

Műveletek

Számok szomszédai

Egyes szomszédok

- Számok kisebb szomszédja a szám előtti szám, nagyobb szomszédja pedig a szám utáni szám lesz
- Szomszéd helyett használhatjuk az egyes szomszéd szót is

Páros szomszédok

- Számok kisebb páros szomszédja a szám előtti páros szám, nagyobb páros szomszédja pedig a szám utáni páros szám lesz
- Ha páratlan szám páros szomszédjaira vagyunk kíváncsiak, akkor nincs semmi különbség a szomszédjaihoz képest
- Ha páros szám páros szomszédjaira vagyunk kíváncsiak, akkor a páros szám előtti, illetve utáni páros számok lesznek azok

Páratlan szomszédok

- Számok kisebb páratlan szomszédja a szám előtti páratlan szám, nagyobb páratlan szomszédja pedig a szám utáni páratlan szám lesz
- Ha páros szám páratlan szomszédjaira vagyunk kíváncsiak, akkor nincs semmi különbség a szomszédjaihoz képest
- Ha páratlan szám páratlan szomszédjaira vagyunk kíváncsiak, akkor a páratlan szám előtti, illetve utáni páratlan számok lesznek azok

Tízes szomszédok

- Számok Kisebb ezres szomszédja az a szám, ami számtól kisebb, 0-ra végződik és a számhoz legközelebb van
- Számok Nagyobb ezres szomszédja az a szám, ami számtól nagyobb, 0-ra végződik és a számhoz legközelebb van
- Kisebb ezres szomszédnál (ha a szám nem 0-ra végződik) csak az egyes helyén álló számot ki kell cserélni 0-ra

- Nagyobb ezres szomszédnál pedig a Kisebb ezres szomszéd tízes helyi értékén álló számjegyet kell 1-gyel megnövelni
- Ha a szám 0-ra végződik, akkor a Kisebb ezres szomszédnál a tízes helyi értékén álló számjegyet 1-gyel csökkentjük, Nagyobb ezres szomszédnál, pedig 1-gyel növeljük

Százas szomszédok

- Számok kisebb százas szomszédja az a szám, ami számtól kisebb, 00-ra végződik és a számhoz legközelebb van
- Számok nagyobb százas szomszédja az a szám, ami számtól nagyobb, 00-ra végződik és a számhoz legközelebb van
- Kisebb százas szomszédnál (ha a szám nem 00-ra végződik) csak az egyes és tízes helyén álló számokat ki kell cserélni 00-ra
- Nagyobb százas szomszédnál pedig a kisebb százas szomszéd százas helyi értékén álló számjegyet kell 1-gyel megnövelni
- Ha a szám 00-ra végződik, akkor a kisebb százas szomszédnál a százas helyi értékén álló számjegyet 1-gyel csökkentjük, nagyobb százas szomszédnál, pedig 1-gyel növeljük

Ezres szomszédok

- Számok kisebb ezres szomszédja az a szám, ami számtól kisebb, 000-ra végződik és a számhoz legközelebb van
- Számok nagyobb ezres szomszédja az a szám, ami számtól nagyobb, 000-ra végződik és a számhoz legközelebb van
- Kisebb ezres szomszédnál (ha a szám nem 000-ra végződik) csak a százas, tízes és egyes helyén álló számokat ki kell cserélni 000-ra
- Nagyobb ezres szomszédnál pedig a kisebb ezres szomszéd ezres helyi értékén álló számjegyet kell 1-gyel megnövelni
- Ha a szám 000-ra végződik, akkor a kisebb ezres szomszédnál az ezres helyi értékén álló számjegyet 1-gyel csökkentjük, nagyobb ezres szomszédnál, pedig 1-gyel növeljük

Kerekítés

Tízesre kerekítés

- Tízesre kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb tízes szomszédjait, és eldöntjük a kettő közül melyikhez van közelebb
- Két tízes szomszéd között fél úton lévő szám mindig az 5 lesz (Fél út: Ami ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)
- Ha az egyes helyén 1, 2, 3, 4 számok szerepelnek akkor **lefelé** (↓) kerekítünk
- Ha az egyes helyén 5, 6, 7, 8, 9 számok szerepelnek akkor **felfelé** (↑) kerekítünk
- Ha az egyes helyén 0 szerepel akkor a szám és a tízesre kerekített értéke megegyezik

Százásra kerekítés

- Százásra kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb százás szomszédjait, és eldöntjük a kettő közül melyikhez van közelebb
- Két százás szomszéd között fél úton lévő szám mindig az 50 lesz (Fél út: Ami ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)
- Ha a tízes helyén 0, 1, 2, 3, 4 számok szerepelnek akkor **lefelé** (↓) kerekítünk (Ha az utolsó két szám 01 – 49)
- Ha a tízes helyén 5, 6, 7, 8, 9 számok szerepelnek akkor **felfelé** (↑) kerekítünk (Ha az utolsó két szám 50 – 99)
- Ha az utolsó két helyen 00 szerepel akkor a szám és a százásra kerekített értéke megegyezik

Ezresre kerekítés

- Ezresre kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb ezres szomszédjait, és eldöntjük a kettő közül melyikhez van közelebb
- Két ezres szomszéd között fél úton lévő szám mindig az 500 lesz (Fél út: Ami ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)
- Ha a százás helyén 0, 1, 2, 3, 4 számok szerepelnek akkor **lefelé** (↓) kerekítünk (Ha az utolsó három szám 001 – 499)

