Függvények

A függvényeket koordináta-rendszerben ábrázoljuk

A vízszintes tengely az x tengely

A függőleges tengely az y tengely

A két tengely metszéspontjában van az origó ($(0; 0)$ pont)

A függvények elképzelhetőek halmazok hozzárendelésével

Az alaphalmazhoz rendeljük hozzá a képhalmaz elemeit

Az alaphalmazba az x koordináták kerülnek

Az alaphalmaz elemeit hívjuk **értelmezési tartománynak**

A képhalmazban az y koordináták vannak

A képhalmaz elemeit hívjuk **értékkészletnek**

Az összetartozó párok a pontok koordinátái

A pontok berajzolása után azokat össze tudjuk kötni

Egyenes megrajzolásához elegendő 5 pontot bejelölni (minimum 3 azért legyen bejelölve)

Egy y értékhez tartozhat több x érték is, viszont egy x értékhez csak egy y érték tartozhat

Ez a függvény egyik legfontosabb tulajdonsága

A függvények állhatnak egyenesekből és görbe vonalakból is

Lineáris függvények ábrázolása

Lineáris függvény: Egyenes

A lineáris függvények két részből fognak állni:

- x-es rész: Ez fogja megadni a függvény meredekségét
- Szám: Ez fogja megadni az indulás helyét (ahol az y tengelyt metszi a függvény)

Meredekség: Azt mutatja meg, hogy 1 **jobbra** ($\rightarrow$) lépés esetén mennyit fogunk lépni **felfelé** ($\uparrow$)

Az x előtti szorzótényező lesz a meredekség (Pl.: $\mathbf{3}x$ függvény **meredeksége 3**, vagyis 1

jobbra ($\rightarrow$) lépés esetén **3-at** lépünk **felfelé** ($\uparrow$))

Ha **balra** ($\leftarrow$) lépünk, akkor annyit fogunk lépni **lefelé** ($\downarrow$), amennyi a meredekség

Ha az x előtt negatív szorzótényező szerepel, az azt fogja jelenteni, hogy 1 **jobbra** ($\rightarrow$) lépés esetén annyit fogunk lépni **lefelé** ($\downarrow$) (Pl.: $-\mathbf{4}x$ függvény **meredeksége** $-\mathbf{4}$, vagyis 1 **jobbra** ($\rightarrow$) lépés esetén **4-et** lépünk **lefelé** ($\downarrow$))

Ha **balra** ($\leftarrow$) lépünk, akkor annyit fogunk lépni **felfelé** ($\uparrow$) amennyi a meredekség

Ha x előtt nincs semmi az 1-es meredekséget fog jelenteni, ha – jel (mínusz jel) van, az -1-es meredekséget jelent

Függvények típusai meredekség alapján:

- **Növekvő** ($\nearrow$), ha a meredekség **pozitív**
- **Csökkenő** ($\searrow$), ha a meredekség **negatív**
- **Konstans** ($\rightarrow$), ha a meredekség **0**

Lineáris (Elsőfokú) függvények ábrázolása tört meredekség esetén

Példa: $f(x)=\frac{1}{2}x$

Meredekség: $\frac{1}{2} \to 1$ **jobbra** $(\to)$ lépésnél $\frac{1}{2}$-et (vagyis felet) lépünk **felfelé** $(\uparrow)$

Példa: $f(x)=\frac{2}{3}x$

Meredekség: $\frac{2}{3} \to 1$ **jobbra** $(\to)$ lépésnél $\frac{2}{3}$-ot lépünk **felfelé** $(\uparrow)$ (ez már nem annyira kellemes)

Ha 3-at lépünk **jobbra** $(\to)$, akkor 3-szor lépünk $\frac{2}{3}$-ot **felfelé** $(\uparrow)$ $(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2)$, vagyis 3 **jobbra** $(\to)$ lépés esetén 2-t kell lépni **felfelé** $(\uparrow)$

Tört meredekség esetén az lesz a szabály, hogy a tört **nevezőjével** fogunk **jobbra** $(\to)$ lépni, a tört **számlálójával** pedig **felfelé** $(\uparrow)$, így egész négyzetrácsokon leszünk végig

Ez működik egész számok esetén is ($2x=\frac{2}{1}x \to$ **1-et jobbra** $(\to)$, **2-t fel** $(\uparrow)$)

