcsnál α
- B csúcsnál β
- C csúcsnál γ
- D csúcsnál δ

Négyszögek átlóit e-vel és f-fel szoktuk jelölni (négyzet esetén d-vel)

Négyszögek szögei



Négyszög belső szögeinek összege mindig 360°

$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°}$

Ha a 4 szög közül ismerjük 3 szög nagyságát, a 4.-et ki tudjuk számolni

Lesznek olyan speciális négyszögek, ahol elegendő 1 szög nagyságát ismerni, a többi pedig ez alapján lesz meghatározható (Paralelogramma, Szimmetrikus trapéz)

Lesznek olyan négyszögek, amiknek tudjuk mind a 4 szögét, mert ugyanakkorák (Téglalap, Négyzet)

Négyszög külső szögeit úgy kapjuk, ha meghosszabbítjuk az oldalakat

Négyszög külső szögeit vesszővel fogjuk jelölni

Négyszög külső szögei:

- A csúcsnál α-hoz tartozó külső szög: α' szög
- B csúcsnál β-hoz tartozó külső szög: β' szög
- C csúcsnál γ-hoz tartozó külső szög: γ' szög
- D csúcsnál δ-hoz tartozó külső szög: δ' szög

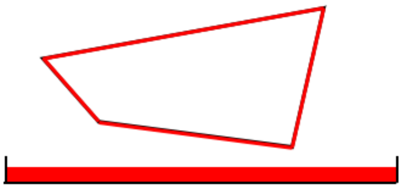
Belső szög és a hozzátartozó külső szög összege 180°

- $\alpha + \alpha' = 180°$
- $\beta + \beta' = 180°$
- $\gamma + \gamma' = 180°$
- $\delta + \delta' = 180°$

Külső szögek összege 360°

$\boldsymbol{\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360°}$

Konvex és konkáv alakzatok



Konvex

Konvex alakzatok: Azok az alakzatok, amiknek bármelyik két pontját összekötve egy egyenessel az egyenes **minden része az alakzaton belül lesz**

Másképpen megfogalmazva: Ha a földön van egy vékony festékes tálca, akkor, ha a konvex alakzatot elkezdjük forgatni a festékben minden oldalát **be tudjuk** festeni

Konvex alakzatnak **nincs** homorúszöge (180°-nál nagyobb)

Konkáv

Konkáv alakzatok: Azok az alakzatok, amik esetén tudunk találni két olyan pontot az alakzaton belül, amiket, ha összekötünk egy egyenessel, akkor az egyenes **nem minden része lesz az alakzaton belül**

Másképpen megfogalmazva: Ha a földön van egy vékony festékes tálca, akkor ha a konkáv alakzatot elkezdjük forgatni a festékben **nem tudjuk** minden oldalát befesteni

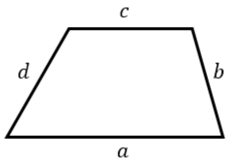
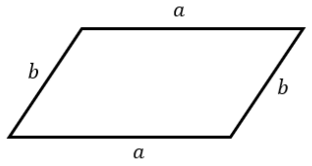
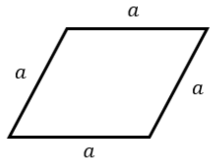
Konkáv alakzatnak **van** homorúszöge (180°-nál nagyobb)

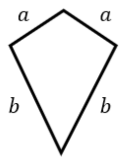
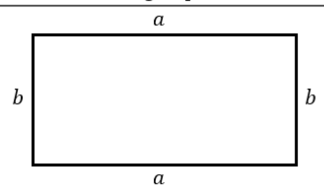
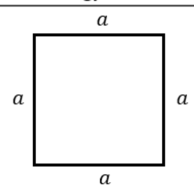
Példák:

Konvex alakzatok: Minden háromszög, Trapéz, Paralelogramma, Rombusz, Téglalap, Négyzet, Deltoidok egy része, Általános négyszögek egy része, Szabályos ötszög, Ötszögek egy része, Szabályos hatszög, Hatszögek egy része, Kör …

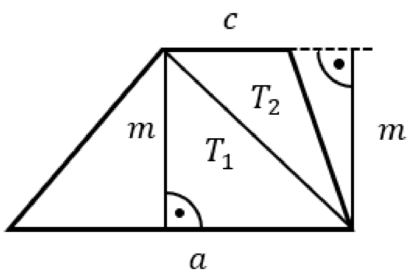
Konkáv alakzatok: Deltoidok másik része, Általános négyszögek másik része, Ötszögek másik része, Hatszögek másik része …

Négyszögek kerülete

Trapéz	Paralelogramma	Rombusz
		
$\boldsymbol{K = a + b + c + d}$	$\boldsymbol{K = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b)}$	$\boldsymbol{K = 4a}$

Deltoid	Téglalap	Négyzet
		
$\boldsymbol{K = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b)}$	$\boldsymbol{K = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b)}$	$\boldsymbol{K = 4a}$

Trapéz területe



Szimmetrikus trapéz esetén, ha behúzzuk a rövidebb alap két végpontjába a magasságokat, akkor kapunk egy téglalapot középen, és 2 ugyanolyan derékszögű háromszöget a jobb és bal oldalon

Derékszögű trapéz esetén egy téglalapra és egy derékszögű háromszögre tudjuk felbontani az alakzatot

