

Geometriai transzformációk

Tengelyes tükrözés

Az az egyenes, amire tükrözünk, a **tükörtengely**, általában t -vel szoktuk jelölni

Bármit is szeretnénk tükrözni (félegyenes, egyenes, szakasz, alakzat, síkidom, sokszög), mindig a pontokat fogjuk tükrözni, a pontok tükörképeit pedig a megfelelő sorrendben össze fogjuk kötni

Pontok tükrözése: A pontból merőlegest állítunk a tükörtengelyre, ezt meghosszabbítjuk, és ahol metszi a tükörtengelyt, ott beleszúrjuk a körzőnket, kinyitjuk akkorára, mint a metszéspont és az eredeti pont távolsága, és a tükörtengely másik oldalán elmetsszük a merőlegest

A pont tükörképe ugyanolyan távol lesz a tükörtengelytől, mint az eredeti pont

A pont tükörképét $'$ -vel jelöljük (Ha A pont volt az eredeti pont, a tükörképe A' lesz)

Minél közelebb van a pont a tükörtengelyhez, annál közelebb lesz a tükörképe is

Szakaszok tükrözése: A szakasz két végpontját tükrözzük, majd összekötjük ezeket

Félegyenesek tükrözése: Kiválasztunk egy tetszőleges pontot a félegyenesen, ezt és a félegyenes kezdőpontját tükrözzük, majd összekötjük őket, az összekötésnél tovább fogjuk húzni a vonalat

Egyenesek tükrözése: Kiválasztunk két tetszőleges pontot az egyenesen, ezeket tükrözzük, a pontok tükörképeit összekötjük meghosszabbítva

Sokszögek tükrözése: A sokszög minden pontját tükrözzük, majd ezeket a megfelelő sorrendben összekötjük (ugyanolyan sorrendben, mint az eredeti alakzat esetén)

Kör tükrözése: A kör középpontját tükrözzük, a körzőnket beleszúrjuk az eredeti kör középpontjába, kinyitjuk sugárnyira, a tükörkép középpontjába beleszúrjuk, és körzünk

Tengelyes tükrözés speciális esetei

Pont: Ha a pont a tükörtengelyen van, akkor a pont és a tükörképe megegyezik egymással

Szakasz: Ha a szakasz a tükörtengelyen van, akkor a szakasz és a tükörképe megegyezik egymással

Egyenes: A tükörtengellyel párhuzamos egyenes tükörképe is párhuzamos lesz a tükörtengellyel

Egyenes: Abban a pontban, ahol az egyenes metszi a tükörtengelyt, ott fogja metszeni a tükörképe is a tükörtengelyt (ez lesz az egyik választott pont)

Egyenes: Ha az egyenes rajta van a tükörtengelyen, akkor az egyenes és a tükörképe megegyezik egymással

Egyenes: Ha az egyenes merőleges a tükörtengelyre, akkor az egyenes és a tükörképe megegyezik egymással

Tengelyesen szimmetrikus sokszögek: Ha a sokszög úgy helyezkedik el, hogy a szimmetriatengelye egybeesik a tükörtengellyel, akkor a sokszög és a tükörképe megegyezik egymással

Kör: Ha a kör középpontja rajta van a tükörtengelyen, akkor a kör és a tükörképe megegyezik egymással

Kör: Ha a kör érinti a tükörtengelyt, akkor a tükörképe ugyanabban a pontban fogja érinteni a tükörtengelyt, mint az eredeti alakzat

Kör: Ha két pontban metszi a tükörtengelyt, akkor a tükörkép ugyanebben a két pontban fogja metszeni a tükörtengelyt

Tengelyes tükrözés tulajdonságai

Egyenestartó: Egyenes képe egyenes

Távolságtartó: A szakaszok hossza nem változik a tükrözés során

Szögtartó: A szögek nagysága nem változik a tükrözés során

Körtartó: Kör tükörképe is kör lesz

Egybevágósági transzformáció: Az alakzat és a tükörképe egybevágóak lesznek egymással (ugyanolyanok)