$f(x)=\frac{3}{4}x \to$ **4-et jobbra** $(\to)$ **3-at fel** $(\uparrow)$

Tört lehet 1-nél nagyobb értékű is

$f(x)=\frac{5}{2}x \to$ **2-et jobbra** $(\to)$ **5-öt fel** $(\uparrow)$

Negatív tört meredekség esetén a **nevezővel** ugyanúgy **jobbra** $(\to)$ lépünk, a **számlálóval** pedig **lefelé** $(\downarrow)$

$f(x)=-\frac{3}{2}x=\frac{-3}{2}x \to$ **2-et jobbra** $(\to)$ **3-at le** $(\downarrow)$

Hozzárendelési szabály leolvasása függvény grafikonjáról

Ha a függvény grafikonja van megadva, és a hozzárendelési szabályra vagyunk kíváncsiak, akkor le kell olvasnunk, hogy hol metszi az y tengelyt, és mennyi a meredeksége:

- Először mindig az y tengely metszetet olvassuk le (ez a könnyebb)
- Utána olvassuk le a függvény meredekségét

De lehet fordítva is

Egész meredekség esetén nincs nehéz dolgunk, mert a pontok egész rácsvonalakon vannak

Tört meredekség esetén meg kell keresnünk azokat a pontokat, amik egész négyzetrácsra esnek, és abból tudjuk meghatározni a meredekséget

Egyenletek grafikus megoldása

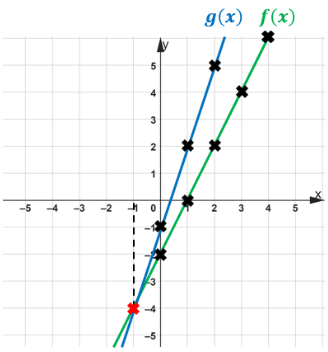
Egyenleteket nem csak mérlegelv segítségével lehet megoldani, hanem grafikusan is

Grafikus megoldás során az egyenlet jobb és bal oldalára is úgy tekintünk, mint 1-1 függvényre, ezeket fogjuk ábrázolni koordináta-rendszerben

Ha nem ábrázolható formában van, akkor először elvégezzük a zárójel felbontásokat, összevonásokat, egyszerűsítéseket, hogy ábrázolható formára hozzuk

$$2(x-1) = 4x - 1 - x \quad /(\square), Ö.V.$$

$$\underbrace{\mathbf{2x-2}}_{f(x)} = \underbrace{\mathbf{3x-1}}_{g(x)} \qquad \mathbf{x = -1}$$



A kapott metszéspont x koordinátája lesz a megoldásunk, az y koordináta megadja azokat az értékeket, amiket ellenőrzés során kapunk, ha behelyettesítünk

Ha ábrázoltuk a két függvényt, akkor:

- Kaphatunk 1 metszéspontot (esetek 99%-a): Ilyenkor az egyenlet megoldása a metszéspont x koordinátája lesz
- Kaphatunk 0 metszéspontot: Ez akkor van, ha a két ábrázolt egyenes egymással párhuzamos (ugyanannyi a meredekségük, de máshol metszik az y tengelyt, pl.: $2x + 1$ és $2x - 2$)

- Kaphatunk végtelen sok metszéspontot: Ez akkor van, ha a két egyenes megegyezik egymással (ugyanannyi a meredekségük, és ugyanott is metszik az y tengelyt, pl.: $2x + 3$ és $2x + 3$)

Átlag

Mire jó?

- Tudni fogjuk segítségével az év végi jegyünket, vagy ki tudjuk számolni, hogy hány 5-öst kell még kapni az év végi jobb jegy eléréséhez
- Sporteseményeknél tudni fogjuk hány gólra/pontra számíthatunk

Példák átlagra:

- Jegyek
- Hőmérséklet
- Magasság, kor
- Pénz
- Sportesemények (Gólok száma, gólpasszok száma, pontok száma (kosárlabda), lepattanók száma)
- Sport (szeretnénk lefutni/leúszni/letekerni valamennyi távolságot, ki tudjuk számolni, hogy naponta/hetente mennyit kell megtennünk)
- Könyvolvasás
- Sorozatnézés

Hogy fogunk átlagot számolni?

