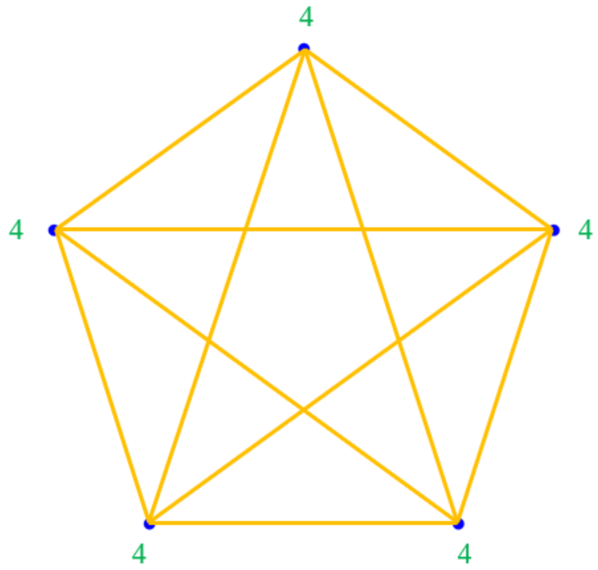
Halmazok

Gráfok részei



Csúcs (pont)

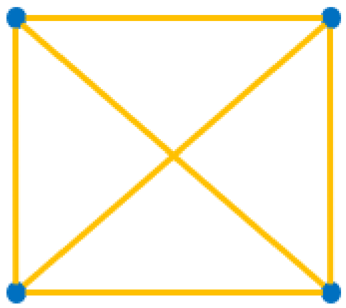
Él: A csúcsokat összekötő vonalak

Fokszám: A csúcsból kiinduló élek száma

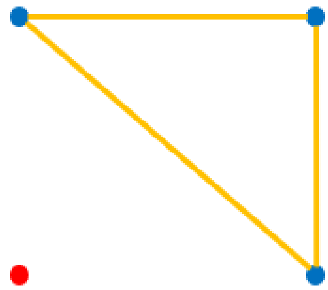
$Fokszámok\ összege = 2 \cdot élek\ száma$

$n\ csúcsú\ gráf\ éleinek\ a\ száma$: $\boldsymbol{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}$

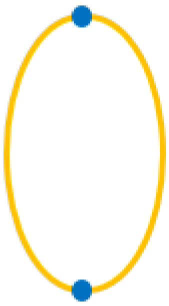
Gráfok típusai



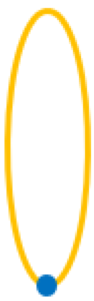
Teljes gráf: Ha bármely két pontja össze van kötve egy éllel.



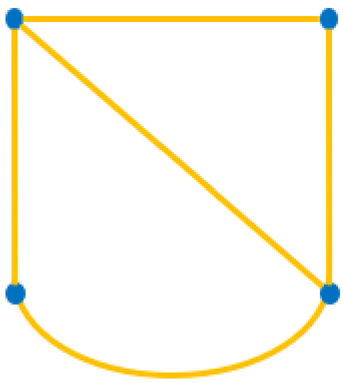
Izolált pont: Ha egy pontban nincs él.



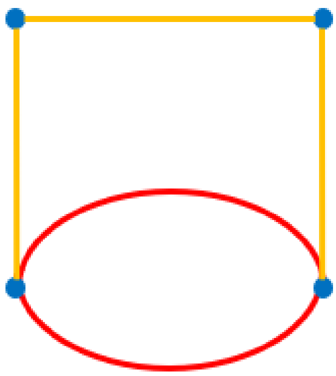
Többszörös él: Ha két pont között egynél több élt húzunk.



Hurok: Olyan él, amelynek a két végpontja ugyanaz a pont.

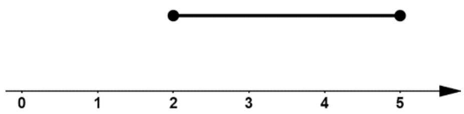
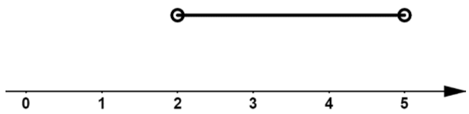
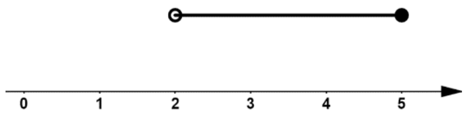
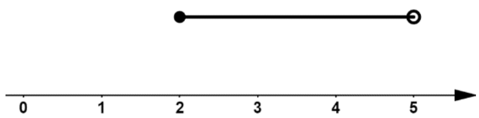


Egyszerű gráf: Ha nincs benne hurok vagy többszörös él.

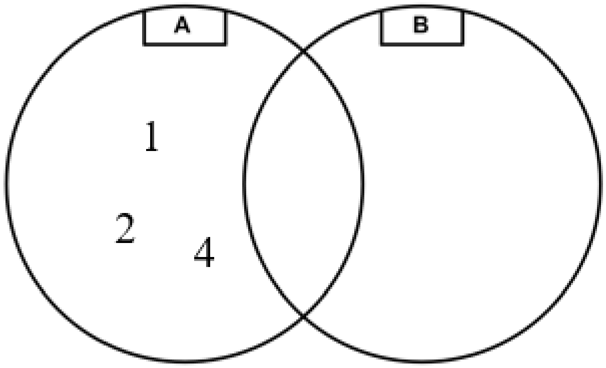


Nem egyszerű gráf: Ha van benne hurok vagy többszörös él.

Számok jelölése a számegyenesen

Algebrai jelölés	Halmaz jelölés	Jelölés a számegyenesen
$2 \leq x \leq 5$ Első elem: 2 Utolsó elem: 5	$[2; 5]$	
$2 < x < 5$ Első elem: 2,0001 Utolsó elem: 4,9999	$]2; 5[$	
$2 < x \leq 5$ Első elem: 2,0001 Utolsó elem: 5	$]2; 5]$	
$2 \leq x < 5$ Első elem: 2 Utolsó elem: 4,9999	$[2; 5[$	

Halmazok típusai



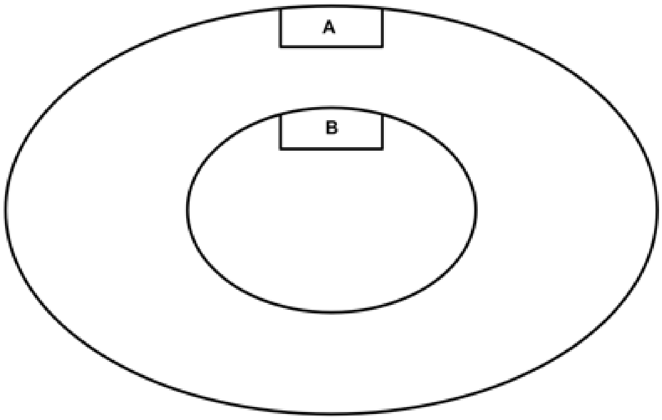
$A = \{1; 2; 4\}$

$B = \{\emptyset\}$

B üres halmaz

$B = \{\emptyset\}$

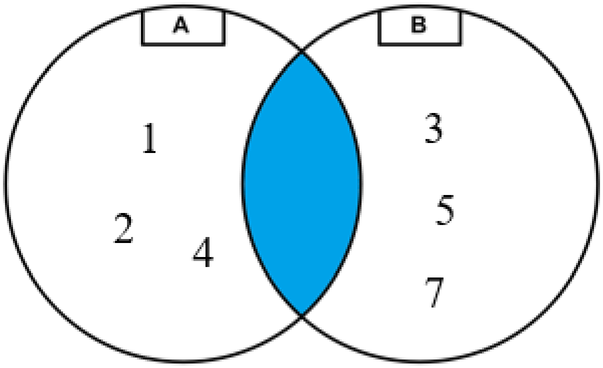
Üres halmaz jele: $\emptyset$



Részhalmaz

$B\ halmaz\ A\ részhalmaza$

Részhalmaz jele: $B \subseteq A$



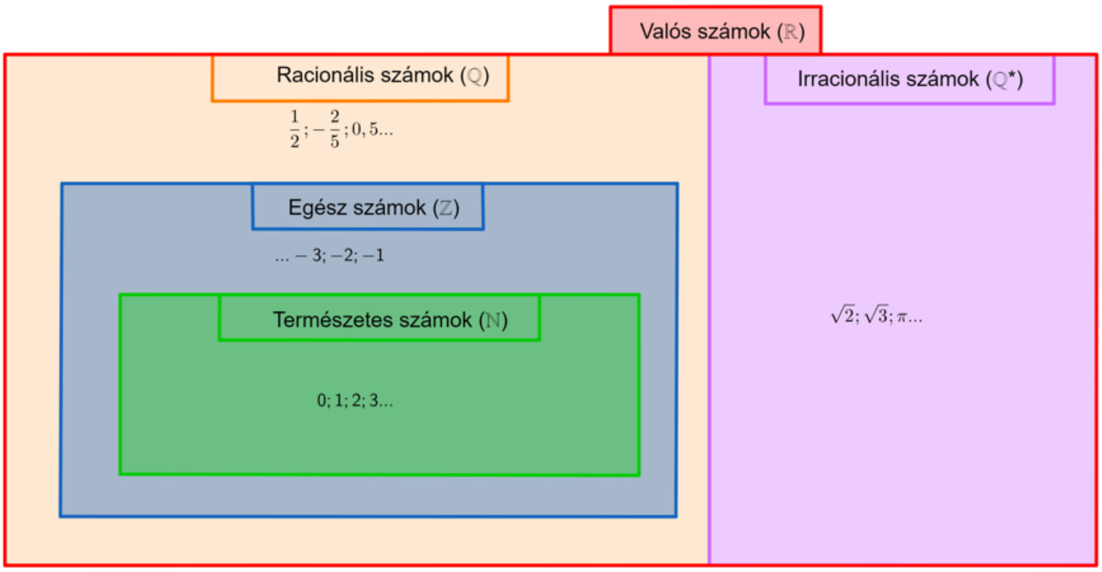
$A = \{1; 2; 4\}$

$B = \{3; 5; 7\}$

A és B halmaz diszjunkt

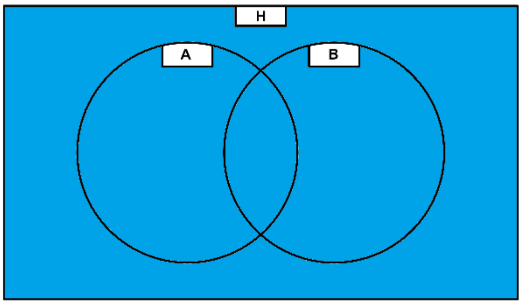
Két halmaz diszjunkt, ha nincs közös elemük (nincs semmi a közös részben (metszetben)).