Egybevágóság jele: \cong

Megfordítható transzformáció: Ha a tükrözés során A pont tükörképe A' lett, akkor A' tükörképe A lesz

Megváltoztatja a körüljárási irányt: Ha az eredeti alakzat esetén az óramutató járásával **megegyező** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörkép esetén az óramutató járásával **ellentétes** irányba fogjuk összekötni a pontokat (Ha az eredeti alakzatnál az óramutató járásával **ellentétes** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörképnél az óramutató járásával **megegyező** irányba fogjuk összekötni a pontokat)

Középpontos tükrözés

Az a pont, amire tükrözünk, a szimmetriaközéppont, általában K -val szoktuk jelölni

Bármit is szeretnénk tükrözni (félegyenes, egyenes, szakasz, alakzat, síkidom, sokszög), mindig a pontokat fogjuk tükrözni, a pontok tükörképeit pedig a megfelelő sorrendben össze fogjuk kötni

Pontok tükrözése: A pontot összekötjük a K középponttal és meghosszabbítjuk, a pont tükörképe a meghosszabbított egyenesen lesz ugyanolyan távolságra K -tól, mint az eredeti pont

A pont tükörképe ugyanolyan távol lesz a középponttól, mint az eredeti pont

A pont tükörképét $'$ -vel jelöljük (Ha A pont volt az eredeti pont, a tükörképe A' lesz)

Minél közelebb van a pont a középponthez, annál közelebb lesz a tükörképe is

Szakaszok tükrözése: A szakasz két végpontját tükrözzük, majd összekötjük ezeket

Félegyenesek tükrözése: Kiválasztunk egy tetszőleges pontot a félegyenesen, ezt és a félegyenes kezdőpontját tükrözzük, majd összekötjük őket, az összekötésnél tovább fogjuk húzni a vonalat

Egyenesek tükrözése: Kiválasztunk két tetszőleges pontot az egyenesen, ezeket tükrözzük, a pontok tükörképeit összekötjük meghosszabbítva

Sokszögek tükrözése: A sokszög minden pontját tükrözzük, majd ezeket a megfelelő sorrendben összekötjük (ugyanolyan sorrendben, mint az eredeti alakzat esetén)

Kör tükrözése: A kör középpontját tükrözzük, a körzönket beleszúrjuk az eredeti kör középpontjába, kinyitjuk sugárnyíra, a tükörkép középpontjába beleszúrjuk, és körzünk

Középpontos tükrözés speciális esetei

Pont: Ha a pont a középponton van, akkor a pont és a tükörképe megegyezik egymással

Szakasz: Ha a szakasz átmegy a középponton, és a felezőpontja egybeesik középponttal, akkor a szakasz és a tükörképe megegyezik egymással

Szakasz: Ha a szakasz egyik végpontja a középponton van, akkor csak a másik végpontját kell tükrözni

Szakasz: Ha a szakasz nincs rajta a középponton, akkor a szakasz és a tükörképe párhuzamos lesz egymással, de a pontok felcserélődnek

Egyenes: Ha az egyenes nem megy át a középponton, akkor az egyenes és a tükörképe párhuzamos lesz egymással

Egyenes: Ha az egyenes átmegy a középponton, akkor az egyenes és a tükörképe megegyezik egymással

Középpontosan szimmetrikus sokszögek: Ha a sokszög úgy helyezkedik el, hogy a középpontja (átlók metszéspontja) egybeesik a szimmetriaközépponttal, akkor a sokszög és a tükörképe megegyezik egymással

Kör: Ha a kör középpontja egybeesik a szimmetriaközépponttal, akkor a kör és a tükörképe megegyezik egymással

Kör: Ha a körvonalon van a szimmetriaközéppont, akkor a tükörkép ugyanúgy át fog menni a középponton, és a középpontban fogja érinteni az eredeti kört

Kör: Ha a szimmetriaközéppont a körvonalon belül van, akkor körnek és a tükörképének két metszéspontja lesz