- Ha a százasként 5, 6, 7, 8, 9 számok szerepelnek akkor **felfelé** (↑) kerekítünk (Ha az utolsó három szám 500 – 999)
- Ha az utolsó három helyen 000 szerepel akkor a szám és az ezresre kerekített értéke megegyezik

Pozitív és negatív számok

Pozitív és negatív számok összeadása

$$\oplus + \oplus \rightarrow 3 + 2 = 5$$

$$\oplus + \ominus \rightarrow 5 + (-4) = 5 - 4 = 1$$

$$\oplus + \ominus \rightarrow 5 + (-7) = 5 - 7 = -2$$

$$\ominus + \oplus \rightarrow (-3) + 5 = 5 - 3 = 2$$

$$\ominus + \oplus \rightarrow (-3) + 2 = 2 - 3 = -1$$

$$\ominus + \ominus \rightarrow (-4) + (-5) = -(4 + 5) = -9$$

Pozitív és negatív számok kivonása

$$\oplus - \oplus \rightarrow 7 - 2 = 5$$

$$\oplus - \oplus \rightarrow 3 - 5 = -2$$

$$\oplus - \ominus \rightarrow 6 - (-1) = 6 + 1 = 7$$

$$\ominus - \oplus \rightarrow (-3) - 2 = -(3 + 2) = -5$$

$$\ominus - \ominus \rightarrow (-4) - (-6) = (-4) + 6 = 6 - 4 = 2$$

$$\ominus - \ominus \rightarrow (-7) - (-3) = (-7) + 3 = 3 - 7 = -4$$

Pozitív és negatív számok szorzása

$$\oplus \cdot \oplus \rightarrow 3 \cdot 2 = 6$$

$$\oplus \cdot \ominus \rightarrow 4 \cdot (-3) = -12$$

$$\ominus \cdot \oplus \rightarrow (-5) \cdot 3 = -15$$

$$\ominus \cdot \ominus \rightarrow (-6) \cdot (-2) = 12$$

- Ha azonos előjelű számokat ($\oplus$ -t $\oplus$ -szal, vagy $\ominus$ -t $\ominus$ -szal) szorzunk egymással, akkor az eredmény pozitív lesz ($\oplus$)
- Ha eltérő előjelű számokat ($\oplus$ -t $\ominus$ -szal, vagy $\ominus$ -t $\oplus$ -szal) szorzunk egymással, akkor az eredmény negatív lesz ($\ominus$)

Pozitív és negatív számok osztása

$$\oplus : \oplus \rightarrow 18 : 3 = 6$$

$$\oplus : \ominus \rightarrow 24 : (-6) = -4$$

$$\ominus : \oplus \rightarrow (-32) : 4 = -8$$

$$\ominus : \ominus \rightarrow (-21) : (-3) = 7$$

- Ha azonos előjelű számokat ($\oplus$ -t $\oplus$ -szal, vagy $\ominus$ -t $\ominus$ -szal) osztunk egymással, akkor az eredmény pozitív lesz ($\oplus$)
- Ha eltérő előjelű számokat ($\oplus$ -t $\ominus$ -szal, vagy $\ominus$ -t $\oplus$ -szal) osztunk egymással, akkor az eredmény negatív lesz ($\ominus$)

Ellentett

- A számegyenesen a 0-tól ugyanolyan távolságra lévő számok lesznek egymás ellentettjei
- Negatív szám ellentettjét úgy kapjuk meg, hogy eltüntetjük a mínusz előjelet ($-$) a szám előtt
- Pozitív szám ellentettjét úgy kapjuk meg, hogy a szám elé mínusz előjelet ($-$) írunk

Abszolút érték

- Az abszolút érték megadja egy szám 0-tól való távolságát a számegyenesen
- 0 abszolút értéke 0 lesz
- 0-tól különböző számok abszolút értéke mindig pozitív szám lesz
- Negatív számok esetén az abszolút érték eltünteti a mínusz előjelet
- Pozitív számok esetén az abszolút érték nem csinál semmit
- Abszolút érték jele: $| \quad |$

Szám	Ellentett	Abszolút érték
-3	3	3
-2	2	2
-1	1	1
0	0	0
1	-1	1
2	-2	2
3	-3	3

Írásbeli műveletek, negatív számok esetén

- Ha egy kisebb számból vonunk ki egy nagyobb számot, akkor negatív számot kapunk eredményként, de írásbeli kivonásnál a nagyobb számból kell kivonni a kisebb számot, és a végeredmény elé írni egy mínusz előjelet

$$157 - 238 = -81$$

	1		
	2	3	8
-	1	5	7
	0	8	1

- Ha egy negatív számból vonunk ki egy pozitív számot, akkor a két számot írásban össze fogjuk adni, és az eredmény elé teszünk egy mínusz előjelet

$$(-163) - 347 = -510$$

	1	1	
	1	6	3
+	3	4	7
	5	1	0

- Ha negatív számhoz adunk hozzá pozitív számot, akkor a két számot előjelekkel együtt fel tudjuk cserélni, és ezután elvégezhetjük a kivonást (Az eredmény attól függően lesz pozitív vagy negatív, hogy melyik szám a nagyobb)