Ez a módszer működhet általános trapéz esetén is, csak általános trapéz esetén nem tudjuk a háromszögek szélességét (hacsak nincs megadva)

A trapéz magassága az alapok távolsága

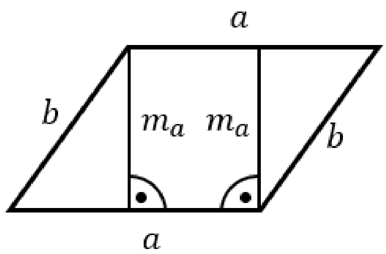
Általános trapéz területe esetén behúzzuk a trapéz egyik átlóját, ez két háromszögre fogja bontani a trapézt

Az egyik háromszög alapja a hosszabb alap lesz, a másik háromszög alapja a rövidebb alap lesz, mind a két háromszög magassága meg fog egyezni a trapéz magasságával

A trapéz területe a két háromszög területének összegével fog megegyezni:

$$\boldsymbol{T} = T_1 + T_2 = \frac{a \cdot m}{2} + \frac{c \cdot m}{2} = \frac{a \cdot m + c \cdot m}{2} = \boldsymbol{\frac{(a + c) \cdot m}{2}}$$

Paralelogramma területe



Paralelogramma esetén, ha behúzunk két magasságot, akkor kapunk középen egy téglalapot, jobb és bal oldalon pedig 2 ugyanolyan derékszögű háromszöget

Ha az egyik derékszögű háromszöget átrakjuk a másik derékszögű háromszög alá/fölé, akkor egy téglalapot fogunk kapni

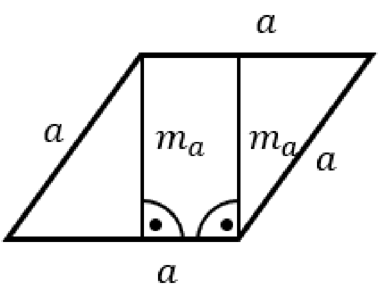
A téglalap szélessége megegyezik a paralelogramma oldalával, magassága is meg fog egyezni a paralelogramma magasságával

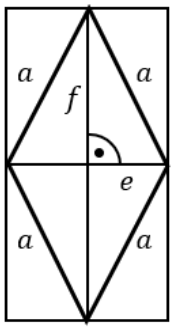
Ez azt jelenti, hogy egy a oldalú, m_a magasságú paralelogramma területe megegyezik egy ugyanilyen széles, ugyanilyen magas téglalap területével

A paralelogramma magassága a szemben lévő oldalak távolsága (2 magasság is van)

Paralelogramma területe: $\boldsymbol{T = a \cdot m_a = b \cdot m_b}$

Rombusz területe





A rombusz egy speciális paralelogramma (minden oldala egyenlő), tehát ugyanúgy ki tudjuk számolni a területét, mint egy paralelogrammának

<u>Rombusz területe</u>: $\boldsymbol{T = a \cdot m_a}$

A rombusz területét egy másik módszerrel is ki lehet számolni:

A rombusz átlóit e-vel és f-fel szoktuk jelölni

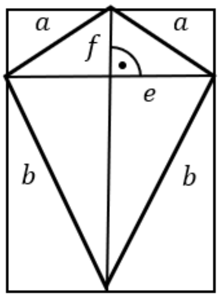
A rombusz átlói merőlegesek egymásra, ez azt jelenti, hogy köré tudunk rajzolni egy olyan téglalapot, aminek a szélessége megegyezik az egyik átló hosszával, magassága pedig megegyezik a másik átló hosszával, ez alapján:

<u>Rombusz területe</u>: $\boldsymbol{T = \frac{e \cdot f}{2}}$

Mikor melyiket használjuk?

- Ez attól függ, hogy milyen adatok vannak megadva, ha a feladat az oldalakat és a magasságot adja meg, akkor az első összefüggést használjuk, ha az átlókat, akkor a másodikat

Deltoid területe



A deltoid köré tudunk rajzolni egy téglalapot, aminek a szélessége megegyezik az egyik átló hosszával, magassága pedig megegyezik a másik átló hosszával

<u>Deltoid területe</u>: $\boldsymbol{T = \frac{e \cdot f}{2}}$

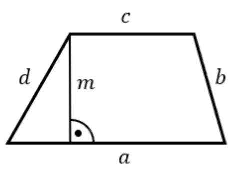
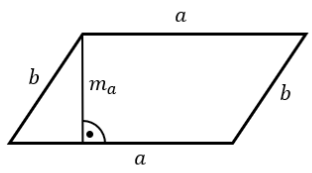
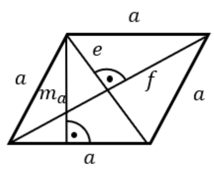
Egy deltoidnak csak ezzel az összefüggéssel tudjuk kiszámolni a területét, tehát az oldalak hossza nem fog számítani (nyilván az oldalak hossza befolyásolja az átlók hosszát is)