- Az adatok összegét elosztjuk az adatok számával
- **Átlag=Adatok összege**:**Adatok száma**
- Először összeadjuk az adatokat, utána megszámoljuk, hogy hány adat volt, és a kettőt elosztjuk egymással

Átlag trükk

Milyen számok közé esik az átlag? Hogy tudjuk magunkat ellenőrizni?

- Az átlag mindig a legkisebb és a legnagyobb adat közé fog esni, sosem lehet kisebb a legkisebb adattól és sosem lehet nagyobb a legnagyobb adattól
- Ha csak 2-es, 3-as, 4-es jegyeket kaptunk, akkor az átlagunk nem lehet sem 2-esnél kisebb, sem 4-esnél nagyobb
- Ezt az ellenőrzést minden átlagszámítás után el kell végezni (ránézésre)

Hogy tudjuk még magunkat ellenőrizni?

- Az átlag általában a legkisebb és a legnagyobb szám között nagyjából félúton lesz, de ez nem mindig van így
- Akkor lesz a legkisebb és a legnagyobb adat között nagyjából félúton, ha az adatok egyenletesek (nagyjából ugyanolyan távolságra vannak egymástól) és nincsenek nagyon kiugró értékek

Átlag típusai

Kétféle átlag típust különböztetünk meg:

- **Hagyományos átlag**: Az adatok fel vannak sorolva, azokat kell összeadni és elosztani az adatok számával
- **"Osztályzat típusú" átlag**: Amikor meg van adva, hogy melyik osztályzatból mennyi született, és az átlagot kell kiszámolnunk (osztályzat helyett lehet magasság vagy testsúly is, amik darabszámokkal vannak megadva)

"Osztályzat típusú" átlag esetén az adatok típusai is számok lesznek (Hagyományos átlag esetén nevek szoktak lenni, vagy napok, vagy más időszakok)

"Osztályzat típusú" átlag **adatainak összege**: Úgy számoljuk ki, hogy az adatokat (osztályzatok) összeszorozzuk az adatok számával (osztályzatok számával), és ezeket összeadjuk

"Osztályzat típusú" átlag **adatainak száma**: A darabszámok összege

Ha ezek megvannak, akkor ugyanúgy elosztjuk egymással a 2-t

Módusz

A leggyakrabban előforduló elem

Módusz jele: Mo

Nem lesz túl nehéz dolgunk a módusz meghatározása során, meg kell keresnünk azt az elemet, ami a leggyakrabban (legtöbbször) fordul elő az adatok között

Legtöbb esetben 1 módusz lesz, de elképzelhető, hogy több szám is az adatok módusza lesz (Ha több számból is ugyanannyi van a leggyakoribbak között)

Fontos, hogy módusz esetén az adat lesz a végeredmény, nem az, hogy hányszor fordult elő (Ha legtöbbször a **9-es szám** fordult elő az adatok között, és 6 db 9-es volt, akkor a **módusz 9 lesz**, nem pedig 6)

Medián

A sorba rendezett (növekvő sorrendbe) adatok közül a középső elem

Medián jele: Me

Módusz és medián megkülönböztetése: Medián → Medium (angol) → Közép

A mediántól ugyanannyi elem van jobbra, mint balra (ugyanannyi lesz kisebb tőle, mint amennyi nagyobb)

A feladatokban a legtöbbször növekvő sorrendbe vannak rendezve az adatok, de ha nincsenek, akkor az első lépés az lesz, hogy növekvő sorrendbe rendezzük őket

Az adatok száma lehet páros vagy páratlan:

- ➢ Ha az adatok száma **páratlan** (Pl.: 7 adat van), akkor a medián a középső szám lesz (4. szám, tőle 3 szám lesz balra, és 3 lesz jobbra)
- ➢ Ha az adatok száma **páros** (Pl.: 6 adat van), akkor a medián két szám közé fog esni, (a 3. és 4. számok közé) ilyenkor úgy kapjuk meg a mediánt, hogy kiszámoljuk a két szám átlagát:
- ❖ Ha a két szám, amik közé esik a medián ugyanazok (Pl.: 2 db 4-es közé esik), akkor a medián megegyezik a számokkal (a **medián 4** lesz)
- ❖ Ha a két szám, amik közé esik a medián nem ugyanazok (Pl.: 5-ös és 7-es közé esik), akkor kiszámoljuk az átlagot, vagyis összeadjuk a két számot, és elosztjuk 2-

vel ($\frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$, a **medián 6** lesz) (ebben az esetben a medián nem szerepel az adatok között)