Számhalmazok

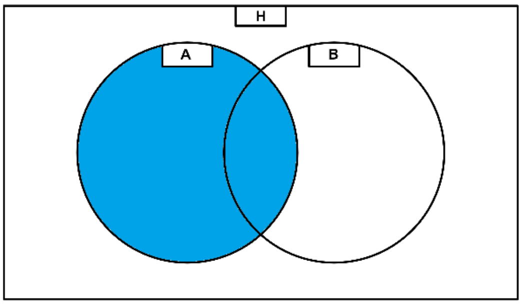


Halmaz műveletek 2 halmaz esetén

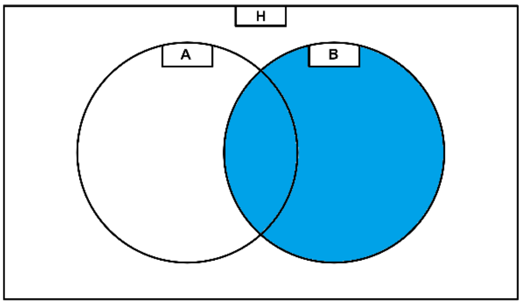
Alaphalmaz (H vagy U)



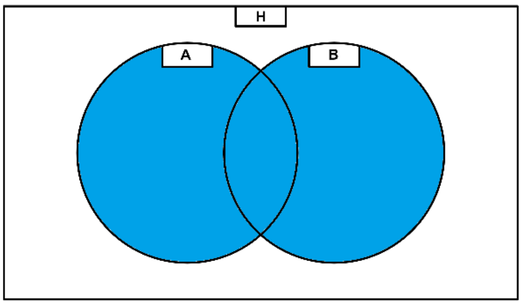
A



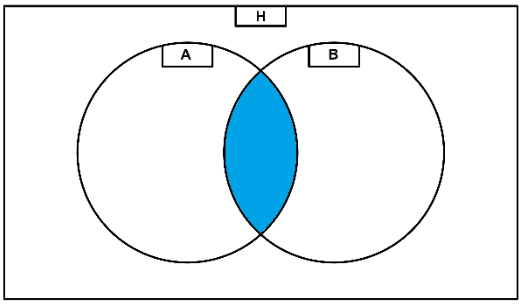
B



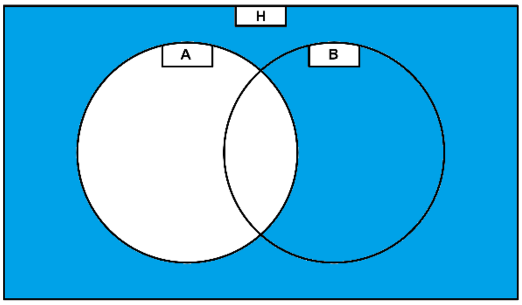
Unió $(A \cup B)$



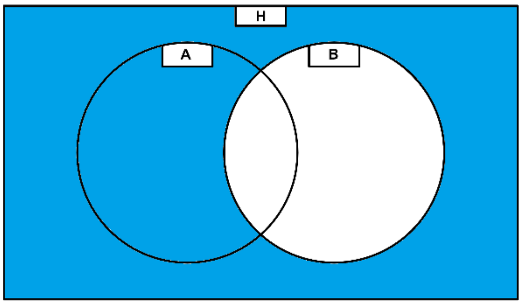
Metszet $(A \cap B)$



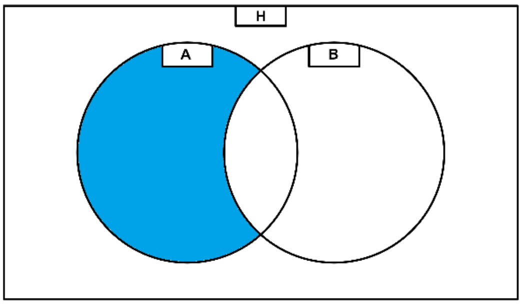
A komplementer ($\bar{A}$)



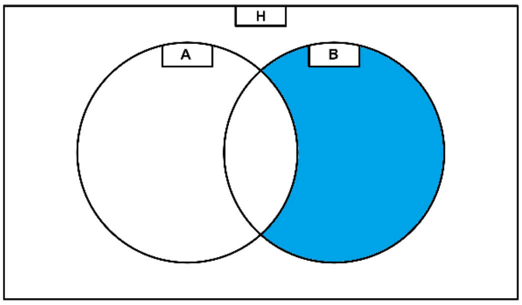
B komplementer ($\bar{B}$)



A különbség B ($A \setminus B$)

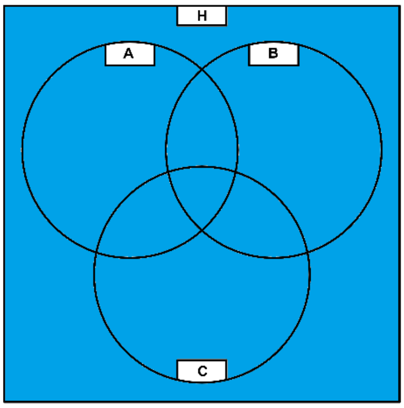


B különbség A ($B \setminus A$)

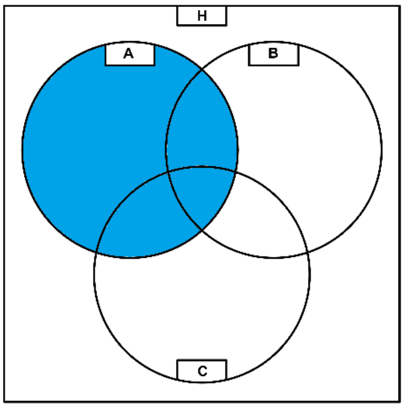


Halmaz műveletek 3 halmaz esetén

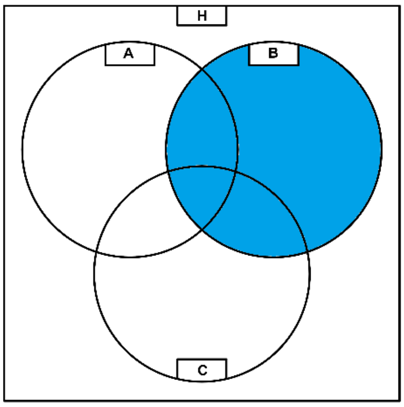
H



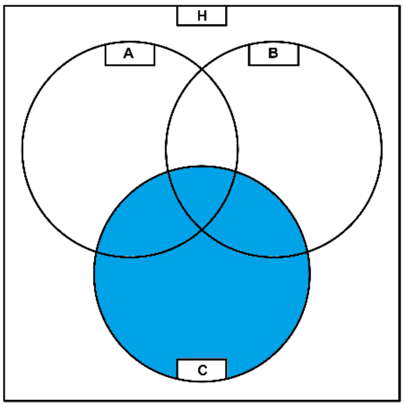
A



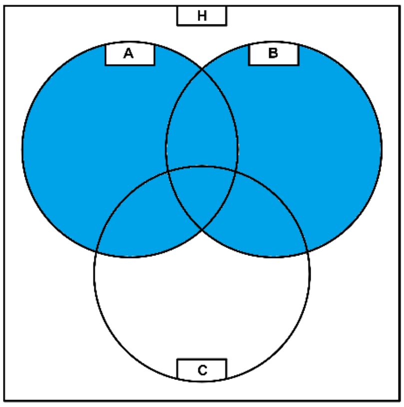
B



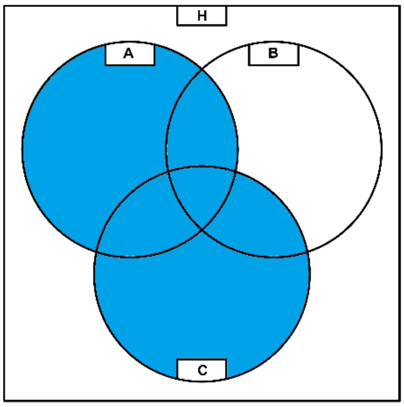
C



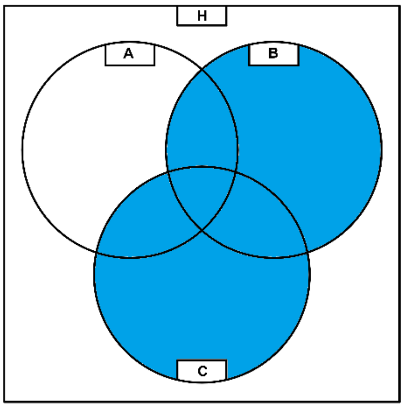
A unió B ($A \cup B$)



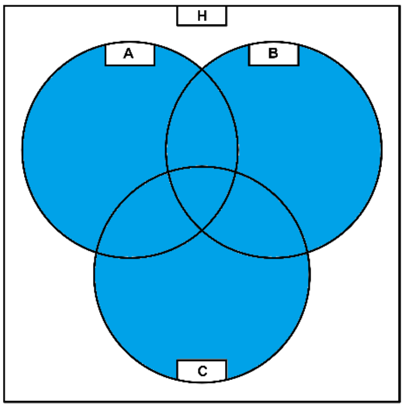
A unió C ($A \cup C$)



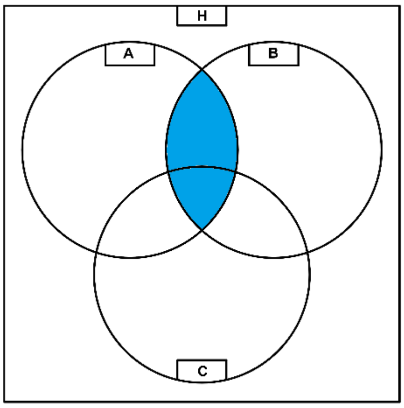
B unió C ($B \cup C$)



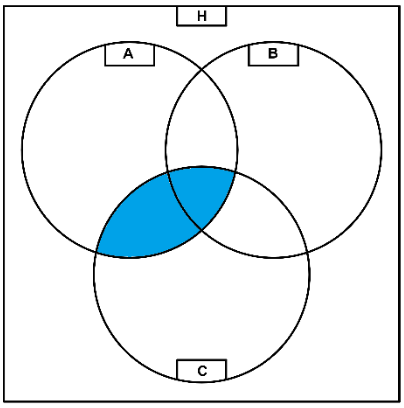
A unió B unió C ($A \cup B \cup C$)



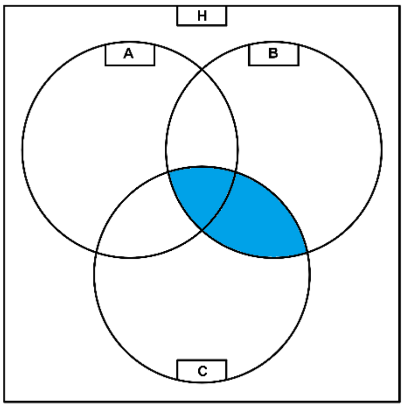
A metszet B ($A \cap B$)



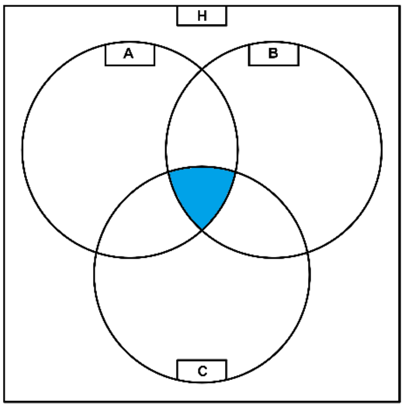
A metszet C ($A \cap C$)



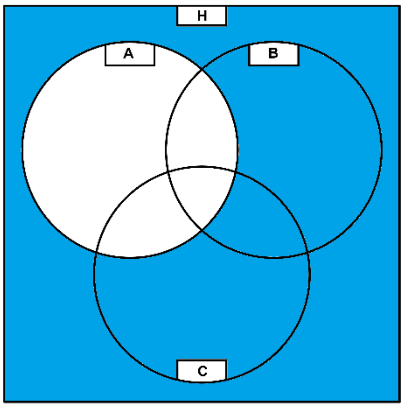
B metszet C ($B \cap C$)



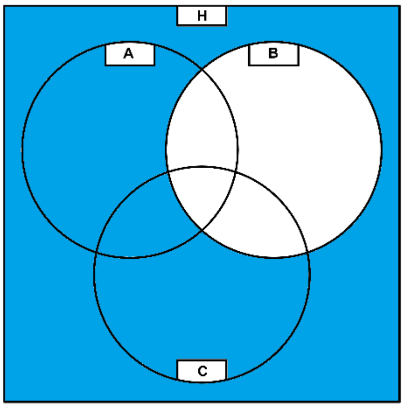
A metszet B metszet C ($A \cap B \cap C$)