Középpontos tükrözés tulajdonságai

Egyenestartó: Egyenes képe egyenes

Távolságtartó: A szakaszok hossza nem változik a tükrözés során

Szögtartó: A szögek nagysága nem változik a tükrözés során

Körtartó: Kör tükörképe is kör lesz

Egybevágósági transzformáció: Az alakzat és a tükörképe egybevágóak lesznek egymással (ugyanolyanok)

Egybevágóság jele: \cong

Megfordítható transzformáció: Ha a tükrözés során A pont tükörképe A' lett, akkor A' tükörképe A lesz

Nem változtatja meg a körüljárási irányt: Ha az eredeti alakzat esetén az óramutató járásával **megegyező** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörkép esetén is az óramutató járásával **megegyező** irányba fogjuk összekötni a pontokat (Ha az eredeti alakzatnál az óramutató járásával **ellentétes** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a tükörképénél is az óramutató járásával **ellentétes** irányba fogjuk összekötni a pontokat)

Tengelyesen szimmetrikus sokszögek vs középpontosan szimmetrikus sokszögek

		Tengelyesen	Középpontosan
Háromszögek	Általános	✗	✗
	Egyenlő szárú	✓	✗
	Szabályos	✓	✗
Négyszögek	Általános	✗	✗
	Általános trapéz	✗	✗
	Húrtrapéz	✓	✗
	Derékszögű trapéz	✗	✗
	Paralelogramma	✗	✓
	Rombusz	✓	✓
	Deltoid	✓	✗
	Téglalap	✓	✓
Négyzet	✓	✓	
Szabályos sokszögek	Páratlan csúcsú	✓	✗
	Páros csúcsú	✓	✓
Kör		✓	✓

Eltolás

Az eltolás egy geometriai transzformáció, ugyanúgy, mint a tükrözés

Eltolást vektorok segítségével tudunk megadni

Bármit is szeretnénk eltolni (félegyenes, egyenes, szakasz, alakzat, síkidom, sokszög), mindig a pontokat toljuk el, a pontok képeit pedig a megfelelő sorrendben összekötjük

Pontok eltolása: A pontot a megadott vektorral eltoljuk jobbra/balra, valamint felfelé/lefelé

A pont eltolási utáni képét ' -vel jelöljük (Ha A pont volt az eredeti pont, az eltolt kép A' lesz)

Minél kisebb az eltolás vektora, annál közelebb lesz az eredeti pont és a pont képe

Szakaszok eltolása: A szakasz két végpontját eltoljuk, majd összekötjük ezeket

Félegyenesek eltolása: Kiválasztunk egy tetszőleges pontot a félegyenesen, ezt és a félegyenes kezdőpontját eltoljuk, majd összekötjük őket, az összekötésnél pedig tovább húzzuk a vonalat

Egyenesek eltolása: Kiválasztunk két tetszőleges pontot az egyenesen, ezeket eltoljuk, a pontok képeit összekötjük meghosszabbítva

Sokszögek eltolása: A sokszög minden csúcsát eltoljuk, majd ezeket a megfelelő sorrendben összekötjük (ugyanolyan sorrendben, mint az eredeti alakzat esetén)

Kör eltolása: A kör középpontját eltoljuk, a körzónket beleszúrjuk az eredeti kör középpontjába, kinyitjuk sugárnyira, az eltolt középpontba beleszúrjuk és körzünk

Eltolás tulajdonságai

Egyenestartó: Egyenes képe egyenes

Távolságtartó: A szakaszok hossza nem változik a eltolás során

Szögtartó: A szögek nagysága nem változik a eltolás során

Körtartó: Kör eltolt képe is kör lesz

Egybevágósági transzformáció: Az alakzat és az eltolt képe egybevágóak egymással (ugyanolyanok)

Egybevágóság jele: \cong

Eltolás során nincs fix pont (mint tükrözések során volt), hacsak az eltolás vektora nem nullvektor