$$(-132) + 287 = 287 - 132 = \mathbf{155}$$

	2	8	7
-	1	3	2
	1	5	5

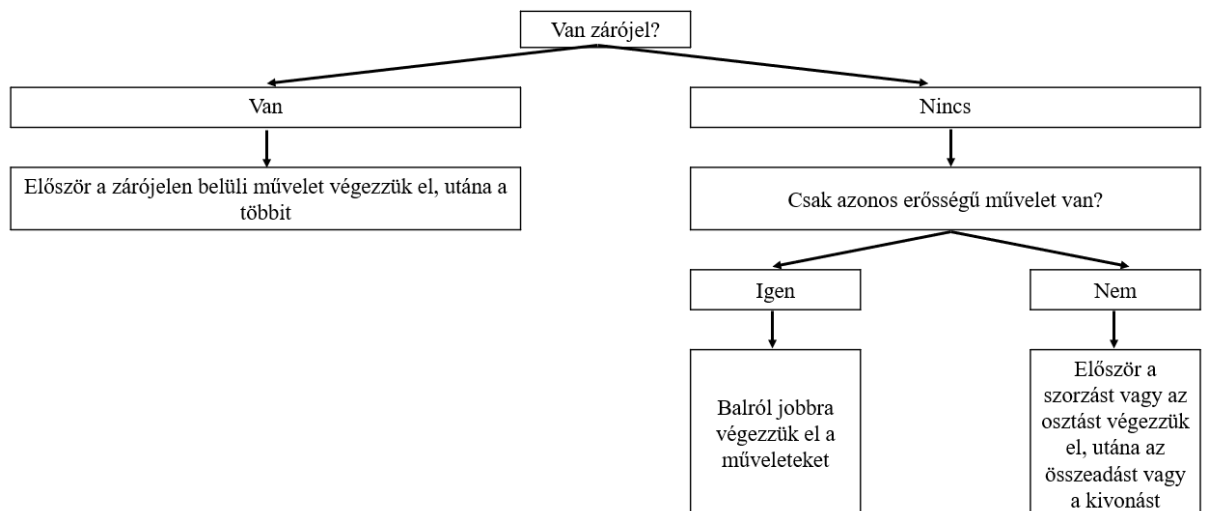
- Ha negatív számból vonunk ki negatív számot, akkor a mínusz mínuszból plusz lesz, így az előző esethez jutunk vissza

$$(-189) - (-123) = 123 - 189 = \mathbf{-66}$$

	1	8	9
-	1	2	3
	0	6	6

Műveletek sorrendje

- 1) Zárójelben lévő műveletek
- 2) Szorzás, osztás
- 3) Összeadás, kivonás



Szavak, amikre figyelni kell

Szavak	Példa	Jelentés
Legalább	Legalább 2	2, 3, 4, 5 ...
Legfeljebb	Legfeljebb 3	0, 1, 2, 3
Minimum	Minimum 1	1, 2, 3, 4 ...
Maximum	Maximum 5	0, 1, 2, 3, 4, 5
Több	Több, mint 3	4, 5, 6, 7 ...
Kevesebb	Kevesebb, mint 4	0, 1, 2, 3
Nagyobb	Nagyobb, mint 6	7, 8, 9, 10 ...
Kisebb	Kisebb, mint 3	0, 1, 2
Nem nagyobb	Nem nagyobb, mint 5	0, 1, 2, 3, 4, 5
Nem kisebb	Nem kisebb, mint 4	4, 5, 6, 7 ...

Törtek

Törtek bevezetés

- Ha 4 egyenlő szeletre vágott tortából (pizzából) 3 szeletet kapunk meg, akkor a torta (pizza) **3 negyed** részét kaptuk meg

$$\frac{3}{4}$$

Számláló
Törtvonal
Nevező

Törtek bővítése

- Hogyan fogunk bővíteni?
 - A számlálót és a nevezőt is ugyanazzal az egész számmal fogjuk megszorozni
 - Fontos, hogy a számláló és a nevező is meg legyen szorozva a számmal, ne csak az egyik

- Fontos, hogy a számláló és a nevező is ugyanazzal az egész számmal legyen megszorozva

$$\begin{array}{c} \cdot 2 \\ \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \\ \cdot 2 \end{array}$$

Törtek egyszerűsítése

- Hogyan fogunk egyszerűsíteni?
 - A számlálót és a nevezőt is ugyanazzal az egész számmal fogjuk elosztani
 - Fontos, hogy a számláló és a nevező is el legyen osztva a számmal, ne csak az egyik
 - Fontos, hogy a számláló és a nevező is ugyanazzal az egész számmal legyen elosztva
- Bővíteni mindig tudunk, egyszerűsíteni viszont nem mindig
- Akkor tudunk egyszerűsíteni, ha a tört számlálója és nevezője is osztható ugyanazzal a számmal
- Mindig igyekszünk a lehető legnagyobb számmal egyszerűsíteni

$$\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{4}_2} = \frac{1}{2}$$

Törtek és az osztás művelet

- A törtet át tudjuk írni egy osztás műveletre, de az osztás műveletet is át tudjuk írni egy törtté:
 - Az osztandó lesz a számláló
 - Az osztó lesz a nevező

$$4:8 = \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{8}_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{6}{3} = 6:3 = 2$$

Törtek típusai

1-nél kisebb törtek

Számláló < Nevező

Példák:

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}$$

1-gyel egyenlő törtek

Számláló = Nevező

Példák:

$$\frac{2}{2}$$

$$\frac{3}{3}$$

1-nél nagyobb törtek

Számláló > Nevező

Példák:

$$\frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{3}$$

Egész számok átírása tört alakra

1 → Számláló = Nevező

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4}$$

2 → Számláló = 2 · Nevező

$$2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5}$$

3 → Számláló = 3 · Nevező

$$3 = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{24}{8}$$

4 → Számláló = 4 · Nevező

$$4 = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \frac{40}{10}$$

Törtek összehasonlítása

1. Ugyanaz a nevező: Az a nagyobb, amelyiknek nagyobb a számlálója

$$\frac{2}{5} \boxed{<} \frac{4}{5}$$

2. Ugyanaz a számláló: Az a nagyobb, amelyiknek kisebb a nevezője

$$\frac{3}{5} \boxed{>} \frac{3}{7}$$

3. Eltérő a számláló és a nevező is: Közös nevezőre hozás → 1. eset

$$\frac{4}{10} \quad \frac{2}{5} \boxed{<} \frac{1}{2} \quad \frac{5}{10}$$

4. Az egyik nagyobb, mint 1: Az a nagyobb

$$\frac{9}{8} \boxed{>} \frac{6}{7}$$

Vegyes tört alak

- 1-nél nagyobb törtet átírhatunk vegyes tört alakba/vegyes tört alakban adhatjuk meg
- A vegyes tört alak egy egész számból és egy tört számból áll, amiket egymás mellé írunk le

$$2\frac{3}{4} \rightarrow 2 + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

Törtek összeadása és kivonása

- Törteket akkor tudunk összeadni egymással és kivonni őket egymásból, ha a két törtnek közös a nevezője (ugyanannyi szeletre vannak vágva a pizzák)
- Ilyenkor csak össze kell adni a számlálókat (összeadásnál), valamint ki kell vonni egymásból őket (kivonásnál)
- Mi van, ha nem ugyanaz a két tört nevezője?
 - Ilyenkor közös nevezőre kell hoznunk a két törtet
- Hogy hozzuk közös nevezőre a törteteket?
 - Vagy egyik vagy mind a két törtet bővíteni fogjuk
 - Ha az egyik nevező a másik nevező egész számszorosa, akkor a kisebb nevezőt fogjuk bővíteni a nagyobb nevezőre

- Ha a nevezők nem egymás egész számszorosai, akkor közös nevezőre hozzuk őket (mind a két törtet bővíteni fogjuk)
- Ilyenkor két dolgot tehetünk:
 - ❖ Az egyik, hogy összeszorozzuk a nevezőket, és az lesz az új közös nevező (ez mindig működni fog, viszont van, hogy nagy számokkal kell dolgoznunk)
 - ❖ A másik, hogy keresünk egy olyan számot, ami osztható az egyik és osztható a másik nevezővel is (van, hogy ez a szám a két szám szorzata lesz (előző eset), de van, hogy lesz kisebb szám is, ez azért előnyösebb, mint az összeszorozás, mert így nem kell nagy számokkal számolnunk)
- A végén, ha tudunk, egyszerűsítünk (nem kötelező)

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}$$

Törtek és egész számok összeadása/kivonása

- Törtet és egész számot úgy adunk össze, vagy úgy vonjuk ki egymásból őket, hogy az egész számot felírjuk olyan nevezőjű törtként, mint a tört nevezője

$$\frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{7}{3} - 2 = \frac{7}{3} - \frac{6}{3} = \frac{1}{3}$$

Törtek szorzása egész számmal

- Törteket úgy tudunk szorozni egész számmal, hogy a tört számlálóját megszorozzuk a számmal (ez a módszer mindig működni fog)
- Ennél a módszernél ugyanúgy, mint összeadás vagy kivonás esetén, a végén, ha tudunk, akkor egyszerűsítünk
- A szorzást úgy is elvégezhetjük, hogy az egész számot és a tört nevezőjét egyszerűsítjük egymással (ez csak akkor alkalmazható, ha az egész számnak és a tört nevezőjének van közös osztója)

- Ennél a módszernél az eredményt a lehető legegyszerűbb alakban fogjuk megkapni, így a végén nem kell egyszerűsíteniünk (mert közben elvégeztük)

Törtek szorzása törttel

- Törtet úgy tudunk szorozni törttel, hogy a számlálót a számlálóval, a nevezőt a nevezővel szorozzuk
- Szorzás esetén **nem kell közös nevezőre hozni** a két törtet, mint összeadásnál vagy kivonásnál
- Ennél a módszernél a végén, ha tudunk, akkor egyszerűsítünk
- A szorzás elvégzése előtt is egyszerűsíthetünk:
 - Egyszerűsíthetjük a törteket külön-külön is (ha tudjuk)
 - A számlálót és a nevezőt keresztbe tudjuk egyszerűsíteni (az egyik tört számlálóját a másik tört nevezőjével)
 - Ha tudunk a törtön belül, valamint keresztbe is egyszerűsíteni, akkor mindegy a sorrend
- Érdeemes mindig elvégezni az egyszerűsítést, mert így kisebb számokkal kell dolgoznunk, és a végén a lehető legegyszerűbb alakban kapjuk meg az eredményt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$$