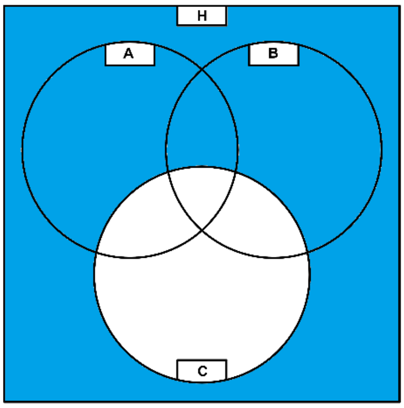
A komplementer ($\overline{A}$)



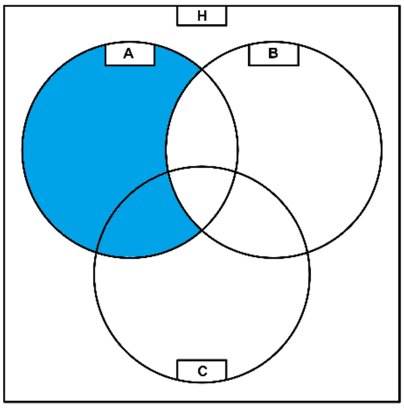
B komplementer ($\overline{B}$)



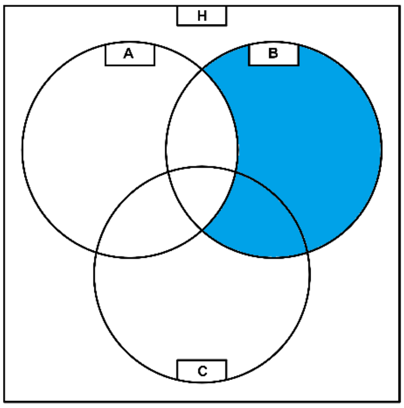
C komplementer ($\overline{C}$)



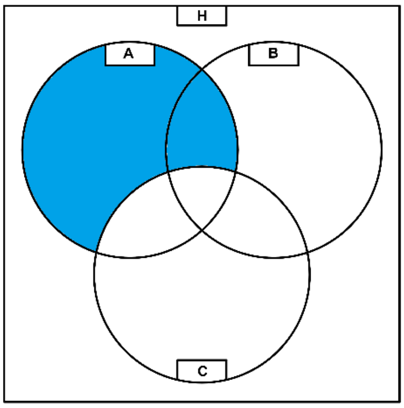
A különbség B ($A \backslash B$)



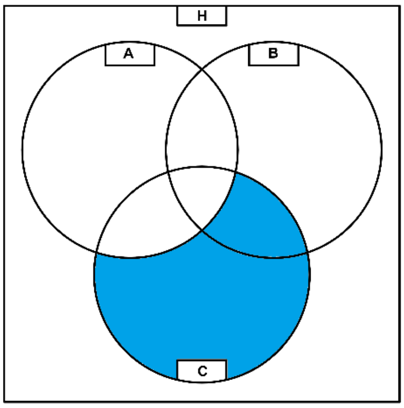
B különbség A ($B \backslash A$)



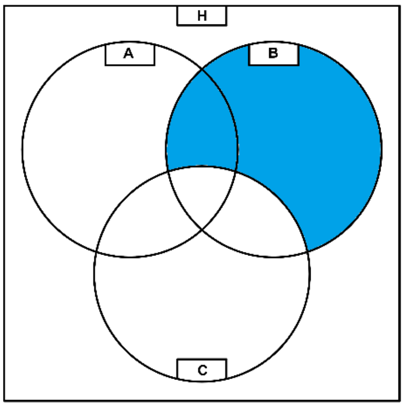
A különbség C ($A \setminus C$)



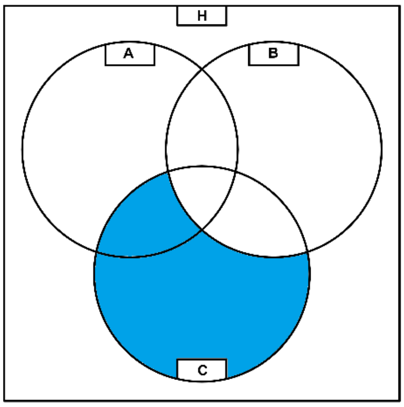
C különbség A ($C \setminus A$)



B különbség C ($B \setminus C$)



C különbség B ($C \setminus B$)



Számok

Racionális számok

Tört alak	Tizedes tört alak
$\frac{1}{2}$	$0{,}5$
$\frac{1}{3}$	$0,\dot{3} = 0{,}333333$
$\frac{1}{4}$	$0{,}25$
$\frac{1}{5}$	$0{,}2$
$\frac{1}{6}$	$0{,}1\dot{6} = 0{,}166666$
$\frac{1}{8}$	$0{,}125$
$\frac{1}{9}$	$0,\dot{1} = 0{,}111111$
$\frac{1}{10}$	$0{,}1$
$\frac{1}{100}$	$0{,}01$

Arányosságok

<table>
<tr><th>Egyenes arányosság</th><th>Fordított arányosság</th></tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td rowspan="2">$\cdot 2$</td><td>1 csoki</td><td>200 Ft</td><td rowspan="2">$\cdot 2$</td></tr>
<tr><td>2 csoki</td><td>400 Ft</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><td rowspan="2">$\cdot 2$</td><td>1 ember</td><td>6 óra</td><td rowspan="2">$: 2$</td></tr>
<tr><td>2 ember</td><td>3 óra</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Ha az egyik oszlopot <u>szorozzuk</u> egy számmal a másikat is ugyanazzal a számmal <u>szorozzuk</u>

Ha az egyik oszlopot <u>osztjuk</u> egy számmal a másikat is ugyanazzal a számmal <u>osztjuk</u>

Esetek nagy részében

Példák: Bolt, vásárlás</td>
<td>Ha az egyik oszlopot <u>szorozzuk</u> egy számmal a másikat ugyanazzal a számmal <u>osztjuk</u>

Ha az egyik oszlopot <u>osztjuk</u> egy számmal a másikat ugyanazzal a számmal <u>szorozzuk</u>

Esetek kis részében

Példák: munka, takarítás, díszítés, kert ásás</td>
</tr>
</table>

Hatványozás azonosságok

Elnevezés	Azonosság	Példák	
E1	$a^{n} \cdot a^{m} = a^{n+m}$	$2^{3} \cdot 2^{5} = 2^{3+5} = 2^{8}$ $x^{4} \cdot x^{7} = 2^{4+7} = x^{11}$	$2^{x+2} = 2^{x} \cdot 2^{2}$ $x^{y+4} = x^{y} \cdot x^{4}$
E2	$\frac{a^{n}}{a^{m}} = a^{n-m}$	$\frac{2^{7}}{2^{2}} = 2^{7-2} = 2^{5}$ $\frac{x^{2}}{x^{4}} = 2^{2-4} = x^{-2}$	$2^{x-3} = \frac{2^{x}}{2^{3}}$ $x^{y-5} = \frac{x^{y}}{x^{5}}$
E3	$a^{n} \cdot b^{n} = (a \cdot b)^{n}$	$2^{x} \cdot 3^{x} = (2 \cdot 3)^{x} = 6^{x}$ $x^{2} \cdot y^{2} = (x \cdot y)^{2}$	$10^{x} = (2 \cdot 5)^{x} = 2^{x} \cdot 5^{x}$ $(x \cdot y)^{4} = x^{4} \cdot y^{4}$
E4	$\frac{a^{n}}{b^{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}$	$\frac{3^{x}}{5^{x}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x}$ $\frac{x^{5}}{y^{5}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{5}$	$\left(\frac{7}{8}\right)^{x} = \frac{7^{x}}{8^{x}}$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{3} = \frac{x^{3}}{y^{3}}$
E5	$(a^{n})^{m} = (a^{m})^{n} = a^{n \cdot m}$	$(3^{2})^{5} = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$ $(x^{3})^{4} = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$ $(4^{7})^{9} = (4^{9})^{7}$	$5^{2 \cdot 4} = (5^{2})^{4}$ $x^{7 \cdot 5} = (x^{7})^{5}$ $(x^{3})^{8} = (x^{8})^{3}$
E6	$a^{1} = a$	$2^{1} = 2$ $x^{1} = x$	$5 = 5^{1}$ $y = y^{1}$
E7	$a^{0} = 1$	$3^{0} = 1$ $x^{0} = 1$	$1 = 6^{0}$ $1 = x^{0}$
E8	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$ $x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{3} = 3^{-1}$ $\frac{1}{y} = y^{-1}$
E9	$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$	$4^{-2} = \frac{1}{4^{2}} = \frac{1}{16}$ $x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$	$\frac{1}{5^{4}} = 5^{-4}$ $\frac{1}{y^{5}} = y^{-5}$

Normálalak

Normálalakra hozás lépései:

1. Lépés: Az utolsó szám mögé írjuk a tizedesvesszőt

2. Lépés: Egyesével visszük balra felé a tizedesvesszőt, addig amíg az első számig nem érünk, közbe számoljuk, hogy hányszor lett arrébb rakva a tizedesvessző

3. Lépés: Leírjuk az eredeti számot úgy, hogy az első szám után van a tizedesvessző és a tizedesvessző után van a többi szám (a végén lévő 0-kat nem muszáj leírni)

4. Lépés: Ahányszor arrébb vittük a tizedesvesszőt az elején 10-et annyiadikra emeljük

Kamatos kamat

Kamatos kamat képletek:

$$T_n = T_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$T_n = T_0 \cdot q^n$$

Jelölések:

$T_0 - \textit{induló tőke (amit a 0. évben beteszünk)}$

$T_n - \textit{n. évben lévő pénz (n helyére számok kerülnek)}$

$n - \textit{évek száma}$

$p - \textit{kamatláb } (\%) \rightarrow 2 - 10\ \% \textit{ között}$

$q - \textit{kamattényező (szám)} \rightarrow 1{,}02 - 1{,}1 \textit{ között}$

Számrendszerek

$\mathbf{2}-\boldsymbol{es}$	16	8	4	2	1
$\mathbf{3}-\boldsymbol{as}$	81	27	9	3	1
$\mathbf{4}-\boldsymbol{es}$	256	64	16	4	1
$\mathbf{5}-$ö$\boldsymbol{s}$	625	125	25	5	1
$\mathbf{6}-\boldsymbol{os}$			36	6	1
$\mathbf{7}-\boldsymbol{es}$			49	7	1
$\mathbf{8}-\boldsymbol{as}$			64	8	1
$\mathbf{9}-\boldsymbol{es}$			81	9	1
$\mathbf{10}-\boldsymbol{es}$	10 000	1 000	100	10	1

Egyenletek

Nevezetes szorzatok

Elnevezés	Azonosság	Példák
A1	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(2x+3)^2 = 4x^2 + 2\cdot 2x\cdot 3 + 9$
A2	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(x-3)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 9$
A3	$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$	$(x+2)\cdot(x-2) = x^2 - 4$
		$x^2 - 9 = (x+3)\cdot(x-3)$
Emelt szint		
A4	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(x+2)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 2 + 3\cdot x\cdot 4 + 8$
A5	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(x-3)^3 = x^3 - 3\cdot x^2\cdot 3 + 3\cdot x\cdot 9 - 27$

További azonosságok:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

Binomiális tétel:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Egyenlet megoldásának lépései

1. lépés: Zárójel felbontása (ha van)