Nem változtatja meg a körüljárási irányt: Ha az eredeti alakzat esetén az óramutató járásával **megegyező** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor az eltolt esetén is az óramutató járásával **megegyező** irányba fogjuk összekötni a pontokat (Ha az eredeti alakzatnál az óramutató járásával **ellentétes** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor az eltolt képnél is az óramutató járásával **ellentétes** irányba fogjuk összekötni a pontokat)

Forgatás

A forgatás egy geometriai transzformáció, ugyanúgy, mint a tükrözés vagy az eltolás

Forgatást egy forgatási pont és egy forgatási szög segítségével tudunk megadni

Bármit is szeretnénk forgatni (félegyenes, egyenes, szakasz, alakzat, síkidom, sokszög), mindig a pontokat forgatjuk el, a pontok képeit pedig a megfelelő sorrendben összekötjük

Pontok forgatása: A pontot és a forgatási pontot összekötjük egymással, a körzőnket beleszúrjuk a forgatási pontba, és kinyitjuk akkorára, mint a forgatási pont és a pont távolsága, majd körzünk ezzel a körívvel, ezután a forgatási szöget vagy megszerkesztjük, vagy szögmérő segítségével felmérjük, és ahol a körív és a megszerkesztett/felmért egyenes metszi egymást, ott lesz a pont elforgatott képe

A pont elforgatott képét ' -vel jelöljük (Ha A pont volt az eredeti pont az elforgatott kép A' lesz)

Szakaszok forgatása: A szakasz két végpontját elforgatjuk, majd összekötjük ezeket

Félegyenesek forgatása: Kiválasztunk egy tetszőleges pontot a félegyenesen, ezt és a félegyenes kezdőpontját elforgatjuk, majd összekötjük őket, az összekötésnél pedig tovább húzzuk a vonalat

Egyenesek forgatása: Kiválasztunk két tetszőleges pontot az egyenesen, ezeket elforgatjuk, és a pontok képeit összekötjük meghosszabbítva

Sokszögek forgatása: A sokszög minden csúcsát elforgatjuk, majd ezeket a megfelelő sorrendben összekötjük (ugyanolyan sorrendben, mint az eredeti alakzat esetén)

Kör forgatása: A kör középpontját elforgatjuk, a körzónket beleszúrjuk az eredeti kör középpontjába, kinyitjuk sugárnyíra, majd az elforgatott középpontba beleszúrjuk, és körzünk

Ha a kör középpontja a forgatási pont, akkor a kör és az elforgatott képe megegyezik egymással

Forgatás tulajdonságai

Egyenestartó: Egyenes képe egyenes

Távolságtartó: A szakaszok hossza nem változik a forgatás során

Szögtartó: A szögek nagysága nem változik a forgatás során

Körtartó: Kör elforgatott képe is kör

Egybevágósági transzformáció: Az alakzat és az elforgatott képe egybevágóak egymással (ugyanolyanok)

Egybevágóság jele: \cong

Forgatás során egy fix pont van, ami a forgatási pont (Ha az eredeti pont és a forgatási pont egybeesnek, akkor az eredeti pont és a forgatott pont megegyezik egymással)

Nem változtatja meg a körüljárási irányt: Ha az eredeti alakzat esetén az óramutató járásával **megegyező** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor az elforgatott kép esetén is az óramutató járásával **megegyező** irányba fogjuk összekötni a pontokat (Ha az eredeti alakzatnál az óramutató járásával **ellentétes** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor az elforgatott képnél is az óramutató járásával **ellentétes** irányba fogjuk összekötni a pontokat)

Geometriai transzformációk összefoglalása

	Tengelyes tükrözés	Középpontos tükrözés	Eltolás	Elforgatás
Egyenestartó	✓	✓	✓	✓
Távolságtartó	✓	✓	✓	✓
Szögtartó	✓	✓	✓	✓
Körtartó	✓	✓	✓	✓
Egybevágósági transzformáció	✓	✓	✓	✓
Körüljárási irány	Megváltoztatja	Nem változtatja meg	Nem változtatja meg	Nem változtatja meg

Kicsinyítés/Nagyítás

Kicsinyítés/Nagyítás esetén középpontos tükrözéshez hasonló lépéseket csinálunk

Mi az eltérő a középpontos tükrözéshez képest?