Törtek osztása egész számmal

- Törteket úgy tudunk osztani egész számmal, hogy a tört nevezőjét megszorozzuk a számmal (ez a módszer mindig működni fog)
- Ennél a módszernél ugyanúgy, mint összeadás vagy kivonás esetén, a végén, ha tudunk, akkor egyszerűsítünk
- Az osztást úgy is elvégezhetjük, hogy a tört számlálóját és az egész számot elosztjuk/egyszerűsítjük egymással (ez csak akkor alkalmazható, ha a tört számlálójának és az egész számnak van közös osztója)
- Ennél a módszernél az eredményt a lehető legegyszerűbb alakban fogjuk megkapni, így a végén nem kell egyszerűsíteniünk (mert közben elvégeztük)

Reciprok

- Egy tört reciprokát úgy kapjuk meg, hogy megcseréljük egymással a tört számlálóját és nevezőjét
- Mi a helyzet egész számokkal?
- Egész számok felírhatóak eggyedekként, úgy már tudjuk venni a reciprokukat
- 1-nek a reciproka 1, ez az egyetlen pozitív szám, aminek a reciproka önmaga lesz
- Negatív törtek, negatív számok esetén ugyanazt csináljuk, mint pozitív törtek és számok esetén, csak rakunk eléjük egy mínusz előjelet
- **A 0-nak nincs reciproka**
- Tört és reciprokának szorzata mindig 1 (a számlálót és a nevezőt is teljesen le tudjuk egyszerűsíteni keresztbe)
- Ha a tört számlálójában 1 van, akkor a tört reciproka egész szám lesz

$$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{3}{2}$$

Megjegyzés: A reciproknak nincs jelölése, itt nyíllal van jelölve kétharmad reciproka háromketted

Törtek osztása törttel

- Törtet úgy tudunk osztani törttel, hogy az osztó tört (osztásjel utáni tört) reciprokával szorzunk
- Az első törttel (osztandó) nem csinálunk semmit, a második törtnek vesszük a reciprokát (megcseréljük a számlálót és a nevezőt), az osztás jelet pedig szorzásjelre cseréljük
- Ha ezekkel a lépésekkel megvagyunk, akkor visszavezettük a példát két tört szorzására, innentől ugyanazt csináljuk, mint törtek szorzása esetén:
- A számlálót a számlálóval, a nevezőt a nevezővel szorozzuk
- Egyszerűsíthetjük a törteket külön-külön is (ha tudjuk)
- A számlálót és a nevezőt keresztbe is tudjuk egyszerűsíteni (az egyik tört számlálóját a másik tört nevezőjével)

- Egyszerűsítést érdemes a reciprokkal való szorzás átírása után elvégezni (ne kavarodjunk bele később)

$$\frac{1}{3} : \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$$

Törtek szorzásának és osztásának összehasonlítása egész számok esetén

Szorzás:

A tört számlálóját és az egész számot szorozzuk egymással:

$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

A tört nevezőjét és az egész számot egyszerűsítjük egymással:

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{\frac{8}{3}} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{7}{8} \cdot 8 = 7$$

Osztás:

A tört nevezőjét és az egész számot szorozzuk egymással:

$$\frac{5}{4} : 2 = \frac{5}{8}$$

$$\frac{7}{9} : 3 = \frac{7}{27}$$

A tört számlálóját és az egész számot egyszerűsítjük egymással:

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$$

$$\frac{\frac{5}{9}}{\frac{2}{3}} : 2 = \frac{5}{9} : 2 = \frac{5}{18}$$

Tizedes törtek

Tizedes törtek helyi értéke

- Eggyedek nem lesznek
 - A tizedesvessző utáni 1. számjegy lesz a tized
 - A tizedesvessző utáni 2. számjegy lesz a század
 - A tizedesvessző utáni 3. számjegy lesz az ezred
 - Ezt lehet folytatni tovább is (4. számjegy tízezred, 5. számjegy százezred ...)
 - Egész számok esetén a tizedesvessző után 0 szerepel (ezt nem szoktuk kiírni)
- Pl.: $2 = 2,0$
- A tizedesvessző utáni számjegy mögé bármennyi 0-t írhatunk, nem fog változni a szám értéke
- Pl.: $2,2 = 2,20 = 2,200$

- Ha a tizedesvessző és a törtrész között van 0, vagy vannak 0-k, azt nem hagyhatjuk el sosem
- Pl.: $3,08 \neq 3,8$ $4,002 \neq 4,02 \neq 4,2$
- Tizedes törtek kimondása: Kimondjuk a tizedesvessző előtti számot (**egészrész**), utána azt mondjuk, hogy egész, ezután kimondjuk a tizedesvessző utáni számot, és utána a **törtrész** elnevezést (tized, század, ezred)
- Ha a tizedesvessző után 1 számjegy van, akkor tizedet mondunk, ha 2 számjegy, akkor századot, ha 3 számjegy, akkor ezredet

Tizedes törtek egészre kerekítése

- Egészre kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb egész szomszédját, és eldöntjük, a kettő közül melyikhez van közelebb
- A két egész szomszéd között félúton lévő szám mindig az 5, 50, 500 lesz (Félúton: Ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)
- Ha a tized helyén 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor **lefelé** (↓) kerekítünk
- Ha a tized helyén 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek szerepelnek, akkor **felfelé** (↑) kerekítünk
- Ha egész számot kell egészre kerekíteni, akkor a szám és a kerekített értéke megegyezik