2. lépés: Tört nevezőjének eltűntetése (ha van)

3. lépés: Összevonás oldalanként

4. lépés: x-es tagok egy oldalra

5. lépés: Számok egy oldalra

6. lépés: Osztás x együtthatójával (ha van)

7. lépés: Ellenőrzés (ha szükséges)

Szöveges feladat megoldásának lépései

1. lépés: Feladat szövegének elolvasása figyelmesen, szöveg értelmezése

2. lépés: Adatok kigyűjtése

3. lépés: Kérdés felírása

4. lépés: Ábra, táblázat készítése (ha szükséges)

5. lépés: Számítások felírása (egyenlet, nyitott mondat)

6. lépés: Becslés

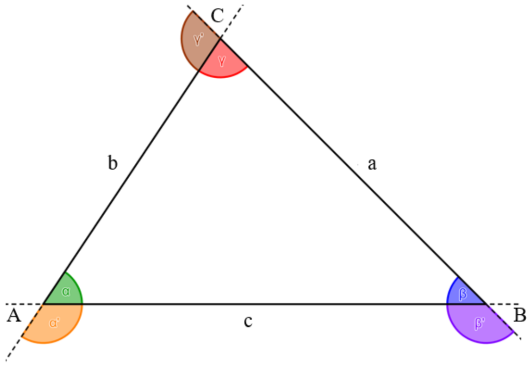
7. lépés: Számítások elvégzése

8. lépés: A kapott eredmény összevetése a becsült értékkel

9. lépés: Szöveges válasz írása

Geometria

Háromszögek



- Csúcsok ABC nagy betűi
- Oldalak ABC kisbetűi:
  - A csúccsal szemben a oldal
  - B csúccsal szemben b oldal
  - C csúccsal szemben c oldal
- Szögek, a görög ABC betűi:
  - A csúcsnál α
  - B csúccsal β
  - C csúccsal γ
- $Háromszög\ belső\ szögeinek$ összege: 180°
- $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$
- $Háromszög\ külső\ szögeinek$ összege: 360°
- $\boldsymbol{\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°}$
- $Egy\ belső$ és $egy\ külső\ szög$ összege: 180°
- $\boldsymbol{\alpha + \alpha' = 180°}$
- $\boldsymbol{\beta + \beta' = 180°}$
- $\boldsymbol{\gamma + \gamma' = 180°}$
- Két oldal összege mindig nagyobb a harmadik oldalnál:

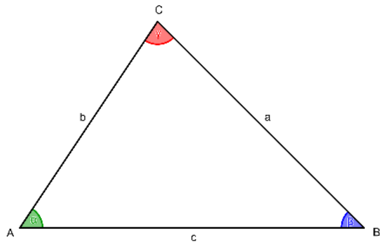
  $\mathrm{a} + b > c$

  $\mathrm{a} + c > b$

  $\mathrm{b} + c > a$

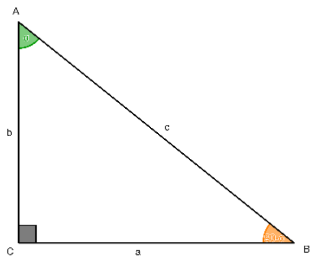
Háromszögek csoportosítása szögek szerint

Hegyesszögű háromszög



3 hegyesszög

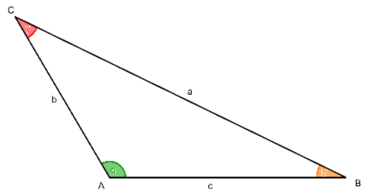
Derékszögű háromszög



1 derékszög

2 hegyesszög

Tompaszögű háromszög

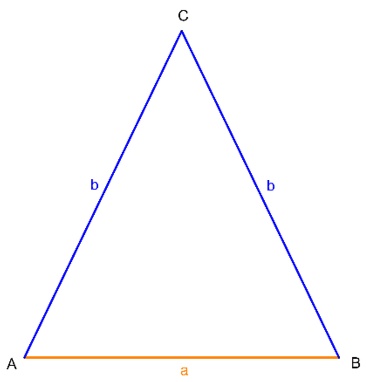


1 tompaszög

2 hegyesszög

Háromszögek csoportosítása specialitás szerint

Egyenlőszárú háromszög

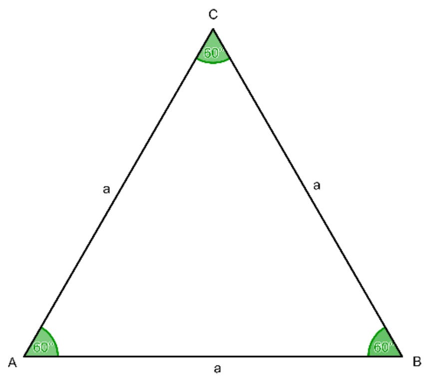


Van 2 egyenlő szára

Alapon fekvő szögei ugyanakkorák

1 szimmetria tengelye van

Szabályos háromszög

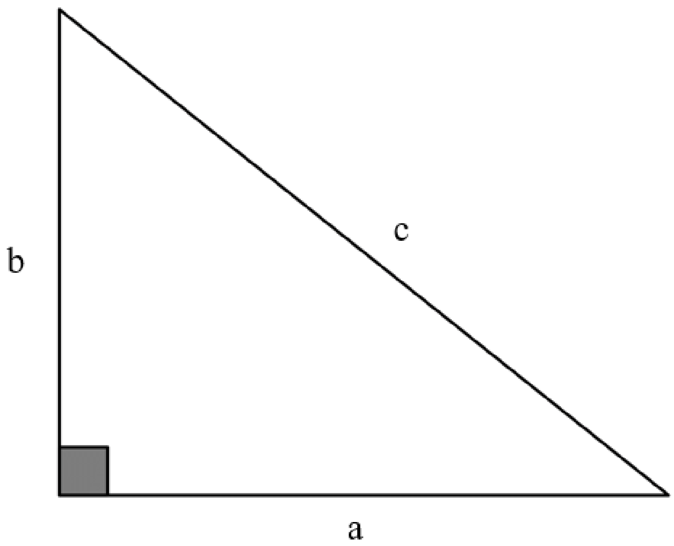


Minden oldala egyenlő

Minden szöge 60°

3 szimmetria tengelye van

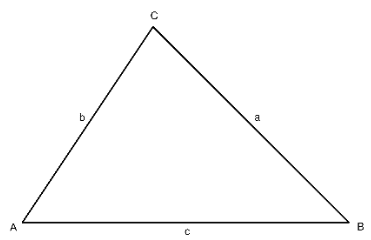
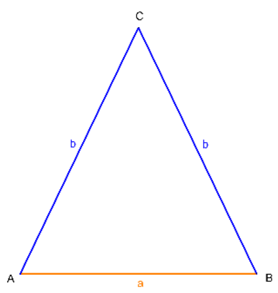
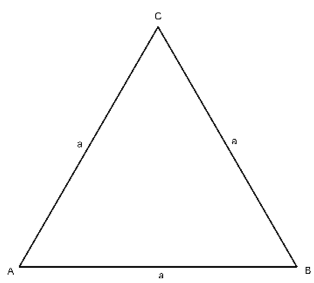
Pitagorasz tétel



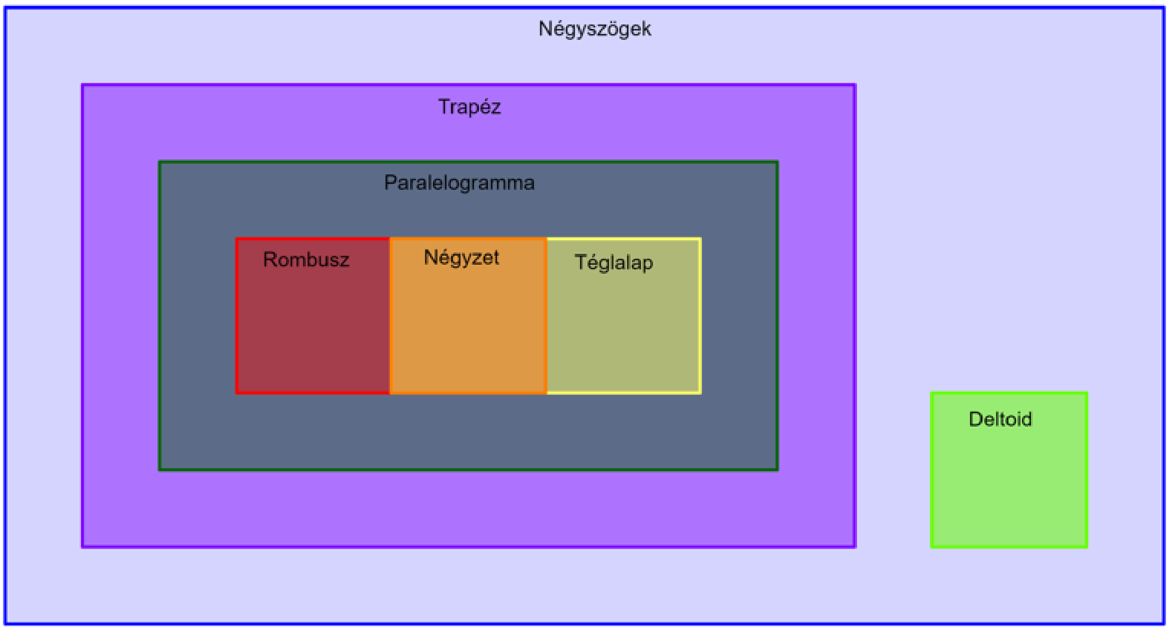
Pitagorasz-tétel:

$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$

Háromszögek kerülete

Általános háromszög	Egyenlőszárú háromszög	Szabályos háromszög
		
$\boldsymbol{K = a + b + c}$	$\boldsymbol{K = a + 2b}$	$\boldsymbol{K = 3a}$

Négyszögek

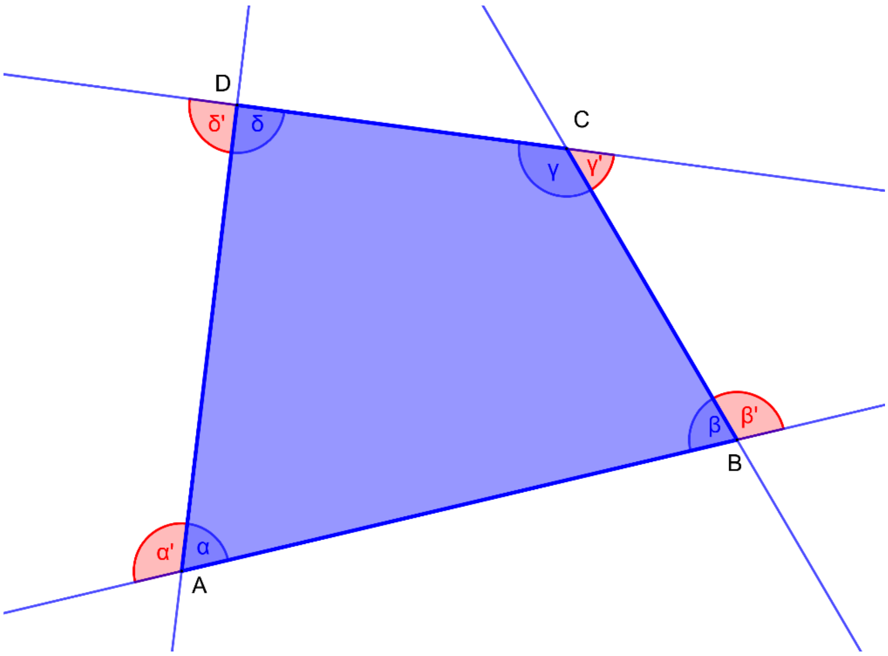


Minden négyzet: téglalap is, rombusz is, paralelogramma is, trapéz is, **deltoid!** is.