Ha sok adatunk van, akkor kapcsos zárójelekkel és …-okkal tudjuk felsorolni az adatokat

Medián sorszámát egy 2-vel való osztással tudjuk kiszámolni:

- **Páratlan** adat szám esetén a kapott nem egész számot **felfelé** (↑) fogjuk kerekíteni (Pl.: 21 adat esetén: $\frac{21}{2} = 10{,}5 \rightarrow$ a **medián a 11. elem lesz**)
- **Páros** adat szám esetén a kapott egész szám lesz a kisebb sorszám, a tőle nagyobb szám lesz a nagyobb sorszám (Pl.: 16 adat esetén: $\frac{16}{2} = 8 \rightarrow$ a medián a **8. és 9. elemek közé esik**)

Terjedelem

A legnagyobb és legkisebb adat különbsége

Terjedelemnek nincs külön jele

Nem lesz túl nehéz dolgunk a terjedelem meghatározása során, meg kell keresnünk a legnagyobb és legkisebb elemeket, és a legnagyobból kivonni a legkisebbet

Ha az adatok növekvő sorrendbe vannak, akkor a legkisebb adat lesz a bal oldali adat, a legnagyobb adat lesz a jobb oldali adat

Gyakoriság, relatív gyakoriság

A gyakoriság lényegében a darabszámnak felel meg, ez vagy meg van adva a feladat szövegében, vagy táblázatos formában van megadva, vagy ki kell számolnunk (pl. %-okból)

A gyakoriságok összege kiadja az összes adat számát

Relatív gyakoriság esetén a gyakoriságokat osztjuk el az összes adat számával

Relatív gyakoriságokat megadhatjuk tört alakban vagy tizedes tört alakban is

Tört alak esetén, ha tudunk, egyszerűsíthetünk is

A relatív gyakoriságok összege mindig 1 kell, hogy legyen, így akár a végén ellenőrizni is tudunk

Valószínűség

Hol használunk valószínűséget?

- Kaszinóban
- Fogadásnál
- Befektetéseknél

A valószínűség mindig egy 0 és 1 közötti szám:

- Ha a valószínűség 0 (**Lehetetlen esemény**): Lehetetlen, hogy az adott dolog teljesüljön (Pl.: Dobókockával 7-nél nagyobb számot dobunk)
- Ha a valószínűség 0,5: Ugyanannyi az esélye annak, hogy teljesül, mint annak, hogy nem (Pl.: Dobókockával páros számot dobunk (vagy páratlant), vagy fej vagy írásnál fejet dobunk (vagy írást))
- Ha a valószínűség 1 (**Biztos esemény**): Biztosan teljesül az adott dolog (Pl.: Dobókockával egyjegyű számot dobunk)

Minél közelebb van a valószínűség 0-hoz, annál valószínűtlenebb az esemény (Pl.: 0,2)

Minél közelebb van a valószínűség 1-hez, annál valószínűbb az esemény (Pl.: 0,85)

Ha a valószínűséget %-ban szeretnénk megkapni, akkor be kell szorozni 100-zal, ebben az esetben 0% és 100% közötti értékeket kaphatunk

A valószínűség és a relatív gyakoriság egyes esetekben megegyezik egymással

A valószínűséget úgy tudjuk kiszámolni, hogy a kedvező esetek számát elosztjuk az összes eset számával

P-vel jelöljük a valószínűséget (Probability)

Valószínűség: $\boldsymbol{P = \frac{Kedvező\ esetek}{Összes\ eset}}$

Diagramok

Az adatokat meg lehet adni táblázatos formában, valamint diagram segítségével is

Miért alkalmazunk diagramokat?

- Azért, hogy átláthatóbb legyen, ne a táblázatban kelljen keresgélni a legkisebb/legnagyobb értéket, hanem ránézésre meg tudjuk mondani
- Nyomon tudjuk követni a változásokat (hőmérséklet esetén látjuk, hogy melyik nap nőtt, illetve melyik nap csökkent a hőmérséklet)

Milyen diagramokkal találkozhatunk?