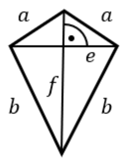
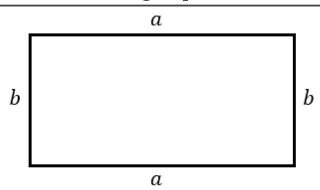
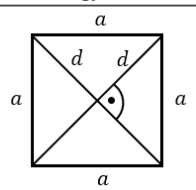
Úgy is gondolkozhattunk volna, hogy a szimmetriatengely-átló felezi a másik átlót, így két ugyanakkora háromszöget kapunk, amiknek az alapja a szimmetriatengely-átló (f), magassága pedig a másik átló fele ($\frac{e}{2}$):

$$\boldsymbol{T = \frac{\frac{e}{2} \cdot f}{2} \cdot 2 = \frac{e}{2} \cdot f = \frac{e \cdot f}{2}}$$

Az összefüggés igaz konvex (szokásos, papír sárkány) és konkáv (ritka, iránytű) deltoidok esetén is

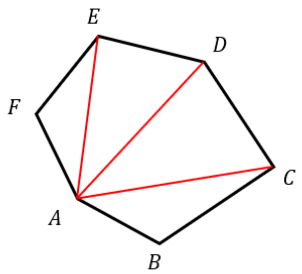
Négyszögek területe

Trapéz	Paralelogramma	Rombusz
		
$\boldsymbol{T = \frac{a+c}{2} \cdot m}$	$\boldsymbol{T = a \cdot m_a}$	$\boldsymbol{T = a \cdot m_a = \frac{e \cdot f}{2}}$

Deltoid	Téglalap	Négyzet
		
$\boldsymbol{T = \frac{e \cdot f}{2}}$	$\boldsymbol{T = a \cdot b}$	$\boldsymbol{T = a^2 = \frac{d^2}{2}}$

Sokszögek

Sokszögek átlói



Egy csúcsból 3-mal kevesebb átlót tudunk behúzni, mint a csúcsok száma:

- Nem tudunk átlót húzni önmagába
- Nem tudunk átlót húzni a 2 szomszédos csúcsba (azok az oldalak lesznek)

Legyen a sokszög n oldalú (n csúcsa is van)

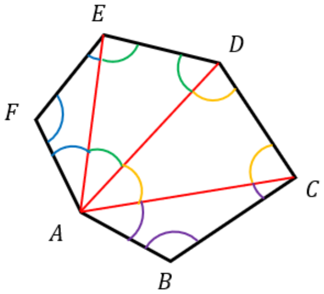
Egy csúcsból húzható átlók száma: $\boldsymbol{n - 3}$

Minden csúcsból $n - 3$ átlót tudunk behúzni

Az összes behúzható átló száma:

Azért kell osztani 2-vel, mert minden átlót kétszer számoltunk (az átló egyik végpontjánál és a másik végpontjánál is)

Sokszögek szögei



Az egy csúcsból húzott átlók 2-vel kevesebb háromszögre fogják bontani a sokszöget a csúcsok számánál → **Háromszögek száma**: $\boldsymbol{n-2}$

A belső szögek összege: $\boldsymbol{(n-2)\cdot 180°}$

Szabályos sokszögek esetén, ha egy belső szögre vagyunk kíváncsiak, akkor a belső szögek összegét elosztjuk a csúcsok számával

Egy belső szög nagysága:

A külső szögek összege mindig $360°$ lesz függetlenül a csúcsok számától

Egy külső szög nagyságát úgy kapjuk meg, ha $360°$-ot elosztjuk a csúcsok számával:

Egy külső szög nagysága:

Minél több csúcsa van a szabályos sokszögnek, annál nagyobbak lesznek a belső szögei, és annál kisebbek lesznek a külső szögei

Egy belső szög és a hozzátartozó külső szög összege mindig $180°$ lesz

Sokszögek oldalai, kerülete, területe

Sokszögek: Olyan síkidomok, amiket csak egyenes vonalak határolnak

Az ilyen típusú feladatoknál általában egy téglalapból vannak kivágva kisebb téglalapok, így kapunk egy sokszöget

A sokszög oldalai vízszintesek és függőlegesek szoktak lenni

A feladat 3 dologra szokott rákérdezni:

- Hiányzó oldalak hosszára

Hiányzó oldal hossza esetén meg kell nézni, hogy melyik másik oldalakból tudjuk megkapni a hiányzó oldal hosszát

Ha a hiányzó oldal vízszintes, akkor a vízszintes oldalakat fogjuk megnézni, ha függőleges, akkor a függőleges oldalakat

Általában két megadott oldal összegből vagy különbségéből tudjuk kiszámolni a hiányzó oldal hosszát

Nem mindig abban a sorrendben fogjuk meghatározni az oldalakat, amilyen sorrendben meg vannak adva (ABC sorrend)

- A sokszög kerületére

Sokszög kerületét kétféle módon lehet meghatározni:

- ❑ Az egyik mód, hogy kiválasztunk egy csúcsot (én a bal alsót szoktam) és körbemegyünk az oldalak mentén, közben összeadjuk az oldalak hosszúságát, amíg vissza nem érünk a kiválasztott csúcshoz
- ❑ A másik mód, hogy kiszámoljuk a nagy téglalap kerületét (amiből ki lettek vágva részek), figyelve a belső kivágásokra

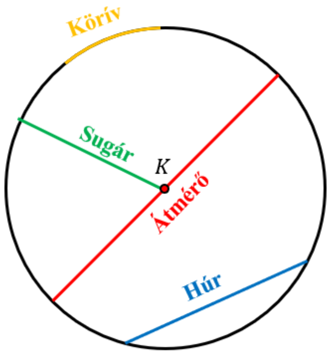
- A sokszög területére

A sokszög területét is kétféle módon lehet meghatározni:

- ❑ Az egyik mód, hogy kiszámoljuk a nagy téglalap területét, és ebből vonjuk ki a kivágott részek területét, amiket szintén kiszámolunk
- ❑ A másik mód, hogy a sokszöget felbontjuk téglalapokra, amiknek kiszámoljuk a területét, és ezeket összeadjuk

Kör

Kör részei



Kör középpontja: Az a pont, ahova beleszúrjuk a körzőnket, jele: K vagy O

Körvonal: Azok a pontok, amik ugyanolyan távol vannak egy megadott ponttól (kör középpontjától)

Körlap: A körvonalon belüli pontok alkotják

Húr: A körvonal két pontját összekötő szakasz

Átmérő: A leghosszabb húr, ami átmegy a középponton**,** jele: $d,\ D$ (diameter)

Sugár: A kör középpontját és a körvonal egy pontját összekötő szakasz, jele: $r,\ R$ (radius)

Körív: A körvonal egy darabja (Ha behúzunk két sugarat, a körív a sugarak végpontjai között lesz)

Körcikk: Egy körív és két sugara által határolt rész

Körszelet: Egy körív két végpontját összekötő húr és a körív által határolt alakzat

Kör kerülete

Sokszögek kerületét úgy tudjuk kiszámolni, hogy az oldalaik hosszát összeadjuk

Mi a helyzet a körrel?

- Kör kerületét úgy tudnánk meghatározni, hogy egy madzagot rakunk a körvonalra, és a madzagot kiegyenesítve rárakjuk egy vonalzóra (Nem túl tudományos)

A kör kerülete függ az átmérőtől (sugártól), minél nagyobb az átmérő, annál nagyobb a kör kerülete, és minél kisebb az átmérő, annál kisebb a kör kerülete

A kör kerületének és átmérőjének aránya mindig ugyanannyi

Ezt az arányt π (pí)-vel jelöljük

$$\pi = \frac{K}{d}$$

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{3,14}15926535\ldots$$

A π egy olyan tizedes tört, aminek a tizedesjegyei között nincs ismétlődés

A π értéke mindig ugyanannyi, ha számológéppel számolunk, akkor van külön π gomb is, mindig azzal számoljunk, hogy pontosabb értéket kapjunk

Ha meg van adva az átmérő (d) vagy a sugár (r), akkor ki tudjuk számolni a kör kerületét

Kör kerülete: $\boldsymbol{K = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi}$

Kör területe

Egy kör területét úgy tudjuk meghatározni, hogy a sugár négyzetét szorozzuk π-vel

Kör területe: $\boldsymbol{T = r^2 \cdot \pi}$

Kör területe: $\boldsymbol{T} = r^2 \cdot \pi = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{d^2}{4} \cdot \pi = \boldsymbol{\frac{d^2 \cdot \pi}{4}}$

Átmérővel nem nagyon szoktunk területet számolni, ha átmérő van megadva, kiszámoljuk belőle a kör sugarát, és úgy számoljuk ki a területet

Kerület és terület egymáshoz viszonyítva:

- A kerület és a terület 2 egységnyi sugár esetén egyezik meg ($2\ cm,\ 2\ dm,\ 2\ m\ldots$)
- 2-nél kisebb sugár esetén a kerület a nagyobb
- 2-nél nagyobb sugár esetén a terület a nagyobb

Felszín

Testek esetén tudunk felszínt számolni

A testek felszíne a lapok területének összege

A lapok legtöbbször téglalapok és négyzetek

Téglalap területét úgy számoljuk ki, hogy a szélességét és a magasságát összeszorozzuk egymással

Négyzetnek is ugyanígy számoljuk ki a területét, csak négyzet esetén a szélesség és a magasság megegyezik egymással

A lapok területének mértékegysége az oldalak mértékegységének négyzete lesz (cm^2, dm^2, m^2…)

Arra figyeljük, hogy ha nem azonos mértékegységben vannak megadva az oldalak, akkor végezzük el az átváltást

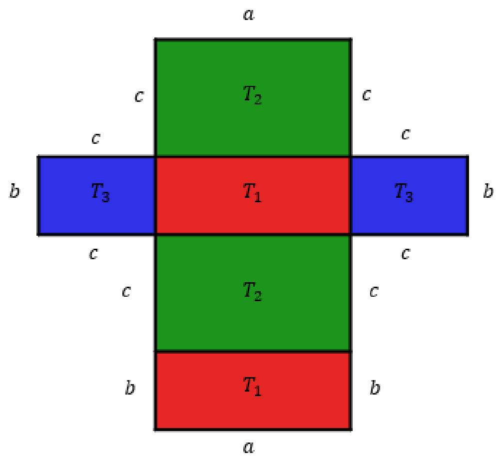
A felszín mértékegysége ugyanolyan lesz, mint a terület mértékegysége (cm^2, dm^2, m^2…)

Ha át kell váltanunk egyik mértékegységről a másikra, akkor ugyanazok a váltószámok érvényesek, mint terület esetén

Érdemesebb a feladat elején a hosszúságokat átváltani a kívánt mértékegységre, mert így nem kell a végén a nehezebb átváltást elvégezni

Felszín jele: $\boldsymbol{A}$ (Area latin (angol) szó miatt)