Minden téglalap: paralelogramma is, trapéz is.

Minden rombusz: paralelogramma is, trapéz is.

Minden paralelogramma: trapéz is.



Csúcsok: ABC nagy betűi figyelve körül járásra

Szögek: Hasonlóan, mint háromszögeknél, D csúcsnál δ

Oldalak: Nincs rá szabály

Belső szögek összege: $360° \rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Belső és külső szögek: Ugyanúgy, mint háromszögeknél, az összegük $180°$

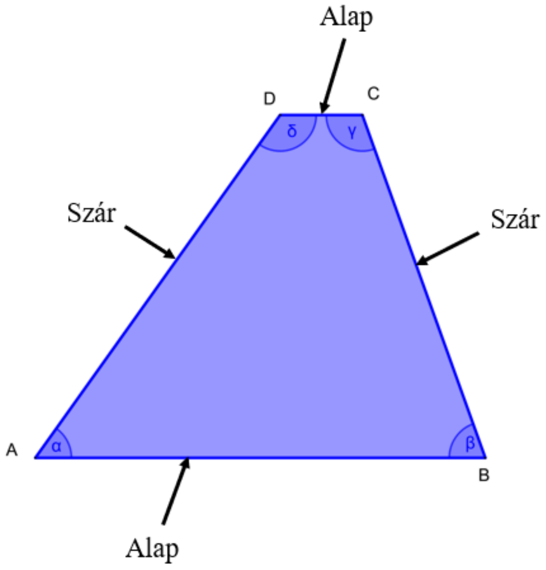
$\alpha + \alpha' = 180°$

$\beta + \beta' = 180°$

$\gamma + \gamma' = 180°$

$\delta + \delta' = 180$

Trapéz



- A párhuzamos oldalak az alapok
- Az alapokat összekötő oldalak a szárak
- Azonos száron fekvő szögei összege 180°
- Átlói nem egyenlő hosszúak, nem felezik egymást

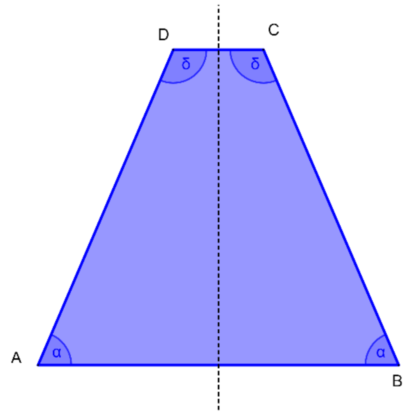
Speciális trapézok

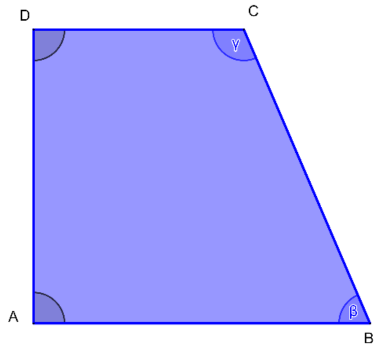
Szimmetrikus trapéz (húrtrapéz)

- A két szára egyenlő hosszú
- Az átlói egyenlő hosszúak
- 1 szimmetria tengelye van
- Alapon fekvő szögei egyenlőek

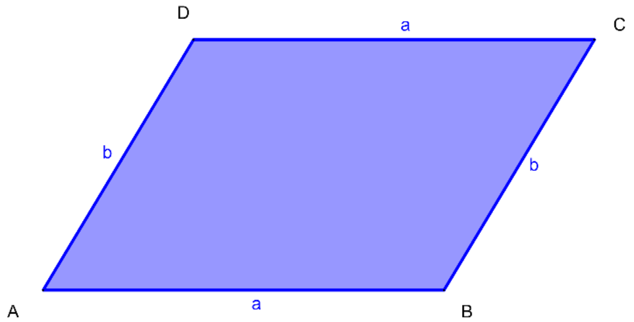
Derékszögű trapéz

- Van 2 derékszöge
- Átlók nem egyenlő hosszúak
- Nincs szimmetria tengelye



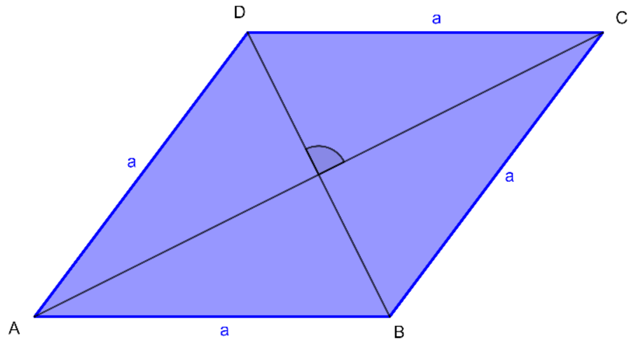


Paralelogramma



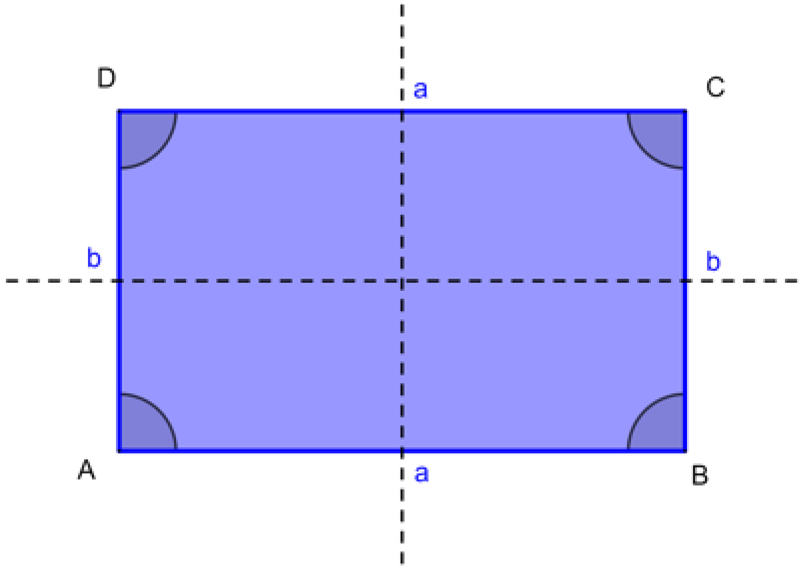
- Szemközti oldalai párhuzamosak és ugyanolyan hosszúak
- Átlói felezik egymást
- Az egy oldalon fekvő szögeinek az összege 180°
- A szemközti szögei egyenlőek

Rombusz



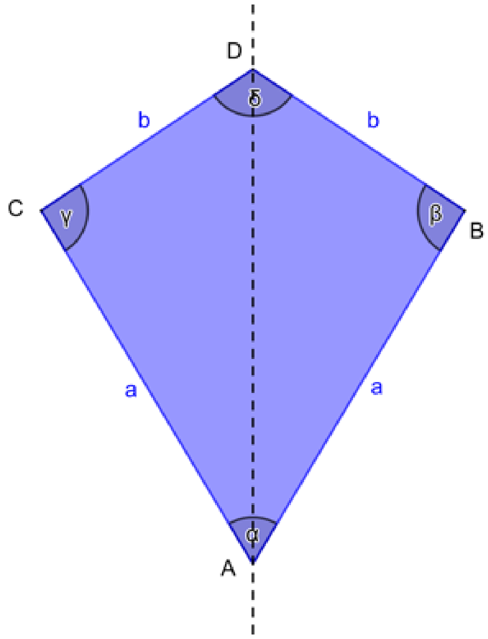
- Paralelogramma és a trapéz minden tulajdonsága igaz rá
- Minden oldala egyenlő
- Átlói merőlegesek egymásra

Téglalap



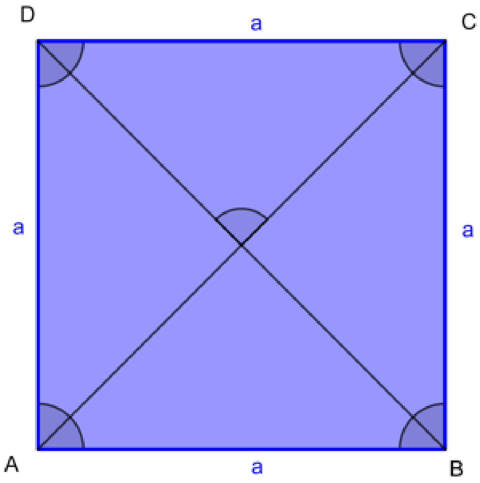
- Paralelogramma és a trapéz minden tulajdonsága igaz rá
- Minden szöge derékszög
- 2 szimmetria tengelye van, az oldalak felezők pontjainál

Deltoid



- Az egyik átlója szimmetria tengely
- Szomszédos oldalai ugyanolyan hosszúak
- Szemközti szögei ugyanakkorák (szimmetria tengely különböző oldalain lévők)
- Szimmetria tengely felezni fogja azokat a szögeket, amiken átmegy
- Átlók merőlegesek egymásra
- Az az átló, ami a szimmetria tengely, felezni fogja a nem szimmetria tengely átlót

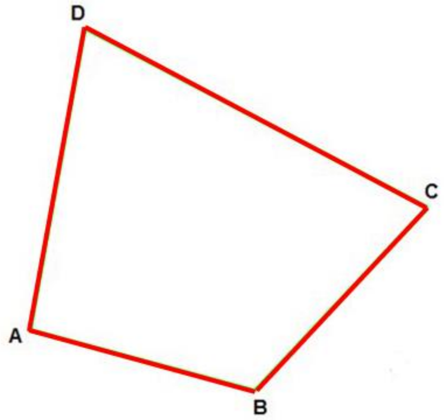
Négyzet



- Trapéz, paralelogramma, téglalap, rombusz, deltoid minden tulajdonsága igaz rá
- Átlói felezik a szögeket
- Összesen 4 szimmetriatengelye van:
- a 2 oldalfelező, és a 2 átló