A pontot összekötjük a középponttal, de nem tovább húzva hosszabbítjuk meg, hanem a másik irányba

Nem ugyanazzal a körívvel körzünk, mint a középpont és a pont távolsága, hanem nagyobb (nagyítás), vagy kisebbel (kicsinyítés)

Pontok távolságának kicsinyítése/nagyítása: A pontot és a középpontot összekötjük egymással, a pont felé meghosszabbítjuk az egyenest, majd kinyitjuk nagyobbra, vagy kisebbre, mint a középpont és a pont távolsága (Pl.: Ha 2-szeresre szeretnénk nagyítani és a középpont és pont távolsága 2 cm volt, akkor 4 cm -nyire nyitjuk ki a körzőnket, ha 2-szeresre szeretnénk kicsinyíteni, akkor 1 cm -re nyitjuk ki a körzőnket)

A pont kicsinyített/nagyított képét ' -vel jelöljük (Ha A pont volt az eredeti pont, akkor a kicsinyített/nagyított képe A' lesz)

Egyenesek és félegyenesek esetén nem szoktunk kicsinyíteni/nagyítani, mert a végtelenbe mennek

Szakaszok kicsinyítése/nagyítása: A szakasz két végpontját kicsinyítjük/nagyítjuk, majd összekötjük ezeket

Sokszögek kicsinyítése/nagyítása: A sokszög minden pontját kicsinyítjük/nagyítjuk, majd ezeket a megfelelő sorrendben összekötjük (ugyanolyan sorrendben, mint az eredeti alakzat esetén)

Kör kicsinyítése/nagyítása: A kör középpontját kicsinyítjük/nagyítjuk, a körzőnket kinyitjuk akkorára, amekkorára szeretnénk kicsinyíteni/nagyítani, a kép középpontjába beleszúrjuk és körzünk

Ha a kör középpontja a középponttal egybeesik, akkor kinyitjuk akkorára a körzőnket, amekkorára kicsinyíteni/nagyítani szeretnénk a kört, és körzünk vele

Hasonlóság (Középpontos hasonlóság)

Két alakzat hasonló, ha ugyanolyan alakúak (formájúak), csak az egyik nagyobb, mint a másik

Két alakzat akkor hasonló, ha szögeik ugyanakkorák, oldalaik aránya pedig minden oldal esetén ugyanannyi

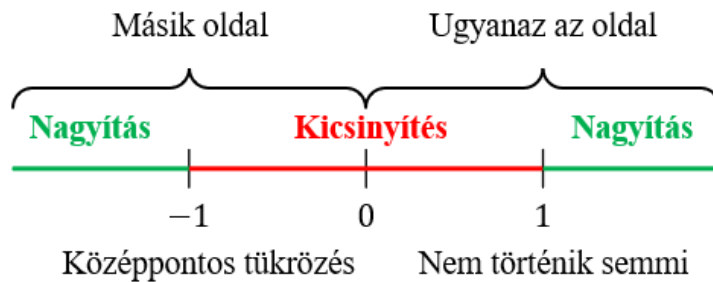
Hasonlóság jele: \sim (Pl.: $ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta$)

A hasonlóság arányát λ (lambda)-val szoktuk jelölni

$$\lambda = \frac{KA'}{KA}$$

Ha λ értéke **pozitív**, akkor a kép a középpont **azon oldalára fog kerülni, ahol a pont van**

Ha λ értéke **negatív**, akkor a kép a középpont **másik oldalára fog kerülni**



λ nevezetes értékei:

- $\lambda = 0$: Minden pont a K pontba lesz
- $\lambda = 1$: Nem történik semmi (1-szeres nagyítás)
- $\lambda = -1$: Középpontos tükrözés (A két alakzat egybevágó)
- $\lambda = 2$: 2-szeres nagyítás (a kép marad ugyanazon az oldalon, mint az alakzat)
- $\lambda = \frac{1}{2}$: 2-szeres kicsinyítés (a kép marad ugyanazon az oldalon, mint az alakzat)
- $\lambda = -2$: 2-szeres nagyítás (a kép a másik oldalra kerül)
- $\lambda = -\frac{1}{2}$: 2-szeres kicsinyítés (a kép a másik oldalra kerül)