Tizedes törtek 1 tizedesjegyre kerekítése

- Tizedre kerekítésnél megkeressük a szám kisebb, illetve nagyobb tized szomszédját, és eldöntjük, a kettő közül melyikhez van közelebb
- A két tized szomszéd között félúton lévő szám mindig a ,05 ,050 lesz (Félúton: Ugyanolyan távol van az egyiktől, mint a másiktól)
- Ha a század helyén 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor **lefelé** (↓) kerekítünk
- Ha a század helyén 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek szerepelnek, akkor **felfelé** (↑) kerekítünk
- Ha egész számot vagy 1 tizedesjegyű számot kell tizedre kerekíteni, akkor a szám és a kerekített értéke megegyezik

Tizedes törtek összeadása és kivonása írásban

- Tizedes törtek írásbeli összeadásakor arra kell figyelniük, hogy a tizedesvesszők egymás alá kerüljenek (megfelelő helyi értékek)
- Ha nem ugyanannyi tizedesjegy van a két szám esetén, akkor 0-t vagy 0-kat fogunk írni a kevesebb tizedesjegyű szám tizedesjegyei mögé

Ha nem ugyanannyi számjegy van a tizedesvessző előtt:

		1	1			
		2	6,	6	3	
+	1	5	7,	7	1	
	1	8	4,	3	4	

Ha nem ugyanannyi számjegy van a tizedesvessző után:

		1	1			
	1	2	8,	9	0	
+	6	3	7,	8	1	
	7	6	6,	7	1	

Tizedes törtek szorzása 10-zel, 100-zal, 1000-rel

- Ha a tizedes törteket 10-zel, 100-zal, 1000-rel szorozzuk meg, akkor annyiszor fogjuk **jobbra** (→) vinni a tizedesvesszőt, amennyi 0 az 1-es mögött szerepel (**10-nél 1-gyel**, **100-nál, 2-vel**, **1000-nél 3-mal**, és így tovább...)
- Ha nem tudjuk már tovább **jobbra** (→) vinni a tizedesvesszőt (az utolsó szám mögé került), de még kellene, akkor a szám mögé 0-kat fogunk írni (még annyi 0-t, amennyiszer **jobbra** (→) kellene vinni a tizedesvesszőt)
- Ilyen feladatok elején érdemes mindig megbecsülni az eredményt úgy, hogy a tizedes tört törtrészét elhagyjuk, és úgy szorozzuk meg az egészrészt 10-zel, 100-zal, 1000-rel, így biztosan nem lesz benne hiba

Egész számok szorzása 5 tizedre végződő számmal (1, 5; 2, 5; 3, 5...)

- Ha egész számot 5 tizedre végződő tizedes törttel szorzunk meg, akkor fejben könnyen el tudjuk végezni a szorzást, ha az egész szám nem túl nagy
- Ehhez a tizedes törtet szét fogjuk bontani egészrészsre és törtrészsre, majd az egész számot megszorozzuk külön az egészrésszel, és külön a törtrésszel, végül a kapott két számot összeadjuk
- A 0,5-del való szorzás egy 2-vel való osztásnak felel meg, tehát mindig az egész szám felét kell vennünk
- Ha 1,5-del (másfél) kell valamit megszoroznunk, akkor egyszerűen csak a számhoz hozzá fogjuk adni a szám felét
- $16 \cdot 1,5 = 16 \cdot (1 + 0,5) = 16 \cdot 1 + 16 \cdot 0,5 = 16 + 8 = \mathbf{24}$
- $18 \cdot 2,5 = 18 \cdot (2 + 0,5) = 18 \cdot 2 + 18 \cdot 0,5 = 36 + 9 = \mathbf{45}$
- $52 \cdot 3,5 = 52 \cdot (3 + 0,5) = 52 \cdot 3 + 52 \cdot 0,5 = 156 + 26 = \mathbf{182}$

Egész számok, tizedes törtek osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel

- Egész számokat úgy osztunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel, hogy a szám végéről annyi 0-t hagyunk el, amennyi 0 van az osztóban az 1-es után (10-nél **1**, 100-nál **2**, 1000-nél **3** 0-t fogunk elhagyni a szám végéről)
- Ha az egész szám nem 0-ra végződik, vagy nincs elegendő 0 a végén, akkor az utolsó szám mögé képzeletben odateszünk egy tizedesvesszőt, és annyszor fogjuk **balra** (←) vinni, amennyi 0 szerepel az osztóban az 1-es mögött (10-nél **1-gyel**, 100-nál **2-vel**, 1000-nél **3-mal** fogjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt)
- Ha tizedes törteket 10-zel, 100-zal, 1000-rel osztunk el, akkor pedig annyszor fogjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt, amennyi 0 szerepel az osztóban az 1-es mögött (10-nél **1-gyel**, 100-nál **2-vel**, 1000-nél **3-mal** fogjuk **balra** (←) vinni a tizedesvesszőt)
- Ha már nem tudjuk többször balra vinni (az első számjegy elé került), akkor az első számjegy elé beírjuk, hogy 0,..., ha pedig még tovább kell vinnünk, akkor a tizedesvessző utáni első számjegy és a tizedesvessző közé még annyi 0-t írunk, amennyiszer még **balra** (←) kellene vinni a tizedesvesszőt (ha még 2-vel kellene **balra** (←) vinni, akkor 0,00...)