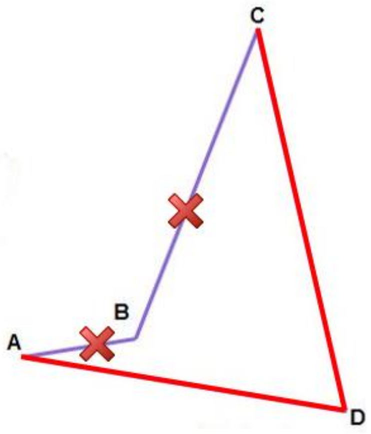
Konvex és konkáv négyszögek

Konvex



Konvex: Minden oldalát be tudjuk festeni

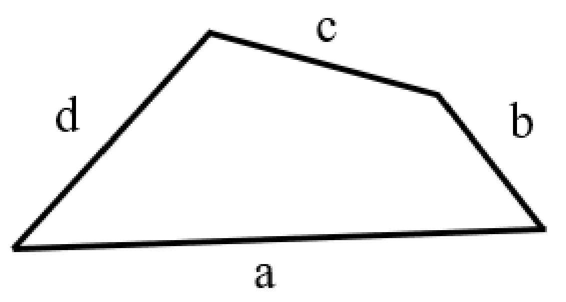
Konkáv



Konkáv: Nem tudjuk minden oldalát befesteni

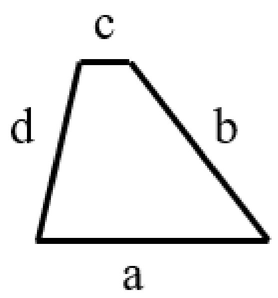
Négyszögek kerülete

Általános négyszög



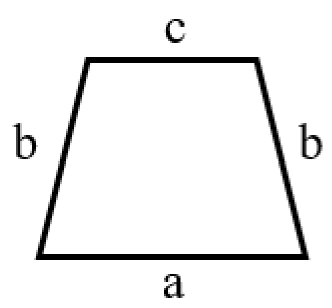
$$K = a + b + c + d$$

Trapéz



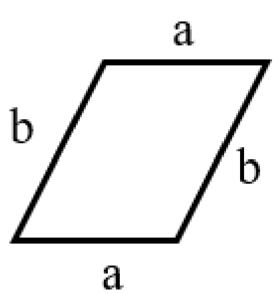
$$K = a + b + c + d$$

Szimmetrikus trapéz (húrtrapéz)



$$K = a + 2b + c$$

Paralelogramma

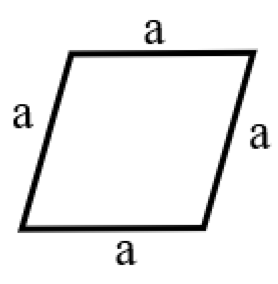


$$K = a + a + b + b$$

$$K = 2a + 2b$$

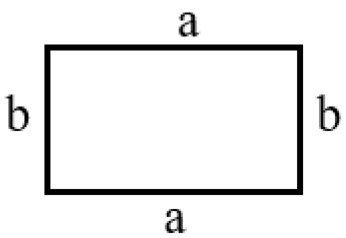
$$K = 2 \cdot (a + b)$$

Rombusz



$$K = 4a$$

Téglalap

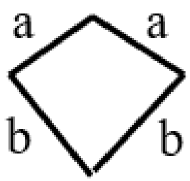


$$K = a + a + b + b$$

$$K = 2a + 2b$$

$$K = 2 \cdot (a + b)$$

Deltoid

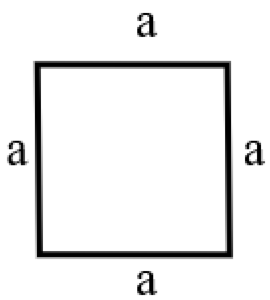


$$K = a + a + b + b$$

$$K = 2a + 2b$$

$$K = 2 \cdot (a + b)$$

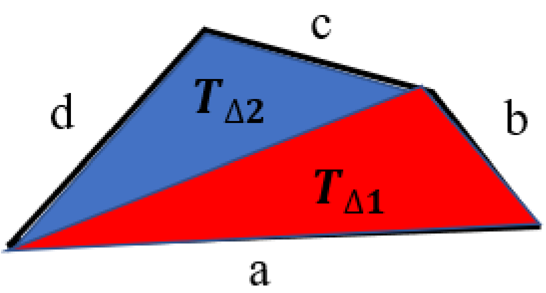
Négyzet



$$K = 4a$$

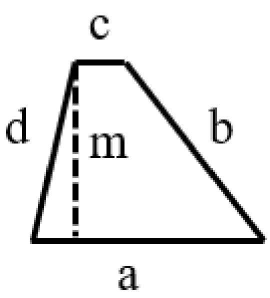
Négyszögek területe

Általános négyszög



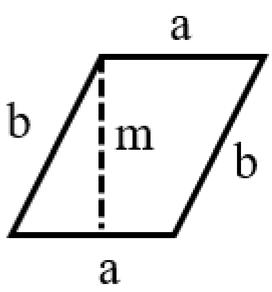
$$\boldsymbol{T = {\color{red}T_{\Delta 1}} + {\color{blue}T_{\Delta 2}}}$$

Trapéz



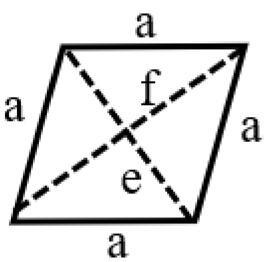
$$\boldsymbol{T = \frac{a + c}{2} \cdot m}$$

Paralelogramma



$$\boldsymbol{T = a \cdot m}$$

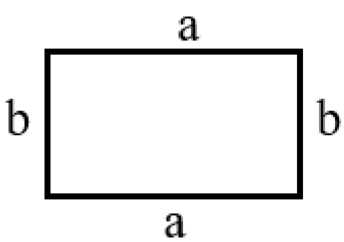
Rombusz



$$\boldsymbol{T = a \cdot m}$$

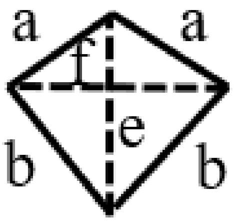
$$\boldsymbol{T = \frac{e \cdot f}{2}}$$

Téglalap



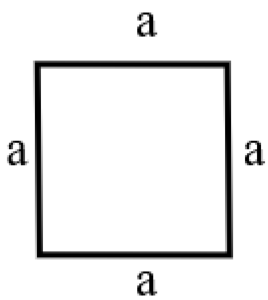
$$\boldsymbol{T = a \cdot b}$$

Deltoid



$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$

Négyzet



$$T = a \cdot a$$

$$T = a^2$$

Függvények

Függvények jellemzése

Értelmezési tartomány

- Jelölés: Középiskolában: É.T. ⟷ Egyetemen: D_f
- Megadja, hogy a függvény milyen x értékek mentén van értelmezve (vízszintesen nézzük)
- Általában, minden x-re értelmezve vannak a függvények, de van pár kivétel is

Értékkészlet

- Jelölés: Középiskolában: É.K ⟷ Egyetemen: R_f
- Megadja, hogy a függvény milyen y értékeket vehet fel (függőlegesen nézzük)
- Változó, van, ahol minden y-t felvehet a függvény, van, ahol csak nem negatív y-t vehet fel, van, ahol csak bizonyos y-t nem vehet fel

Zérushely

- Jelölés: Z.H.
- Megadja, hogy hol metszi a függvény az x tengelyt
- **0, 1, 2, vagy akár több zérus hely is lehet** egy függvénynél
- Ha tudjuk leolvassuk az ábrázolás után
- Ha nem tudjuk leolvasni, mert nem egész számra esik, akkor kiszámítjuk
- Kiszámítása: $f(x) = 0$ (a függvényt egyenlővé tesszük 0-val és megoldjuk x-re az egyenletet)

Tengelymetszet, Tengelypont

- Jelölés: T.M., T.P.
- Megadja, hogy hol metszi a függvény az y tengelyt
- Vagy **0** vagy **1** tengelymetszet lehet, **több nem!**
- Leolvasással meg tudjuk állapítani, ha nem (ritka), akkor 0-t helyettesítünk a függvénybe ($f(0) = \cdots$)

Monotonitás

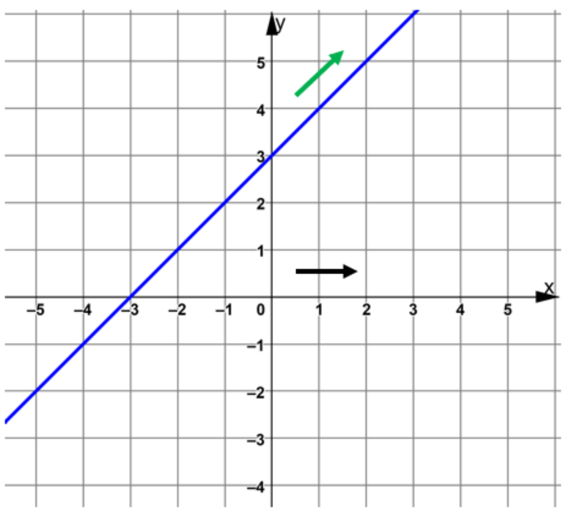
- Minden függvény, vagy Sz.m.n. vagy Sz.m.cs. Összefügg a szélső értékkel:

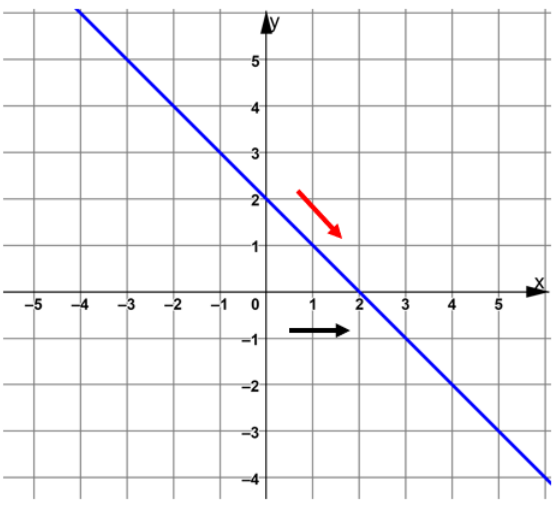
➢ Ha nő és

➢ utána csökken, akkor ahol a váltás történik ott maximum lesz

➢ Ha csökken és utána nő, akkor ahol a váltás történik ott minimum lesz

- Hogy állapítsuk meg, hogy egy függvény nő vagy csökken?
- x tengely mentén mindig jobbra felé nézzük, ha y növekszik, akkor **Sz.m.n.**, ha y csökken, akkor **Sz.m.cs.**





Szélsőérték

- Minimum
- Maximum
- Megadás: Hely (x), Érték (y)
- Pl.:

$Minimum\ koordinátái\ (\mathbf{2}; 3)$

$\boldsymbol{Minimum\ hely}: \mathbf{2}$

$\boldsymbol{Minimum}\ \text{é}\boldsymbol{rt}\text{é}\boldsymbol{k}: \mathbf{3}$

$Maximum\ koordinátái\ (\mathbf{2}; \mathbf{4})$

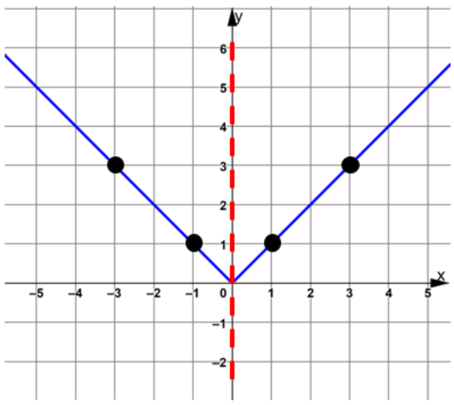
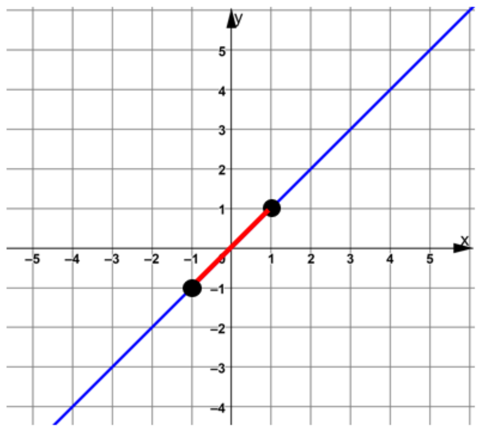
$\boldsymbol{Maximum\ hely}: \mathbf{2}$

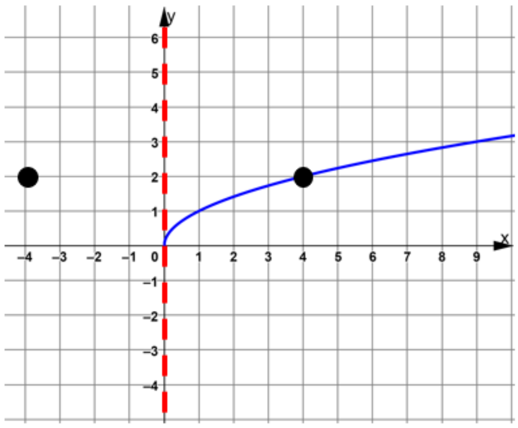
$\boldsymbol{Maximum}\ \text{é}\boldsymbol{rt}\text{é}\boldsymbol{k}: \mathbf{4}$