Téglatest felszíne



Egy téglatestnek 6 téglalap alakú lapja van, felszínét úgy kapjuk meg, hogy a 6 lap területét összeadjuk

Mivel az egymással szemben lévő lapok ugyanakkorák, ezért elegendő 3 különböző lapnak kiszámolni a területét

<u>**Téglatest felszíne**</u>: $\boldsymbol{A} = T_1 + T_1 + T_2 + T_2 + T_3 + T_3 = \boldsymbol{2 \cdot T_1 + 2 \cdot T_2 + 2 \cdot T_3}$

Más alakban: $\boldsymbol{A = 2 \cdot (T_1 + T_2 + T_3)}$

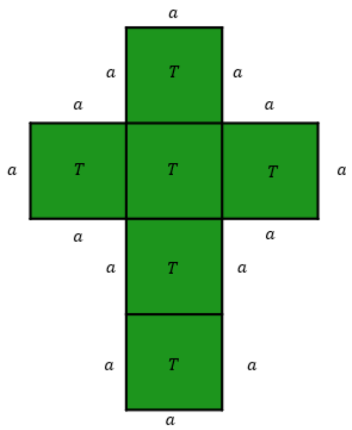
Mindegy, hogy melyik lapokat jelöljük T_1, T_2, T_3-mal

Egy téglatestnek 3 mérete van (Szélesség, mélység, magasság)

A lapok területének kiszámításakor 2-2-t szorzunk össze egymással (3 párosítás)

Ha már profibbak leszünk: $\boldsymbol{A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)}$

Kocka felszíne

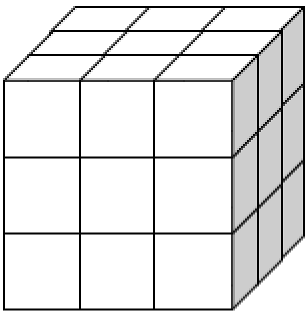


Egy kockának 6 négyzet lapja van, felszínét pedig úgy kapjuk meg, hogy a 6 lap területét összeadjuk

Mivel minden lapja ugyanakkora, ezért elegendő 1 lap területét kiszámolni

Kocka felszíne: $\boldsymbol{A} = T + T + T + T + T + T = \boldsymbol{6 \cdot T} = \boldsymbol{6 \cdot a \cdot a}$

Felszín kiskockákkal



A testeket kirakhatjuk kiskockákból vagy téglatestekből is (leggyakrabban kiskockából szoktuk kirakni)

Az ábrán látható nagy kocka $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kiskockából van kirakva

Fontos, hogy ilyenkor a felszínt nem úgy számoljuk ki, hogy kiszámoljuk 1 kiskocka felszínét, és azt szorozzuk meg a kiskockák számával

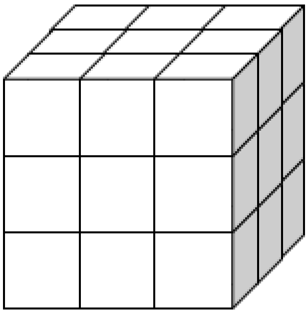
Azért nem így fogunk számolni, mert azokat a lapokat nem számolhatjuk a felszínbe, amik egy másik kiskockához csatlakoznak (amikkel össze vannak ragasztva), ez a módszer csak térfogatnál fog működni

Lépések a felszín kiszámításához:

- Meghatározzuk 1 kiskocka 1 lapjának a területét ($T_{kis} = a \cdot a$)
- Meghatározzuk, hogy a nagy kocka 1 lapja hány kiskockányi lapból áll (Ábrán: 9)
- A kiskocka 1 lapjának területét megszorozzuk a lapok számával, így megkapjuk a nagy kocka 1 lapjának területét (Ábrán: $T_{nagy} = 9 \cdot T_{kis}$)

Ezt beszorozzuk 6-tal (6 ugyanolyan lapja van a nagykockának): $A = 6 \cdot T_{nagy}$

Felszín változása kiskockák elvétele/hozzáadása esetén



Ha a nagyobb testből kiskockákat veszünk el, akkor a felszín **csökkenhet**, **nőhet**, de olyan is van, hogy **nem változik**

Ez attól fog függni, hogy honnan vesszük el a kiskockákat

3 helyről tudunk kiskockákat elvenni:

- Vehetünk el kiskockát a nagy kocka sarkáról (csúcsáról)
- Vehetünk el kiskockát a nagy kocka egy lapjának közepéről
- Vehetünk el kiskockát a nagy kocka egy élének közepéről

Felszín változása ezekben az esetekben:

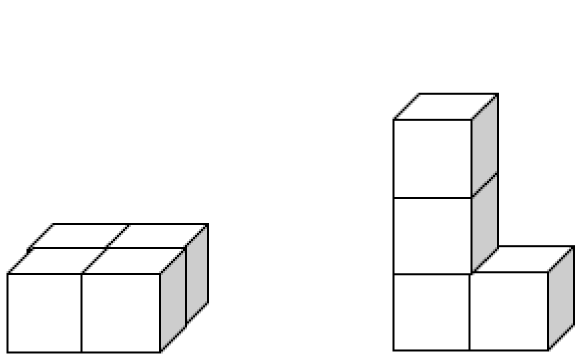
- Ha a nagy kocka sarkáról veszünk el kiskockát, akkor a felszín **nem fog megváltozni**, ugyanis 3 lap el fog tűnni, de 3 pluszba meg fog jelenni (azok a lapok, amik eddig az elvett kocka lapjaihoz csatlakoztak)
- Ha a nagy kocka lapjának közepéről veszünk el 1 kiskockát, akkor a felszín meg fog nőni, ugyanis 1 lap fog eltűnni, viszont 5 lap meg fog jelenni pluszba (azok a lapok, amik eddig az elvett kocka lapjaihoz csatlakoztak), így a test felszíne **4 kiskockányi lappal fog megnőni**
- Ha a nagy kocka élének közepéről veszünk el 1 kiskockát, akkor a felszín meg fog nőni, ugyanis 2 lap fog eltűnni, viszont 4 lap meg fog jelenni pluszba (azok a lapok,

amik eddig az elvett kocka lapjaihoz csatlakoztak), így a test felszíne **2 kiskockányi lappal fog megnőni**

Akkor csökken a felszín, ha például elveszünk több kiskockát is (pl. az első lapot teljesen)

Ha kiskockákat adunk hozzá, akkor általában növekedni fog a felszín, de van olyan eset is, hogy csökken

Felszín kiszámításának módjai



Ha kiskockából nem egy nagyobb kockát, hanem másmilyen testet csináltunk, akkor többféle módon is kiszámolhatjuk a test felszínét

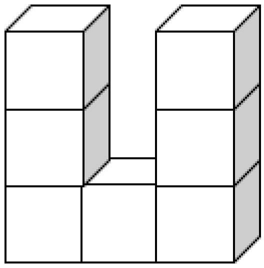
Fontos, hogy ebben az esetben nem mindegy a kockák elhelyezkedése egymáshoz képest

Bármilyen módszerrel is számoljuk ki felszínt, első lépésként meg kell határoznunk 1 kiskocka 1 lapjának a területét

Módszerek:

- Megszámoljuk kiskockánként a lapok számát, ezeket összeadjuk, és megszorozzuk 1 lap területével
- Kiszámoljuk 1 kiskocka felszínét, beszorozzuk a kiskockák számával, és ebből kivonjuk az ”összeragasztott” lapok területét (itt figyelni kell, hogy duplán számoljuk az összeragasztott lapokat)
- Ha a kiskockákból egy szabályos testet kapunk, akkor a testnek meghatározzuk az oldalait, és úgy számoljuk ki a felszínt

Felszín kiszámítása trükk



Ha nagyon bonyolult a kirakott test (6-7-8-9 kiskockából van kirakva), akkor alkalmazhatunk egy trükköt (ha kevesebb kiskockából van kirakva, akkor is alkalmazható)

A trükk: Ugyanazt látjuk elölről, mint hátulról, ugyanazt látjuk jobbról, mint balról, ugyanazt látjuk felülről, mint alulról

Vagyis, ha ránézünk elölről (↗), jobbról (←) és felülről (↓), kiszámoljuk ezekből a nézetekből a lapok területét (vagy a lapok számát), akkor ezt csak meg kell szoroznunk 2-vel

$$\boldsymbol{A = 2 \cdot \left(T_{elöl} + T_{oldal} + T_{felül}\right)}$$

Nem jelent gondot, ha a kockák el vannak csúsztatva egymáshoz képest (ami elöl bemegy, hátul kijön)

Ha ezzel a módszerrel számolunk, akkor nagyon kell figyelni, amikor U alakú alakzattal találkozunk (vagy olyannal, aminek vannak ”belső” lapjai is)

Ilyenkor az összefüggés kiegészül:

$$\boldsymbol{A = 2 \cdot \left(T_{elöl} + T_{oldal} + T_{felül}\right) + T_{rejtett}}$$

Térfogat

Testek esetén tudunk térfogatot számolni

Testek térfogatát különböző módon lehet kiszámolni a különböző testek esetén

Téglatest típusú testeknél (Téglatest, Négyzetes hasáb, Kocka) kiszámoljuk az alaplap területét, és ezt szorozzuk meg a magasággal

Az alaplap négyzet vagy téglalap szokott lenni

Téglalap területét úgy számoljuk ki, hogy a szélességét és a magasságát összeszorozzuk egymással

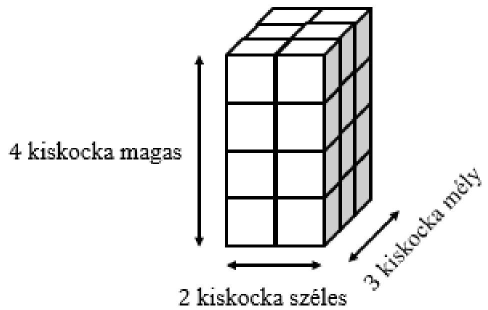
Négyzetnek is ugyanígy számoljuk ki a területét, csak négyzet esetén a szélesség és a magasság megegyezik egymással

Arra figyeljük, hogy ha nem azonos mértékegységben vannak megadva az oldalak, akkor végezzük el az átváltást

A térfogat mértékegysége az oldalak mértékegységének köbe lesz (cm^3, dm^3, m^3...)