- Oszlopdiagram (leggyakoribb)
- Vonaldiagram
- Pontdiagram
- Kördiagram
- Egyéb diagramok, kombinált diagramok

Diagramok esetén nagyon fontos a feliratozás, ha csinálunk egy diagramot mindig figyeljünk rá, hogy ezek meglegyenek:

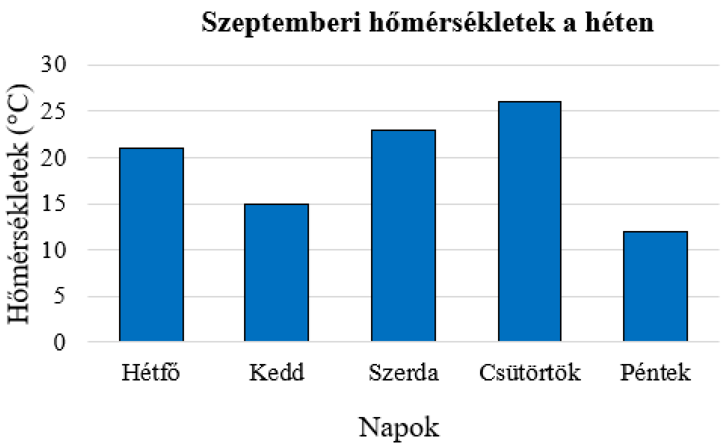
- Diagram cím (opcionális)
- Tengely feliratok (ha van értelme)
- Tengely feliratok mértékegysége (ha van)
- Jelmagyarázat (ha szükséges)

Az osztást mindig megfelelően válasszuk meg, nézzük meg a legnagyobb és legkisebb adatot, amit ábrázolnunk kell

Az osztások lehetnek 1-esével, 2-esével, 5-ösével, 10-esével, 20-asával, 50-esével, 100-asával …

Az osztásoknak nem muszáj mindig 0-ról indulnia, indulhat egy bizonyos értéktől is (pl.: Magasság)

Oszlopdiagram



Oszlopdiagram esetén van egy vízszintes és egy függőleges tengely

A vízszintes tengelyen lehetnek: Számok (Jegyek), Idő (Napok, hónapok, évek, dátumok), Nevek (5 barát neve)

A tengelyekhez mindig írunk megnevezést és mértékegységet (vagy csak mértékegységet)

A függőleges tengelyen számok szoktak lenni, legtöbbször darabszám, de lehet más is (Magasság, testsúly, pénz, hőmérséklet…)

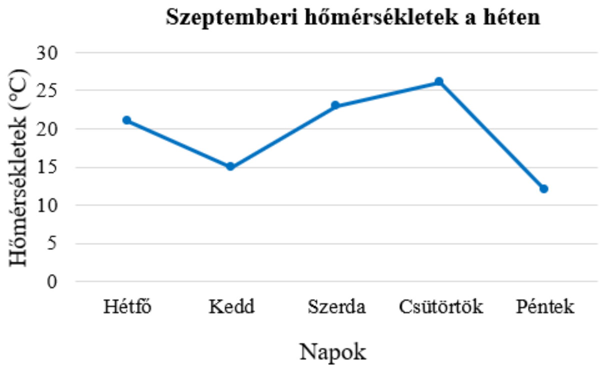
A tengelyeket fel lehet cserélni egymással, ezt akkor szoktuk megtenni, ha nagyobb és kisebb adatok is vannak, és a sima oszlopdiagramon nem férne ki rendesen (Fektetett oszlopdiagram)

Az oszlopok között ki szoktunk hagyni egy kis helyet (Ha nem hagyjuk ki, akkor hisztogramnak nevezzük, ami ugyanolyan, mint az oszlopdiagram, csak más a neve)

Oszlopdiagramon ábrázolhatunk több dolgot is egyszerre (pl.: több osztály, fiúk és lányok), ilyenkor fontos, hogy legyen jelmagyarázat is a diagram mellett, valamint egyértelmű legyen az oszlopok színezése/mintázata

Az oszlop színezése ilyenkor lehet: fehér, szürke, fekete, színes, pöttyös, sraffozott (csíkos)

Vonaldiagram



Az oszlopdiagramhoz hasonló a felépítése (Tengelyek, adatok elrendezése)

Vonaldiagram esetén is van egy vízszintes és egy függőleges tengely

A vízszintes tengelyen általában idő (Napok, hónapok, évek, dátumok) szerepel

A tengelyekhez mindig írunk megnevezést és mértékegységet (vagy csak mértékegységet)

A függőleges tengelyen olyan mennyiségek szerepelnek, amik nem csak egész számok lehetnek (Hőmérséklet, sebesség, megtett út)

