

# Mérlegelv, egyenletek

A nyitott mondatokat mostantól egyenleteknek fogjuk hívni

A korábbi jelölések helyett az ismeretlenek  $x$ -ek és  $y$ -ok lesznek

Az egyenleteket mérlegelv segítségével fogjuk megoldani

Mérlegelv: A neve beszédes, mérlegre kell gondolni

A mérleg akkor lesz egyensúlyban, ha mind a két serpenyővel ugyanazt csináljuk (Ha mindkét serpenyőből 1-1 ugyanakkora súlyú almát veszünk el, akkor marad egyensúlyban)

Az egyenlőségjel (=) jelképezi azt, hogy a mérleg egyensúlyban van, egyenlőtlenségek esetén a mérleg nincs egyensúlyban

Hogy oldjuk meg az egyenleteket?

- A célunk az, hogy a végén az egyik oldalon csak  $x$ , a másik oldalon pedig egy szám legyen, ez lesz az egyenlet megoldása (Pl.:  $x = 3$ )
- A különböző műveleteket mindig az ellentétes művelettel tudjuk eltüntetni (összeadást kivonással, kivonást összeadással, szorzást osztással, osztást szorzással)
- A műveleti sorrend alapján visszafelé fogunk haladni (először az összeadást vagy a kivonást tüntetjük el, utána a szorzást vagy az osztást)
- Az egyenlet megoldás során a két oldal tetszőlegesen bármikor felcserélhető (az eredmény kijöhet  $3 = x$  alakban is, a végén cserélhetünk)

Ha kész az egyenlet megoldása, akkor a végén ellenőrizzük

Ellenőrzésnél a kapott eredményt behelyettesítjük az eredeti egyenletbe, az ismeretlen helyére (ha több  $x$  is van, akkor mindegyik helyre)

Akkor lett jó a számolásunk, ha az egyenlőségjel mind a két oldalán ugyanazt a számot kapjuk (Pl.:  $5 = 5$ )

Ha nem ugyanaz a szám jött ki mind a két oldalon, akkor vagy elszámoltunk valamit az ellenőrzés során, vagy az egyenlet megoldása nem lett jó

## Egyenlet megoldásának a lépései

- **Opcionális lépések (ha van):**

Zárójel felbontása

Törtek eltüntetése (Közös nevezőre hozás és beszorzás a nevezővel)

Összevonás ( $x$ -es kifejezések összevonása az  $x$ -es kifejezésekkel, számok összevonása a számokkal)

➤ **Kötelező lépések:**

Egy oldalra rendezzük az  $x$ -es kifejezéseket (mindegy, hogy melyik oldalra, úgy érdemes rendezni, hogy az  $x$  együtthatója pozitív legyen)

A másik oldalra rendezzük a számokat

Ha van  $x$  előtti együttható, akkor azzal osztunk

Elvégezzük az ellenőrzést (A kapott eredményt visszahelyettesítjük  $x$  helyére az eredeti alakban megadott egyenletbe)

## Szöveges feladatok típusai

### Számjegy felcserélős szöveges feladatok

Feladat szövege: Gondoltam egy kétjegyű számra, aminek az 1. számjegye ...-tal kisebb/nagyobb, mint a 2. számjegye. Ha felcserélem a számjegyeket, akkor az eredeti és a felcserélt szám összege/különbsége ... lesz. Melyik számra gondoltam?