Folytonosság

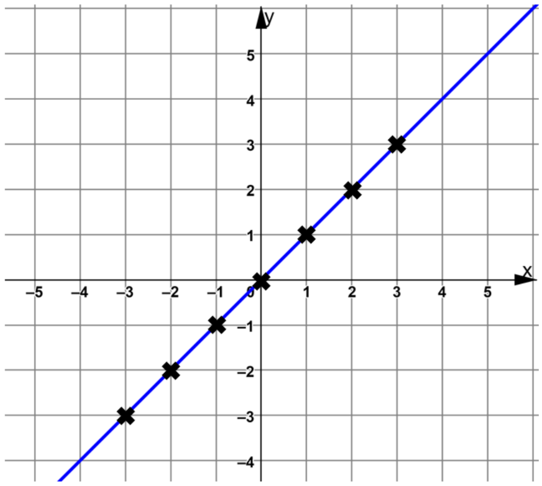
- Folytonos egy függvény, ha végig tudjuk rajta húzni a ceruzánkat úgy, hogy nem kell közben felemelnünk.
- Más szavakkal: Ha az értelmezési tartományán belül nincsen sehol szakadása.
- Az alap függvények közül csak az $\frac{1}{x}$ függvény nem folytonos
- Ahol felemeled a ceruzát, azt szakadásnak hívjuk

Paritás

	Páros	Páratlan
Definíció	Páros egy függvény, ha szimmetrikus az y tengelyre.	Páratlan egy függvény, ha szimmetrikus az origóra.
Konyhanyelven	Ha az y tengelyre teszünk egy tükröt ugyanazt látjuk mind a két felén.	Ha bármelyik pontját összekötjük az origóval, akkor ugyanazon az egyenesen ugyanolyan távolságban van egy másik pont is.
Példák	$f(x) = \lvert x \rvert,\ \ f(x) = x^2$	$f(x) = x,\ \ f(x) = \dfrac{1}{x}$
Ábrázolás		

	Sem páros sem páratlan
Definíció	Sem páros sem páratlan egy függvény, ha nem szimmetrikus sem y tengelyre, sem az origóra.
Konyhanyelven	Ha egy tükröt teszünk az y tengelyre nem fog megjelenni a függvény tükörképe a másik oldalon, ha pedig bármelyik pontját összekötjük az origóval nem lesz egy másik pont ugyanolyan távolságban.
Példák	$f(x) = \sqrt{x}$
Ábrázolás	

Lineáris függvény tudnivalók



- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$
- Zérushely: $f(x) = 0$, mindig 1 zérushely van
- Tengelymetszet: a függvényben a szám, mindig 1 tengelymetszet van
- Monotonitás:

➢ Ha nincs az x-es kifejezés előtt mínusz előjel → Sz.m.n.

➢ Ha van az x-es kifejezés előtt mínusz előjel → Sz.m.cs.

- Szélsőérték: Sosincs
- Paritás: Páratlan, ha nincs benne eltolás, sem páratlan sem páros, ha van benne eltolás
- Törtek meredeksége:

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}x \rightarrow \frac{\boldsymbol{fel}}{\boldsymbol{jobbra}} \rightarrow \mathbf{3} - \boldsymbol{at\ jobbra}(\rightarrow)\ \mathbf{2} - \boldsymbol{t\ fel}\ (\uparrow)$$

$$f(x) = \Delta \cdot x + \otimes$$

Δ: $meredekség$

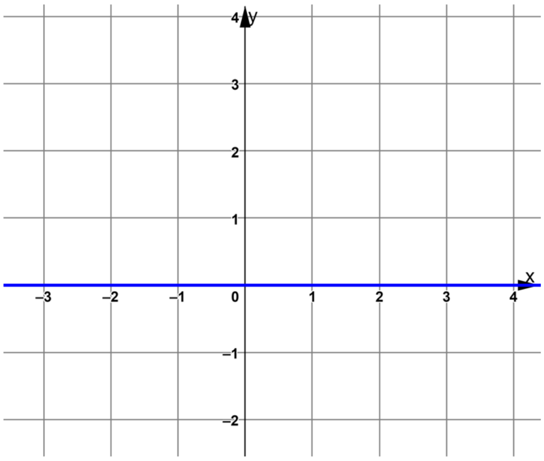
$\otimes$: $y\ tengely\ metszet$

Lineáris függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük, hogy hol metszi az y tengelyt, azt bejelöljük**
- **Megnézzük a meredekséget, és annyit lépkedünk jobbra / balra és fel / le amennyi a meredekség**

Konstans függvény tudnivalók

$\boldsymbol{f(x) = 0}$



$É.T.: x \in \mathbb{R}$

$É.K.: y = 0$

Zérushely: $\boldsymbol{Minden\ x\ Z.H.}$

Tengelypont: $y = 0$

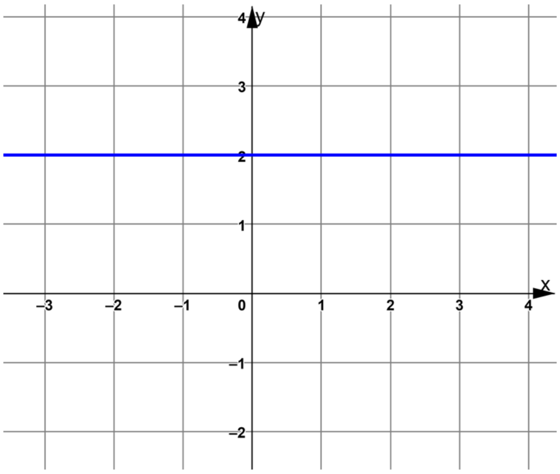
Monotonitás: $Se\ Sz.m.n.,\ se\ Sz.m.cs.$

Szélsőérték: Nincs

Folytonosság: Folytonos

Paritás: Páros, és **páratlan** is

$\boldsymbol{f(x) \neq 0}$



$É.T.: x \in \mathbb{R}$

$É.K.: y = 2$

Zérushely: $Nincs$

Tengelypont: $y = 2$

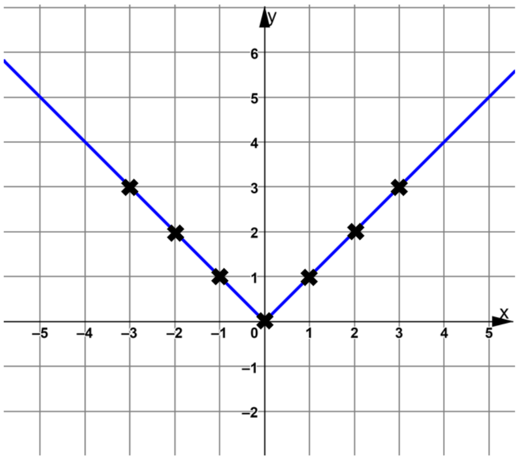
Monotonitás: $Se\ Sz.m.n.,\ se\ Sz.m.cs.$

Szélsőérték: Nincs

Folytonosság: Folytonos

Paritás: Páros

Abszolútérték függvény tudnivalók



- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: Függőleges eltolástól függ pl.: $f(x) = |x| - 2 \rightarrow R_f: [-2; \infty[$
- Zérushely: $f(x) = 0$, lehet 0, 1, vagy 2 zérushely is (függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, mindig 1 tengelymetszet van
- Monotonitás:
  - Vízszintes eltolástól függ → Először Sz.m.cs. minimum helyig, aztán Sz.m.n.
  - Ha az abszolútértékjel előtt van mínusz előjel → Először Sz.m.n. maximum helyig, aztán Sz.m.cs.
- Szélsőérték: mindig van, ha nincs mínusz előjel az abszolútérték előtt, akkor minimum, ha van mínusz előjel, akkor maximum
- Paritás: Páros, ha nincs benne vízszintes eltolás, vagy csak nyújtás van benne, sem páros, sem páratlan, ha van benne vízszintes eltolás
- Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
- Vízszintes eltolás megadja a monotonitási határokat, valamint a minimum/maximum helyét

Eltolások

$f(x) = |x + \Delta| + \otimes$

$\otimes$: $y\ irányú\ eltolás$

Δ: $x\ irányú\ eltolás$

$\otimes$: $logikusan$:

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

Δ: $fordítva$:

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

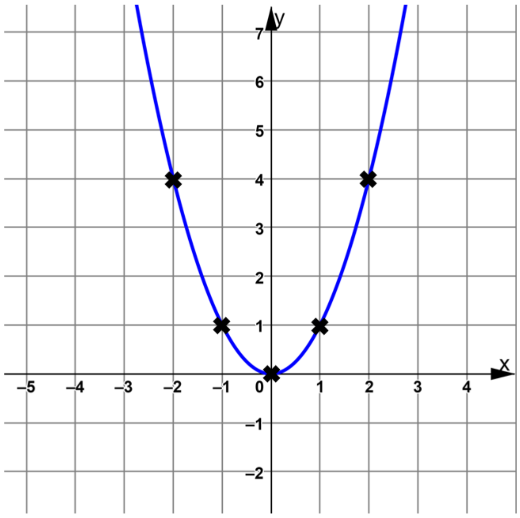
$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Abszolútérték függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (minimum, vagy maximum)**
- **A csúcsból kiindulva a sima abszolútérték függvényt ábrázoljuk (1-et jobbra 1-et fel, 1-et balra 1-et fel)**

Másodfokú függvény tudnivalók



- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: Függőleges eltolástól függ pl.: $f(x) = x^2 + 3 \rightarrow R_f: [3; \infty[$
- Zérushely: $f(x) = 0$, lehet 0, 1, vagy 2 zérushely is (Függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, mindig 1 tengelymetszet van
- Monotonitás:
  - Vízszintes eltolástól függ → Először Sz.m.cs. minimum helyig, aztán Sz.m.n.
  - Ha a zárójel előtt van mínusz előjel → Először Sz.m.n. maximum helyig, aztán Sz.m.cs.
- Szélsőérték: Mindig van, ha nincs mínusz előjel a zárójel előtt, akkor minimum, ha van mínusz előjel, akkor maximum
- Paritás: Páros, ha nincs benne vízszintes eltolás, vagy csak nyújtás van benne, sem páros, sem páratlan, ha van benne vízszintes eltolás
- Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
- Vízszintes eltolás megadja a monotonitási határokat, valamint a minimum/maximum helyét

Eltolások

$f(x) = (x + \Delta)^2 + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

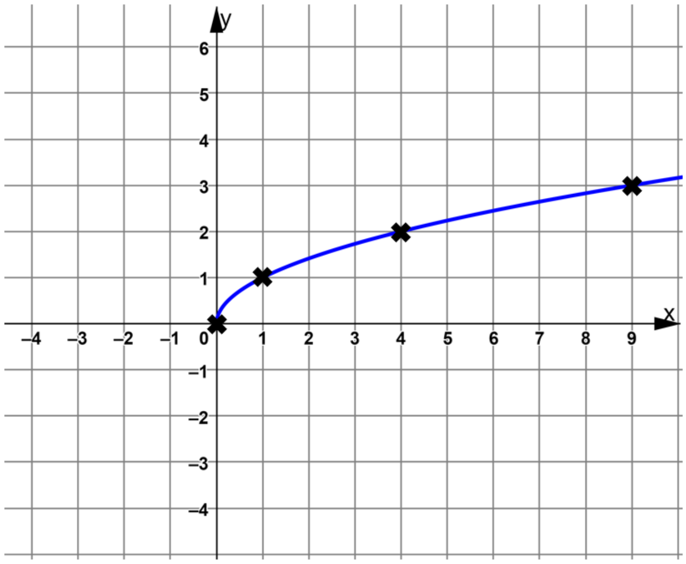
$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Másodfokú függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (minimum, vagy maximum)**
- **A csúcsból kiindulva a sima másodfokú függvényt ábrázoljuk**