Tizedes törtek osztása egész számokkal

- Az elején ugyanúgy fogjuk végezni az osztást, mint amikor egész számot egész számmal osztunk, de ha eljutunk a tizedesvesszőig, akkor az eredménynél kitesszük a tizedesvesszőt, majd folytatjuk az osztást, és ha van maradék, akkor 0-t írunk mögé, és egészen addig folytatjuk az osztást, amíg 0 maradék nem lesz a végén, vagy nincs ismétlődés

$$195,4 : 2 = 97,7$$

1	9'	5',	4'	:	2	=	9	7,	7
	1	5							
		1	4						
			0						

Osztás tizedes törtekkel

- Ha egy számot (akár egész számot, akár tizedes törtet) tizedes törttel kell osztanunk, akkor a tizedes törtet meg kell szoroznunk annyival, hogy egész számot kapjunk (bármilyen számmal lehet szorozni, de 10-zel, 100-zal, 1000-rel szoktunk), ilyenkor, hogy a hányados ne változzon, az osztandót is ugyanezzel a számmal kell megszoroznunk (egész számokkal példa: $20 : 4 = 5$ és $200 : 40 = 5$)
- Ha mind a két szám (osztandó és osztó is) tizedes tört, akkor elegendő, ha csak az osztó lesz egész szám, az osztandó maradhat tizedes tört (tizedes törtet tudunk írásban osztani egész számmal)

$$42 : 1,2 = 420 : 12 = 35$$

4	2'	0'	:	1	2	=	3	5
	6	0						
		0						

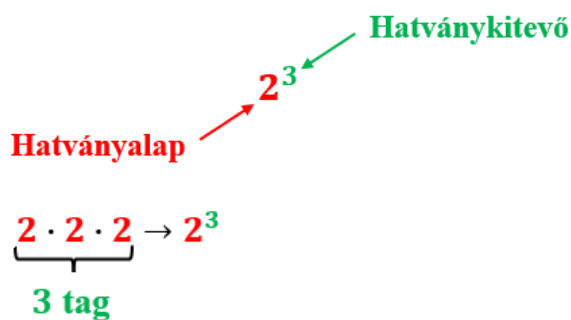
Törtek és tizedes törtek

Tört	Tizedes tört
$\frac{1}{2}$	0,5
$\frac{1}{3}$	0,3
$\frac{1}{4}$	0,25
$\frac{1}{5}$	0,2
$\frac{1}{6}$	0,16
$\frac{1}{7}$	0,142857
$\frac{1}{8}$	0,125
$\frac{1}{9}$	0,1
$\frac{1}{10}$	0,1

Műveletek közösleges törtekkel és tizedes törtekkel

- Ha tizedes törtek és törtek között szeretnénk műveleteket elvégezni (+, −, ·, :), akkor két dolgot tehetünk:
 - Az egyik, hogy a törtet átírjuk tizedes tört alakra, utána vagy fejben vagy írásban elvégezzük a műveletet, ekkor az eredményt tizedes tört alakban fogjuk megkapni
 - A másik, hogy a tizedes törtet írjuk át tört alakra, utána elvégezzük a műveleteket (ha kell közös nevezőre hozunk, egyszerűsítünk), ebben az esetben tört alakban fogjuk megkapni az eredményt
- Nincs rá szabály, hogy mikor melyiket kell átírni, nekünk kell eldönteni, hogy számunkra hogy egyszerűbb a számolás, de van olyan, hogy a feladat szövege megadja (milyen formában kéri a végeredményt), ebben az esetben érdemes olyan alakban számolni, amiben a feladat kéri a végeredményt, de lehet azt is, hogy a másik alakban számolunk, ha az egyszerűbb, és a végén átírjuk a kért alakra

Hatványozás



Hatványok, amiket jó tudni fejből

2. Hatványok	
1^2	1
2^2	4
3^2	9
4^2	16
5^2	25
6^2	36
7^2	49
8^2	64
9^2	81
10^2	100

3. Hatványok	
1^3	1
2^3	8
3^3	27
4^3	64
5^3	125

4. Hatványok	
1^4	1
2^4	16
3^4	81

2 hatványai	
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1024

10 hatványai	
10^1	10
10^2	100
10^3	1000
10^4	10 000
10^6	1 000 000
10^9	1 000 000 000

Hatványozás azonosságai

Elnevezés	Azonosság
H1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
H2	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
H3	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
H4	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
H5	$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \cdot m}$

- A H1 és H2 azonosságokat akkor használjuk, ha ugyanaz a hatványok **alapja**
- A H3 és H4 azonosságokat akkor használjuk, ha ugyanaz a hatványok **kitevője**
- A H5 azonosságot általában a zárójel felbontására szoktuk használni, ritkán használjuk a kitevők felcserélésére