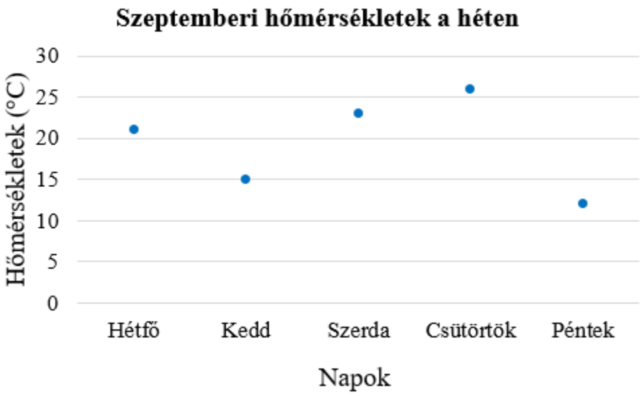
A tengelyeket **nem** lehet felcserélni egymással

Vonaldiagramon ábrázolhatunk több dolgot is egyszerre, ilyenkor fontos, hogy legyen jelmagyarázat is a diagram mellett, valamint egyértelmű legyen a vonalak színezése

A vonalakat ilyenkor különböző színekkel szoktuk jelölni: Piros, kék, zöld, sárga …

Jelölhetjük őket folytonos, szaggatott, pontozott vonalakkal is

Pontdiagram



A vonaldiagram megadható pontdiagramként, de az nem lesz annyira látványos

Pontdiagram esetén a pontok (pl.: Hőmérsékletnél a mérési pontok) nincsenek összekötve úgy, mint vonaldiagram esetén

Az oszlopdiagramhoz és vonaldiagramhoz hasonló a felépítése (Tengelyek, adatok elrendezése)

Pontdiagram esetén is van egy vízszintes és egy függőleges tengely

A vízszintes tengelyen általában idő (Napok, hónapok, évek, dátumok) szerepel

Tengelyekhez mindig írunk megnevezést és mértékegységet (vagy csak mértékegységet)

A függőleges tengelyen olyan mennyiségek szerepelnek, amik nem csak egész számok lehetnek (Hőmérséklet, sebesség, megtett út)

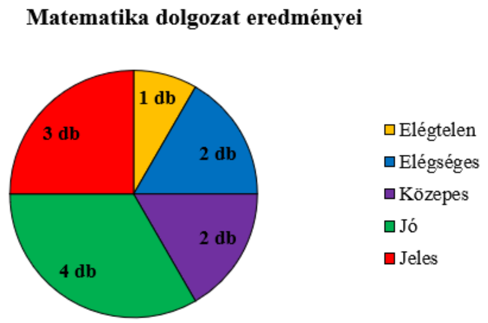
A tengelyeket **nem** lehet cserélni egymással

Pontdiagramon ábrázolhatunk több dolgot is egyszerre, ilyenkor fontos, hogy legyen jelmagyarázat is a diagram mellett, valamint egyértelmű legyen a magyarázat

A pontokat ilyenkor különböző színekkel szoktuk jelölni: Piros, kék, zöld…

Jelölhetjük őket különböző formával is: Teli pont, belül üres pont, x, négyzet

Kördiagram (tortadiagram)



A kördiagram teljesen más, mint a korábbi diagramok (nincsnek tengelyek)

Ugyanolyan típusú adatokat ábrázolhatunk kördiagramon, mint oszlopdiagramon (pl.: Jegyek)

Kördiagramon nem az adatok nagyságát, hanem az adatok egymáshoz képesti arányát szemléltethetjük

A kördiagramon ábrázolt adatokat megadhatjuk % segítségével, vagy a szeletek középponti szögével, vagy osztások segítségével is:

- A teljes kör 100%-nak felel meg
- A teljes kör 360°-nak felel meg
- A teljes kört feloszthatjuk 4, 5, 6, 7, 8… részre, ez mindig az adatok nagyságától fog függni

Ha két adat azonos értékű, akkor ugyanakkorák lesznek a tortaszeleteik is

Kördiagramon egyszerre csak egy dolgot ábrázolhatunk (Ha osztályokról van szó, akkor egyszerre vagy csak az egyik osztályt ábrázolhatjuk, vagy a teljes évfolyamot)

A körszeleteket különböző színekkel szoktuk jelölni: Piros, kék, zöld, sárga …