Az eredeti szám egyik számjegyét  $x$ -szel jelöljük

Az, hogy melyiket, ránk van bízva, azt szoktuk ilyenkor  $x$ -szel jelölni, amihez viszonyítjuk a másik számjegyet

Az adatokat táblázatos formában ki is írhatjuk

A felcserélt szám esetén felcseréljük az egyes és tízes helyi értéken álló kifejezéseket

Ezután felírjuk a két számot (a tízesek oszlopban található kifejezést 10-zel fogjuk szorozni)

Becsülhetünk is az egyenlet megoldása előtt (ha az eredeti szám számjegyei között 7 a különbség, akkor nagyjából 60-70 lesz a különbség az eredeti és a felcserélt számok között, így a számok lehetnek pl.:  $18 \leftrightarrow 81$ ,  $29 \leftrightarrow 92$ )

A feladat szövege alapján felírunk egy egyenletet

Megoldjuk az egyenletet, így megkapjuk azt a számjegyet, amit  $x$ -szel jelöltünk

Meghatározzuk a másik számjegyet is, így meglesz az eredeti szám, valamint a felcserélt szám is

Ellenőrizzük a számolásunkat a feladat szövege alapján

$x$ -re mindig **nem negatív** (0 is lehet), **egyjegyű**, **egész számot** kell kapnunk ( $x$  lehet: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)

Végén szöveges válasz

## Életkoros szöveges feladatok

Feladat szereplői: Anya, Apa, Gyerek, Gyerekek (testvérek), vagy barátok

Feladat szövege: Gábor most ... évvel fiatalabb, mint az anyukája/apukája, ...év múlva/... évvel ezelőtt az anyukája/apukája ...-szor annyi idős volt, mint Gábor. Hány éves most Gábor? Hány éves most az anyukája/apukája?

Az egyik szereplő (Gábor, anya, apa) egyik állapotbeli életkorát (Jelenlegi, múltbeli, jövőbeli)  $x$ -szel fogjuk jelölni

Erre nincs semmilyen szabály, hogy melyiket jelöljük  $x$ -szel, de ha van rá mód, akkor azt jelöljük  $x$ -szel, amire a feladat szövege rákérdez, de van, hogy egyszerűbb mást  $x$ -szel jelölni, majd a végén meghatározni a kérdéses értéket, mindig azt az értéket jelöljük  $x$ -szel, amiből a legkönnyebben ki lehet fejezni a többi életkort, és amivel a legegyszerűbb az egyenlet felírása és megoldása (érdemes elkerülni a törteket)

Az adatokat táblázatos formában ki is írhatjuk

... évvel ezelőtti állapotnál a ... értékét kivonjuk a jelenlegi kifejezésekből (3 évvel ezelőttnél 3-at vonunk ki a mostani értékekből)

... év múlva lévő állapotnál a ... értékét hozzáadjuk a jelenlegi kifejezésekhez (5 év múlva lévőnél 5-öt adunk hozzá a mostani értékekhez)

A feladat szövege alapján felírunk egy egyenletet

Megoldjuk az egyenletet, így megkapjuk azt az életkort, amit  $x$ -szel jelöltünk, fontos, hogy ez nem biztos, hogy az az életkor lesz, amire a feladat szövege rákérdezett, tehát mindig nézzük meg, hogy mit jelöltünk  $x$ -szel, és mire kérdezett rá a feladat szövege, ha nem azt jelöltük  $x$ -szel, ami a kérdés volt, akkor számoljuk ki azt, amit a feladat kérdezett

Az életkorra **pozitív, egész számot** kell, hogy kapjunk (reálisat is)

Ellenőrizzük a számolásunkat a feladat szövege alapján

Végén szöveges válasz

A táblázatban mindegy, hogy a sorokba vagy az oszlopokba kerülnek a szereplők, valamint az állapotok, de úgy szoktuk megrajzolni a táblázatot, hogy az oszlopokba kerülnek a szereplők, a sorokba pedig az állapotok

A múltbeli állapotoknál a szülők többször annyi idősök lesznek, mint a gyerekek, a jelenlegi állapothoz képest, a jövőbeli állapotoknál kevesebbszer annyi idősök lesznek, mint a gyerekek, a jelenlegi állapothoz képest

Általában 2 állapot szokott lenni (Jelenlegi és múltbeli/jövőbeli), de lehet 3 is (Jelenlegi, múltbeli és jövőbeli)

Általában 2 szereplő szokott lenni (Gyerek, anya/apa), de lehet 3 is (Gyerek, anya, apa)