Hasonlóság tulajdonságai

Egyenestartó: Egyenes képe egyenes

Nem távolságtartó: A szakaszok hossza nem egyezik meg

Szögtartó: A szögek nagysága nem változik a kicsinyítés/nagyítás során

Körtartó: Kör kicsinyített/nagyított képe is kör lesz

Aránytartó: Két pont távolsága és a két képpont távolságának aránya ugyanannyi

Nem egybevágósági transzformáció: Az alakzat és a kicsinyített/nagyított képe nem egybevágóak egymással (csak $\lambda = 1$ esetén)

Kicsinyítés/Nagyítás során egy fix pont van, ami a középpont (Ha az eredeti pont és a középpont egybeesnek, akkor az eredeti pont és a kicsinyített/nagyított pont képe megegyezik egymással)

Nem változtatja meg a körüljárási irányt: Ha az eredeti alakzat esetén az óramutató járásával **megegyező** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a kicsinyített/nagyított kép esetén is az óramutató járásával **megegyező** irányba fogjuk összekötni a pontokat (Ha az eredeti alakzatnál az óramutató járásával **ellentétes** irányba kötöttük össze a pontokat, akkor a kicsinyített/nagyított képnél is az óramutató járásával **ellentétes** irányba fogjuk összekötni a pontokat)

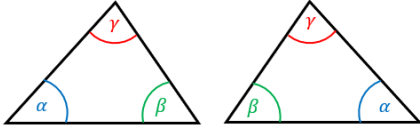
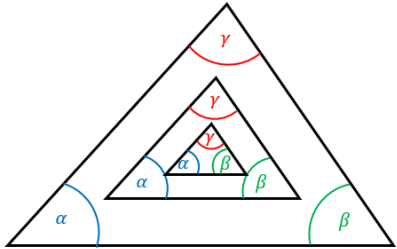
Háromszögek hasonlósága

Hasonlóság jele: \sim (Pl.: $ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta$)

Két háromszög hasonló, ha a két háromszög

- 1) Mind 3 oldalának aránya egyenlő ($a: a' = b: b' = c: c'$)
- 2) 2 oldalának aránya és az általuk bezárt szög egyenlőek ($a: a' = b: b'$ és $\gamma = \gamma'$)
- 3) Mind 3 szöge (2 szöge) egyenlő ($\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$)
- 4) 2 oldalának aránya és a hosszabb oldallal szemben lévő szög egyenlő
($a: a' = b: b'$ és $\alpha = \alpha'$) ($a > b$)

Egybevágóság vs hasonlóság háromszögek esetén

	Egybevágóság	Hasonlóság
Jelentése (konyhanyelv)	Ugyanaz a két háromszög, csak el vannak tolvá egymástól, vagy meg vannak tükrözve, vagy el vannak forgatva	Az egyik háromszög a másik háromszög kicsinyített/nagyított verziója
Tulajdonságok	Mind a két háromszög esetén: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Mind a 3 oldal ugyanolyan hosszú ➤ Mind a 3 szög ugyanakkora 	Mind a két háromszög esetén: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Mind a 3 oldal aránya megegyezik ➤ Mind a 3 szög ugyanakkora
Példa	 <p>Two congruent triangles are shown side-by-side. Each triangle has three interior angles labeled with Greek letters: α (blue), β (green), and γ (red). The triangles are identical in shape and size, illustrating congruence.</p>	 <p>A large triangle is shown with its three interior angles labeled α (blue), β (green), and γ (red). Inside it, a smaller triangle is inscribed, also with its three interior angles labeled α (blue), β (green), and γ (red). This illustrates similarity, as the smaller triangle is a scaled-down version of the larger one.</p>