Negatív számok hatványozása

- Negatív számok hatványozása során végeredményként kaphatunk pozitív, és kaphatunk negatív számot is
- Ez a kitevőben lévő számtól függ:
- Ha a szám **páros**, akkor a végeredmény **pozitív** lesz

$$\ominus \cdot \ominus \cdot \ominus \cdot \ominus \cdot \ominus \cdot \ominus \cdot \ominus \cdot \ominus = \oplus$$

$$(-2)^4 = 16$$

- Ha a szám **páratlan**, akkor a végeredmény **negatív** lesz

$$\ominus \cdot \ominus \cdot \ominus \cdot \ominus \cdot \ominus \cdot \ominus \cdot \ominus = \ominus$$

$$(-2)^3 = -8$$

Normálalak

- A normálalak két tagból áll:
- **Egy 1 és 10 közötti számból** (1 vagy annál nagyobb, 10-nél kisebb, és nem muszáj egész számnak lennie)
- **10 hatványából** (10^2 , 10^3 , 10^4 ...)
- Pl.: $150\,000\,000 = 1,5 \cdot 10^8$
- Egy számot úgy írunk fel normálalakban, hogy az utolsó szám mögé képzeljük a tizedesvesszőt, és **balra** ($\leftarrow$) visszük egészen az első számjegyig, és ahányszor **balra** ($\leftarrow$) vittük a tizedesvesszőt, a 10 kitevőjében annyi lesz
- Ha normálalakról "rendes" alakra írjuk át a számot, akkor annyiszor visszük **jobbra** ($\rightarrow$) a tizedesvesszőt, amennyi a 10 kitevője
- Ha már nem tudjuk többször **jobbra** ($\rightarrow$) vinni (utolsó számjegy mögé került), akkor 0-kat kezdünk írni az utolsó számjegy mögé (annyit, ahányszor még **jobbra** ($\rightarrow$) kellene vinnünk a tizedesvesszőt)

Átlag

Sima adatok esetén

- Összeadjuk az adatokat, megszámoljuk az adatok számát és a kettőt elosztjuk egymással

$$\text{Átlag} = \frac{\text{Adatok összege}}{\text{Adatok száma}}$$

Osztályzat típusú adatok esetén

- Ha táblázatosan, vagy diagramon egy dolgozat osztályzatai vannak megadva, akkor az adatok összegét úgy kapjuk, hogy az érdemjegyeket szorozzuk azzal ahányan kapták az adott érdemjegyet, majd ezeket összeadjuk, az adatok száma pedig az érdemjegyek számának összege lesz
- Ezután itt is ugyanazt a képletet alkalmazzuk, mint sima adatok esetén

$$\text{Átlag} = \frac{\text{Adatok összege}}{\text{Adatok száma}}$$

Módusz

- A leggyakrabban előforduló elem
- Nem lesz túl nehéz dolgunk a módusz meghatározása során, meg kell keresnünk azt az elemet, ami a leggyakrabban (legtöbbször) fordul elő az adatok között
- Fontos, hogy módusz esetén az adat lesz a végeredmény, nem az, hogy hányszor fordult elő (Ha legtöbbször a **9-es szám** fordult elő az adatok között, és 6 db 9-es volt, akkor a **módusz 9 lesz**, nem pedig 6)

Medián

- A sorba rendezett (növekvő sorrendbe) adatok közül a középső elem
- Módusz és medián megkülönböztetése: Medián → Medium (angol) → Közép
- A mediántól ugyanannyi elem van jobbra, mint balra (ugyanannyi lesz kisebb tőle, mint amennyi nagyobb)
- Az adatok száma lehet páros vagy páratlan:
 - Ha az adatok száma **páratlan** (Pl.: 7 adat van), akkor a medián a középső szám lesz (4. szám, tőle 3 szám lesz balra, és 3 lesz jobbra)

- Ha az adatok száma **páros** (Pl.: 6 adat van), akkor a medián két szám közé fog esni, (a 3. és 4. számok közé) ilyenkor úgy kapjuk meg a mediánt, hogy kiszámoljuk a két szám átlagát:
- ❖ Ha a két szám, amik közé esik a medián ugyanazok (Pl.: 2 db 4-es közé esik), akkor a medián megegyezik a számokkal (a **medián 4** lesz)
- ❖ Ha a két szám, amik közé esik a medián nem ugyanazok (Pl.: 5-ös és 7-es közé esik), akkor kiszámoljuk az átlagot, vagyis összeadjuk a két számot, és elosztjuk 2-vel ($\frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$, a **medián 6** lesz) (ebben az esetben a medián nem szerepel az adatok között)

Számrendszerek

Számok átírása valamilyen számrendszerből tízes számrendszerbe

- Lépések:
 - 1. lépés: Ahány számjegy szerepel a számban, annyi tálcát rajzolunk
 - 2. lépés: A tálcák alá odaírjuk a számrendszernek megfelelő számokat
 - 3. lépés: Beírjuk a számokat a tálcákra (2. és 3. lépés felcserélhető)
 - 4. lépés: Elvégezzük a szorzásokat, valamint összeadásokat

Számok átírása tízes számrendszerből más számrendszerbe

- Lépések:
 - 1. lépés: Elkezdünk tálcákat rajzolni, közben a tálcák alá írjuk a számrendszernek megfelelő számokat
 - 2. lépés: Addig rajzoljuk a tálcákat, és írjuk alá a számokat, amíg az eredeti számnál kisebb szám nem kerül az első tálca alá
 - 3. lépés: Balról az első tálcába beírjuk azt a számot, amennyiszer a tálca alatti szám megvan az eredeti számban
 - 4. lépés: Ezt kivonjuk az eredeti számból, és balról jobbra haladva a következő tálcába beírjuk azt a számot, amennyiszer a tálca alatti szám megvan a különbségben, és ezt a két lépést ismétljük egészen az utolsó tálcáig
 - 5. lépés: Ellenőrizzük magunkat