Szereplők esetén opcionálisan lehet egy Összesen oszlop is, erre csak akkor van szükség, ha a feladat szövegében van erre utalás (Gábor most hatod annyi idős, mint amennyi idős volt 4 évvel ezelőtt az apukájával összesen)

Végén érdemes kiszámolni azt is, hogy hány éves volt az anyuka/apuka, amikor a gyerek született

Ezt úgy tudjuk kiszámolni, hogy az anyuka/apuka jelenlegi életkorából kivonjuk a gyerek jelenlegi életkorát

Azért érdemes ezt megtenni, hogy lássuk, ha nagyon furcsa eredmény jött ki (Pl.: Gábor anyukája 6 éves volt, mikor Gábor született)

Az ilyen feladatok esetén mindig reális értékek szoktak kijönni (Pl.: Gábor anyukája 18 – 40 éves volt, mikor Gábor született)

## Keveréses szöveges feladatok

Olyan szöveges feladatok, amikor két dolgot összekeverünk, és így kapunk egy keveréket

Amiket összekeverhetünk:

- Különböző árú termékek (1. osztályú (drágább), 2. osztályú (olcsóbb))
- Különböző erősségű oldatok/ecetek/alkoholok/anyagok (10%-os oldat, 40%-os oldat)

Ezeknél a feladatoknál több dolgot is kérdezhet a feladat szövege:

- Hány %-os lesz az oldat? vagy Mennyibe fog kerülni 1 kg a keverékből?
- Mennyi legyen a különböző anyagokból/termékekből, hogy a keverék ... %-os/Ft/kg árú legyen?
- Hány %-os legyen az egyik összetevő, hogy a keverék ...%-os legyen?

$x$ -szel általában a különböző dolgok mennyiségeit fogjuk jelölni, de jelölhetünk mást is vele (keverék %-át)

Nem mindig azt fogjuk  $x$ -szel jelölni, ami a kérdésben szerepel, van, hogy egyszerűbb mást  $x$ -szel jelölni, majd a végén kiszámolni azt, amire a feladat rákérdezett

Az adatokat táblázatos formában ki is írhatjuk

A feladat szövege alapján felírunk egy egyenletet

Megoldjuk az egyenletet, így megkapjuk azt, amit  $x$ -szel jelöltünk, fontos, hogy ez nem biztos, hogy az, amire a feladat szövege rákérdezett, tehát mindig nézzük meg, hogy mit jelöltünk  $x$ -szel, és mire kérdezett rá a feladat szövege, ha nem azt jelöltük  $x$ -szel, ami a kérdés volt, akkor számoljuk ki azt, amit a feladat kérdezett

Az  $x$  értékére **pozitív** számot kell, hogy kapjunk (Nem muszáj, hogy egész legyen)

Ellenőrizzük a számolásunkat a feladat szövege alapján

Végén szöveges válasz

A táblázatban mindegy, hogy a sorokba vagy az oszlopokba kerülnek az anyagok/termékek, valamint a mennyiségek/%-ok/egységárak és a keverék mennyisége/összes ár, de úgy szoktuk megrajzolni a táblázatot, hogy az oszlopokba kerülnek az anyagok/termékek, a sorokba pedig a többi

Azoknál a feladatoknál, ahol termékeket keverünk össze, a mennyiség *kg*-ban van megadva (a legtöbbször), az egységárak pedig *Ft/kg*-ban, ahol valamilyen koncentrációjú folyadékokat keverünk össze, ott az űrtartalom literben van megadva, a koncentráció pedig %-ban

Ha ugyanannyi van mind a két anyagból/termékből, akkor a koncentráció/keverék egységára a két koncentráció/egységár között félúton lesz (Ha 4 liter van a 10%-os anyagból és 4 liter van a 30%-os anyagból is, akkor a keverék koncentrációja 20%-os lesz, ha az olcsóbb termék 2000 *Ft/kg* és 3 *kg* van belőle, a drágább termék 3000 *Ft/kg* és szintén 3 *kg* van belőle, akkor a keverék egységára 2500 *Ft/kg* lesz)