Térfogat jele: $\boldsymbol{V}$ (Volumen latin (angol) szó miatt)

Téglatest térfogata



Kiskockákból kirakott téglatest térfogatát (hány kiskockából áll) úgy számoljuk ki, hogy megszámoljuk az egy szinten lévő kiskockák számát, és beszorozzuk a szintek számával (minden szinten ugyanannyi van)

Alsó szint: $2 \cdot 3 = 6$ kiskocka

Szintek száma: 4

Kiskockák száma (térfogat): $4 \cdot 6 = \mathbf{24}$ **kiskocka**

Ezt úgy is megkaphatjuk, ha összeszorozzuk a szélességet, a mélységet és a magasságot:

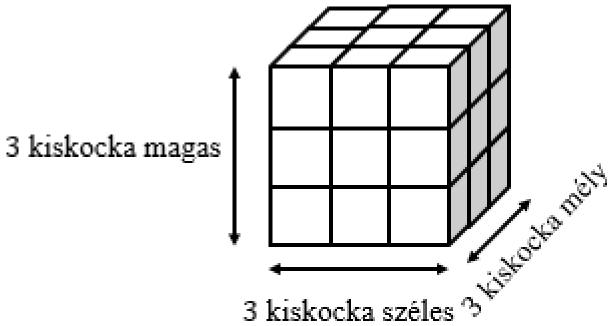
$2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = \mathbf{24}$

Ezzel a módszerrel fogjuk kiszámolni a téglatest térfogatát is

Téglatest térfogatának képlete szövegesen: $\boldsymbol{V}$ =**Szélesség · Mélység · Magasság**

Téglatest térfogata: $\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$

Kocka térfogata



Kiskockákból kirakott kocka térfogatát (hány kiskockából áll) ugyanúgy számoljuk ki, mint a téglatest esetében, vagyis megszámoljuk az egy szinten lévő kiskockák számát, és beszorozzuk a szintek számával (minden szinten ugyanannyi van)

Alsó szint: $3 \cdot 3 = 9$ kiskocka

Szintek száma: 3

Kiskockák száma (térfogat): $3 \cdot 9 = \mathbf{27}$ **kiskocka**

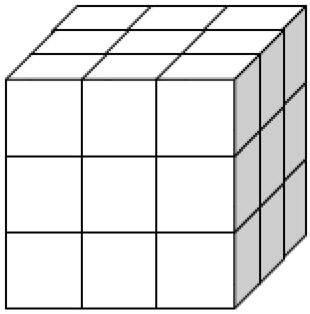
Ezt úgy is megkaphatjuk, ha összeszorozzuk a szélességet, a mélységet és a magasságot:

$3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = \mathbf{27}$

Ezzel a módszerrel fogjuk kiszámolni a kocka térfogatát is, kocka esetén a szélesség, a mélység és a magasság megegyeznek egymással, tehát a kocka élhosszát fogjuk összeszorozni önmagával 3-szor

Kocka térfogata: $\boldsymbol{V = a \cdot a \cdot a}$

Térfogat kiskockákkal



A testeket kirakhatjuk kiskockákból, vagy téglatestekből is (leggyakrabban kiskockából szoktuk kirakni)

Az ábrán látható nagy kocka $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kiskockából van kirakva

Térfogat esetén sokkal könnyebb dolgunk lesz, mint felszín esetén

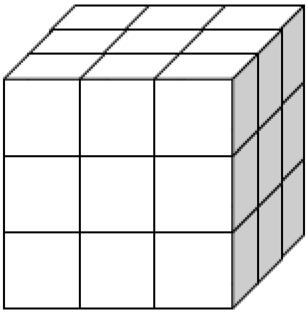
Térfogat esetén kiszámoljuk egy kiskocka térfogatát, és szorozzuk a kiskockák számával

A nagy kocka (vagy test) térfogata nem függ a kiskockák elrendezésétől

Térfogat meghatározásának lépései:

- Meghatározzuk 1 kiskocka térfogatát ($V_{kis} = a \cdot a \cdot a$)
- Megszámoljuk a kiskockák számát (n)
- Egy kiskocka térfogatát beszorozzuk a kiskockák számával: $\boldsymbol{V_{nagy} = n \cdot V_{kis}}$

Térfogat változása kiskockák elvétele/hozzáadása esetén



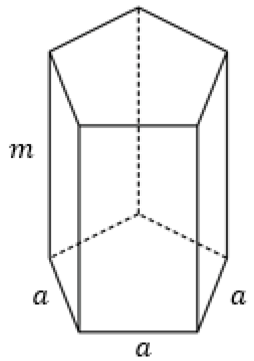
Térfogat esetén egyszerű lesz a helyzet, amikor a nagy testből kiskockákat veszünk el, vagy adunk hozzá:

- Amennyi kiskockát elvettünk, annyi kiskockányi térfogattal **csökken** a test térfogata
- Amennyi kiskockákat hozzáadtunk, annyi kiskockányi térfogattal **növekszik** a test térfogata

Mindegy, hogy melyik helyről vesszük el a kiskockákat

Ha a sarkáról vesszük el, vagy a lap közepéről, vagy az él közepéről, akkor is 1 kiskockányi térfogattal csökken a test térfogata

Hasábok



Hasábok olyan testek, amiknek van két egybevágó alaplapja, ami egy sokszög (általában szabályos, de nem muszáj, hogy az legyen), oldallapjai pedig téglalapok

Hasábok elnevezése: Alaplap után (Háromszög alapú, Négyzet alapú hasáb (Négyzetes oszlop), Ötszög alapú hasáb, Hatszög alapú hasáb…)