Az előző eset ritkán fordul elő, de az oldat koncentrációja/a keverék egységára arányos a mennyiségével:

- Ha a kisebb %-ú anyagból van több, akkor az oldat koncentrációja a kisebb %-hoz lesz közelebb (Ha 10 liter van a 10%-os anyagból és 2 liter van a 30%-os anyagból is, akkor a keverék koncentrációja 10%-hoz lesz közelebb)
- Ha a nagyobb %-ú anyagból van több, akkor az oldat koncentrációja a nagyobb %-hoz lesz közelebb (Ha 5 liter van a 10%-os anyagból és 6 liter van a 30%-os anyagból is, akkor a keverék koncentrációja 30%-hoz lesz közelebb, de a 20%-hoz képest csak egy picit)

A koncentráció/egységár soha nem lehet kisebb a kisebb koncentrációnál/egységárnál, és soha nem lehet nagyobb a nagyobb koncentrációnál/egységárnál, mindig a kettő közé kell esnie

Ezt a végén ellenőrzésre használhatjuk

A táblázatban mindig végig kell gondolnunk, hogy melyik sorokat/oszlopokat lehet összeadni és melyikeket nem, valamint melyikeket lehet összeszorozni egymással és melyikeket nem

A mennyiségeket mindig össze tudjuk adni (Ha az egyik termékből van 2 *kg*, a másiktól van 3 *kg*, akkor a keverék 5 *kg* lesz, és ez nemcsak tömegre igaz, hanem űrtartalomra is)

A oldott anyag mennyiségét/az összes árat is össze tudjuk adni

A koncentrációkat és egységárakat sosem adhatjuk össze (Ha az egyik anyag 50%-os, a másik 60%-os, akkor a keverék nem lehet 110%-os, ha az egyik termék egységára 2000 *Ft/kg*, a másik terméké 3000 *Ft/kg*, akkor a keverék egységára nem lehet 5000 *Ft/kg*)

Az oldott anyag mennyisége az anyag mennyiségének és koncentrációjának szorzatából jön ki

Koncentráció esetén fontos, hogy a %-os értékeket el kell osztani 100-zal, és utána tudunk szorozni vele

Az összes ár a mennyiség és az egységár szorzatából jön ki

	Olcsóbb	Drágább	Keverék
Mennyiség (kg)	$x$	$y$	$x + y$
Egységár (Ft/kg)	200	300	$z$
Ár összesen (Ft)	$200x$	$300y$	$200x + 300y$

$$200x + 300y = z \cdot (x + y)$$

	1. anyag	2. anyag	Keverék
Mennyiség (liter)	$x$	$y$	$x + y$
Koncentráció (%)	10%	30%	$z\%$
Oldott anyag (liter)	$0,1x$	$0,3y$	$0,1x + 0,3y$

$$0,1x + 0,3y = \frac{z}{100} \cdot (x + y)$$

## Egy kis fizika: Sebesség, út, idő

A matematikában néha előfordulnak fizikás feladatok is (legtöbbször sebesség, út, idő típusúak)

Ezek megoldhatóak "fizikás módon" átrendezés segítségével, de megoldhatóak "matekos módon" is egyenes arányosságok segítségével

Sebesség:  $v$  (velocity) [ $\frac{m}{s}, \frac{km}{h}$ ]      Út:  $s$  [ $m, km$ ]    Idő:  $t$  (time) [ $s, h$ ]

Sebesség, út, idő esetén az alábbi alap összefüggést alkalmazzuk:  $v = \frac{s}{t}$

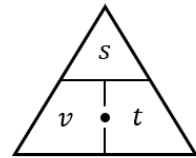
Szövegesen:  $Sebesség = \frac{Út}{Idő}$

Ha nem a sebességre vagyunk kíváncsiak, hanem az útra, vagy az időre, akkor ezt átrendezzük, de használhatunk számár háromszöget is

Számár háromszög működése: Amelyikre kíváncsiak vagyunk a 3 közül, azt letakarjuk, és a másik 2-vel végezzük el a megfelelő műveletet

$$s = v \cdot t$$

$$t = \frac{s}{v}$$



Fizikás feladatok esetén, ha nem vagyunk biztosak a képletben, akkor a mértékegységek is segítenek:

$$v \left[ \frac{m}{s} \right] = \frac{s [m]}{t [s]} \quad \text{vagy} \quad v \left[ \frac{km}{h} \right] = \frac{s [km]}{t [h]}$$

Fontos, hogy a mértékegységek ugyanolyanok legyenek ( $\frac{m}{s}, m, s$  vagy  $\frac{km}{h}, km, h$ )

## Munkás feladatok

Olyan feladatok, amikor 2 vagy több ember csinál valamilyen munkát (termet díszít, kertet ás, építkeznek, takarít stb.)

Ezen feladatok hasonlítanak a fordított arányosság feladatokhoz (valamilyen szinten azok is), de fordított arányosságnál minden ember ugyanolyan gyorsan dolgozik, itt pedig különböző sebességgel is dolgozhatnak

Az adatokat táblázatos formában szoktuk kiírni

A táblázatnak 2 oszlopa lesz 2 ember esetén, több ember esetén pedig annyi, amennyi ember van, ide az emberek nevei kerülnek

Sorból mindig 3 lesz (a 3-ból 1 kihagyható), ide kerül, hogy:

- Egyedül mennyi idő alatt végezne
- 1 óra alatt a munka hányad részével végezne (ez hagyható ki), ide kerül az első sor reciproka
- $x$  óra alatt a munka hányad részével végezne, itt a számlálóba 1 helyett  $x$  kerül

Egyenlet felírása: Az " $x$  óra alatt" sor összege 1 kell, hogy legyen (az 1 azt jelenti, hogy elvégzik a teljes munkát)

A kapott végeredménynek mindig kisebbnek kell lennie, mint amennyi idő alatt egyedül végeznének

## Egyenlőtlenségek

Egyenlőtlenségek esetén az egyenlőségjel (=) helyett reláció jelek ( $>$ ,  $\geq$ ,  $<$ ,  $\leq$ ) lesznek

Egyenlőtlenségeket is mérlegelvé segítségével fogjuk megoldani, úgy, mint az egyenleteket

Amerre mutat a relációjel, az az oldal lesz a nagyobb ( $<$  esetén a jobb oldal lesz a nagyobb,  $>$  esetén a bal oldal)

Az egyenlőtlenség jobb és bal oldalát nem cserélhetjük fel tetszőlegesen, mint egyenlet esetén (vagy ha felcseréljük, akkor meg kell fordítani a reláció jelet)

Egy dologra kell nagyon figyelni egyenlőtlenség esetén, fontos, hogy, ha **negatív számmal szorzunk vagy osztunk, akkor megfordul a relációjel** (ezért is érdemes úgy rendezni a megoldás során, hogy  $x$  előtt pozitív együttható legyen, és ezt elkerüljük)

Egyenlőtlenségnek nem egy megoldása lesz, hanem végtelen sok (Pl.:  $x < 6$  Megoldások: 5, 4, 3, 2, 1, 0,  $-1$ ,  $-2\dots$  (nem csak egész számok))

Ha kész az egyenlőtlenség megoldása, akkor a végén ellenőrizzük

Ellenőrizni többféle módon is lehet:

- A kapott számot behelyettesítjük  $x$  helyére az eredeti alakban, a reláció jelet kicseréljük egyenlőség jelre, és úgy csinálunk mindent, mint egyenlet esetén (ha a végén mind a két oldalon ugyanaz jön ki jól oldottuk meg az egyenlőtlenséget)
- Behelyettesítünk egy kisebb vagy nagyobb megoldást, mint az eredmény (attól függően, hogy merre mutat a reláció jel)