A téglatest és a kocka is hasábnak számít, csak külön elnevezésük van

Hasábokat kétféle módon lehet elképzelni:

- Van a két alaplap, amik ugyanakkora sokszögek, az egyik alaplap a földön van, a másik pedig fölötte a levegőben, és téglalappokkal rakjuk körbe a két sokszöget, a téglalapok szélessége a sokszög egy-egy oldalhosszával, magassága pedig a test magasságával egyezik meg
- Van egy sokszög a földön (képzeljük el papírvastagságúként), és nagyon sok ugyanilyen papírt teszünk egymásra, így kapunk egy testet

<u>Hasáb részei</u>:

- Alaplapok: Általában szabályos sokszögek
- Alapélek (a): Az alaplap oldalai
- Oldallapok: Téglalapok
- Oldalél: A téglalapok oldalai (a magasság)
- Palást: Oldallapok összege
- Magasság ($m,\ M,\ h,\ H$): A két alaplap közötti távolság

Hasábok felszíne

Hasábok felszínét úgy kapjuk meg, hogy a lapok területét össze fogjuk adni

Az alaplapok területe: T_{alap}

Az oldallapok területe: T_{oldal}

A palást területe: $T_{palást}$

Hasábok felszíne: $\boldsymbol{A = 2 \cdot T_{alap} + T_{palást}}$

Ha szabályos sokszög a hasáb alapja (legtöbbször az), akkor:

Palást területe: $\boldsymbol{T_{palást} = n \cdot T_{oldal}}$

Ahol:

n – A szabályos sokszög csúcsainak, oldalainak száma (ennyi lesz az oldallapok száma is)

T_{oldal} – Az oldallap területe (alapél szélességű, test magasságú téglalap területe)

Oldallap területe: $\boldsymbol{T_{oldal} = a \cdot m}$

Hasábok térfogata

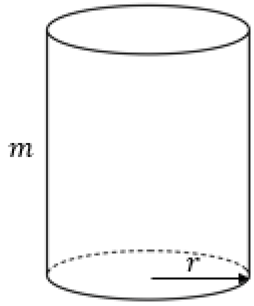
Hasábok térfogatát úgy kapjuk meg, hogy az alaplap területét megszorozzuk a hasáb magasságával

Hasábok térfogata: $\boldsymbol{V = T_{alap} \cdot m}$

Téglatestnek vagy kockának is ki lehet számolni ilyen módszerrel a térfogatát:

- Téglatest: $\boldsymbol{V} = a \cdot b \cdot c = \boldsymbol{T_{alap} \cdot m}$
- Kocka: $\boldsymbol{V} = a \cdot a \cdot a = \boldsymbol{T_{alap} \cdot m}$

Hengerek



Henger: ”Kör alapú hasáb”

Olyan alakzat, melynek két alaplapja két ugyanakkora kör, palástja pedig egy téglalap, ami rá van csavarva a körökre

Hengereket négyféle módon lehet elképzelni:

- Van a két kör alaplap, amik ugyanakkorák, az egyik alaplap a földön lesz, a másik pedig fölötte lesz a levegőben, és egy téglalappal körbe csavarjuk a két kört, ez lesz a palást, a téglalap szélessége a körök kerületével egyezik meg (arra csavarodik rá teljesen), magassága pedig a test magasságával egyezik meg
- Van egy kör a földön (képzeljük el papírvastagságúként), és nagyon sok ugyanilyen papír kört teszünk egymásra így kapunk egy testet
- Egy téglalapot forgatunk meg a függőleges szimmetria tengelye mentén (ekkor a téglalap szélessége lesz a henger körének **átmérője**)
- Egy téglalapot forgatunk meg az egyik oldala mentén (ekkor a téglalap szélessége lesz a henger körének **sugara**)

Henger részei:

- Alaplapok: Körök
- Alaplap sugara (r, R), alaplap átmérője ($d,\ D$)
- Palást: Téglalap
- Magasság ($m,\ M,\ h,\ H$): A két alaplap közötti távolság (a téglalap palást magassága)

Hengerek felszíne

Hengerek felszínét úgy kapjuk meg, hogy a lapok területét össze fogjuk adni (ugyanúgy, mint hasáb esetén, csak itt az alaplap mindig kör lesz)

Az alaplapok területe: T_{alap}

A palást területe: $T_{palást}$

Hengerek felszíne: $\boldsymbol{A = 2 \cdot T_{alap} + T_{palást}}$

Az alaplapok területe: $\boldsymbol{T_{alap} = r^2 \cdot \pi}$

Palást területe: $\boldsymbol{T_{palást}} = K \cdot m = \boldsymbol{2 \cdot r \cdot \pi \cdot m}$

Hengerek felszíne: $\boldsymbol{A} = 2 \cdot T_{alap} + T_{palást} = \boldsymbol{2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot m}$

Hengerek térfogata

Hengerek térfogatát úgy kapjuk meg, hogy az alaplap területét megszorozzuk a henger magasságával

Hengerek térfogata: $\boldsymbol{V = T_{alap} \cdot m = r^2 \cdot \pi \cdot m}$

Hengerek térfogatának képlete megegyezik a hasáb térfogatának képletével, itt az alaplap mindig kör lesz, hasáb esetén pedig több alakzat is lehet az alaplap