Gyök függvény tudnivalók



- Értelmezési tartomány: Gyök alatti kifejezés≥ 0
- Értékkészlet: Függőleges eltolástól függ pl.: $f(x) = \sqrt{x} - 2 \to R_f: [-2; \infty[$
- Zérushely: $f(x) = 0$, 0 vagy 1 zérushely lehet (függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 0 vagy 1 tengelymetszet lehet (vízszintes eltolástól függ)
- Monotonitás: Gyökjel előtti, valamint gyökön belüli mínusz előjelektől függ:
- $\sqrt{x}, -\sqrt{-x} \to Sz.m.n.$, $\sqrt{-x}, -\sqrt{x} \to Sz.m.cs.$
- Szélsőérték: Mindig van, az eltolások metszetében lesz, az hogy minimum vagy maximum, a gyökjel előtti, valamint gyökön belüli mínusz előjelektől függ
- Paritás: Sem páros sem páratlan
- Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
- Vízszintes eltolás megadja az értelmezési tartomány végét, valamint a minimum/maximum helyét

Eltolások

$f(x) = \sqrt{x + \Delta} + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

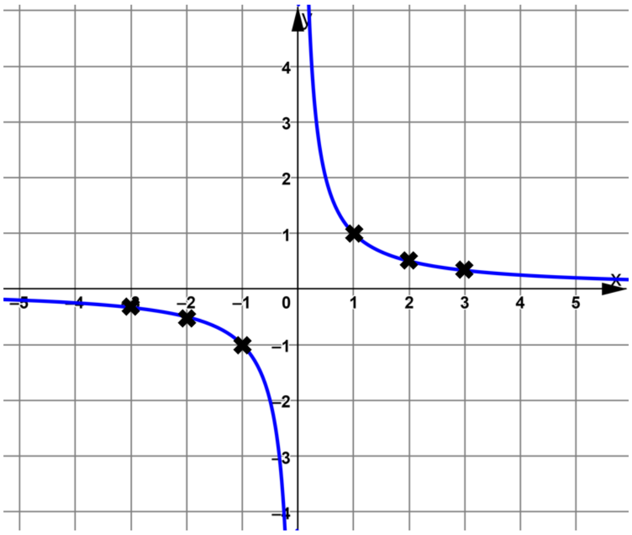
$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Gyökfüggvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (minimum, vagy maximum)**
- **A csúcsból kiindulva a sima gyökfüggvényt ábrázoljuk**

Tört függvény $\left(\frac{1}{x}\right)$ tudnivalók



- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, kivéve ahol a nevező 0
- Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$ kivéve, amennyivel el van tolva a függvény függőlegesen
- Zérushely: $f(x) = 0$, 0 vagy 1 zérushely lehet (függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 0 vagy 1 tengelymetszet lehet (vízszintes eltolástól függ)
- Monotonitás: Csökkenő, ha nincs előtte mínuszjel, növekő, ha van előtte mínuszjel, két részben írjuk fel
- Szélsőérték: Nincs
- Paritás: Páratlan, ha nincs benne semmilyen eltolás, vagy ha csak nyújtás van benne
- Függőleges eltolás megadja, hogy az értékkészletben hol van szakadás
- Vízszintes eltolás megadja, hogy az értelmezési tartományban, hol van szakadás

Eltolások

$$f(x) = \frac{1}{x + \Delta} + \otimes$$

$\otimes$: $y\ irányú\ eltolás$

Δ: $x\ irányú\ eltolás$

$\otimes$: $logikusan$:

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

Δ: $fordítva$:

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

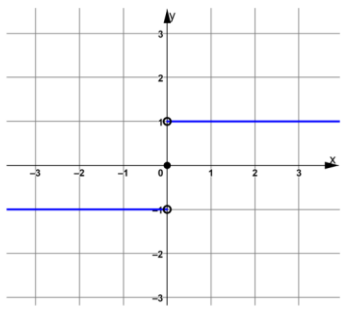
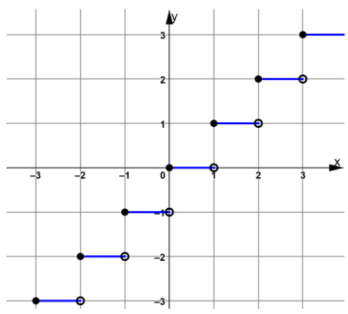
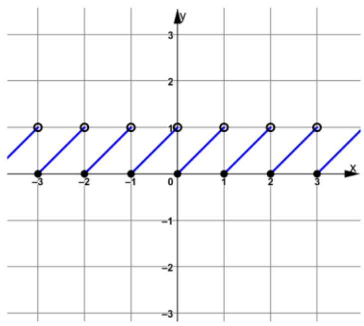
$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Törtfüggvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, azok lesznek az új koordináta tengelyek**
- **Az új koordináta tengelyekben megrajzoljuk a függvényt**

Előjel, egészrész, törtrész függvények

Előjel függvény	Egészrész függvény	Törtrész függvény
		

Függvény transzformációk

Eltolások

$f(x) = (x + \Delta) + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Tükrözések

$f(x) = (-x) \rightarrow y\ tengelyre\ \text{tükrözés}$

$f(x) = -(x) \rightarrow x\ tengelyre\ \text{tükrözés}$

$f(x) = -(-x) \rightarrow x\ \text{és}\ y\ tengelyre\ is\ \text{tükrözés}\ (sorrend\ mindegy)$

Ezek a tükrözések mindig az eltolt tengelyre vonatkoznak!

Nyújtások

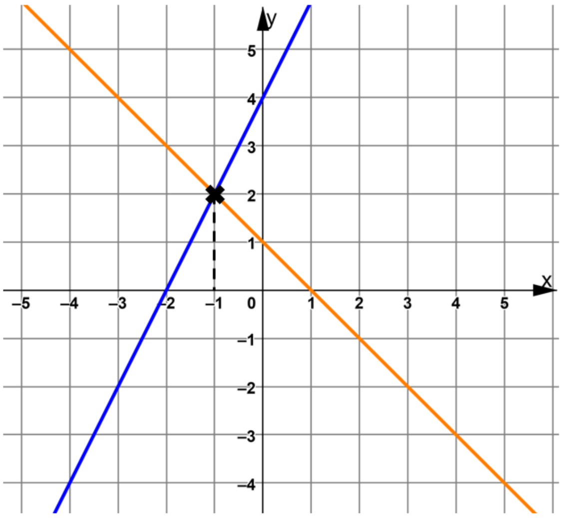
$f(x) = 2 \cdot (x) \rightarrow 2 - szeres\ \text{nyújtás}\ y\ \text{irányban}$

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x) \rightarrow 2 - szeres\ \text{összenyomás}\ y\ \text{irányban}$

Paritás

- Páros függvényeknél, ha y irányban toljuk csak el (fel / le), akkor marad páros, ha x irányban is eltoljuk, vagy csak x irányban toljuk el (jobbra / balra), akkor se páros se páratlan nem lesz a függvény
- Páratlan függvényeknél bármerre is toljuk el, akár y irányban (fel / le), akár x irányban (jobbra / balra), akkor se páros se páratlan nem lesz a függvény
- Nyújtásokkal nem változik a paritás
- Tükrözésekkel nem változik a paritás

Egyenletek grafikus megoldása



- Az egyenlet jobb oldala lesz az egyik függvény, a bal oldala pedig a másik függvény

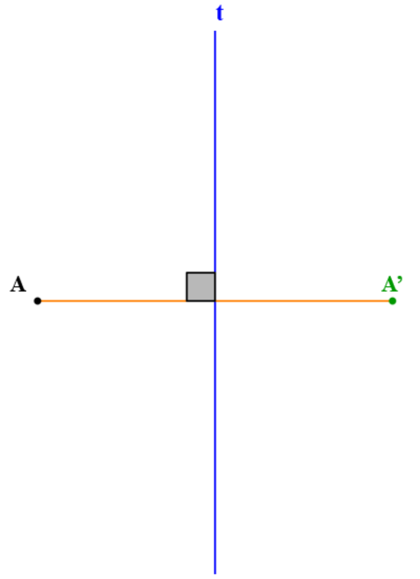
1. lépés: Összevonjuk az egy oldalon lévő azonos kifejezéseket (ha több is van), azért hogy tudjuk ábrázolni függvényként
2. lépés: Ha ezzel kész vagyunk az egyenlet bal oldala lesz az egyik függvény, a jobb oldala a másik függvény, ezeket ábrázoljuk közös koordináta rendszerben
3. lépés: Megnézzük, hogy van-e metszéspontja a két függvénynek:
    - Ha 1 pontban metszik egymást (esetek 99%-a), akkor leolvassuk a pont x koordinátáját, ez lesz az egyenlet megoldás
    - Ha nem metszik egymást (párhuzamosak), akkor az egyenletnek nincs megoldása
    - Ha egymáson van a két függvény (ugyanaz a két függvény), akkor minden x megoldás lesz

Abszolútérték egyenletek megoldása megoldása

1. lépés: Az abszolútértéken belüli kifejezést egyenlővé tesszük 0-val, és megoldjuk az egyenletet
2. lépés: A kapott eredményt bejelöljük számegyenesen függőleges szaggatott vonallal, és megnézzük, hogy tőle jobbra lévő (nagyobb) és tőle balra lévő (kisebb) számok esetén milyen előjelű lesz az abszolútértéken belüli kifejezés, az esetek nagyrészében jobbra lesznek pozitívak, balra pedig negatívak, de ez nem mindig van így (pl.:$2-x$)
3. lépés: Megoldjuk az egyenletet, az első megoldásnál csak elhagyjuk az abszolútérték jelet, a második megoldásnál pedig vesszük a jobb oldali kifejezés ellentetjét (vehetjük az abszolútértéken belüli kifejezés ellentettjét is) és megoldjuk az egyenletet, így kapunk két megoldást
4. lépés: A két megoldást bejelöljük a számegyenesen és megnézzük, hogy jók lesznek-e:
   - Akkor lesz jó az első megoldás, ha számegyenesen bejelölve a pozitív részre esik
   - Akkor lesz jó a második megoldás, ha számegyenesen bejelölve a negatív részre esik

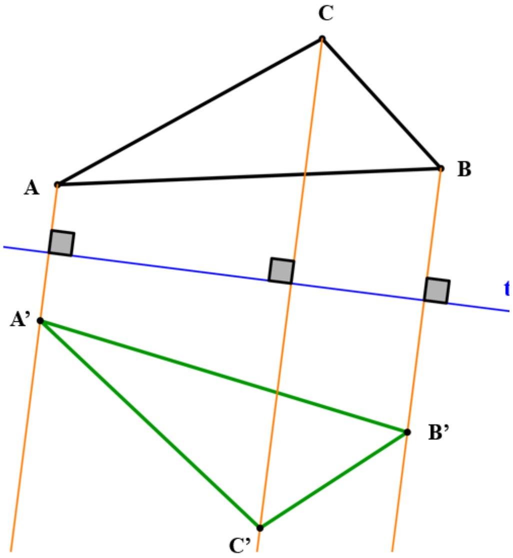
Egybevágóság, négyszögek

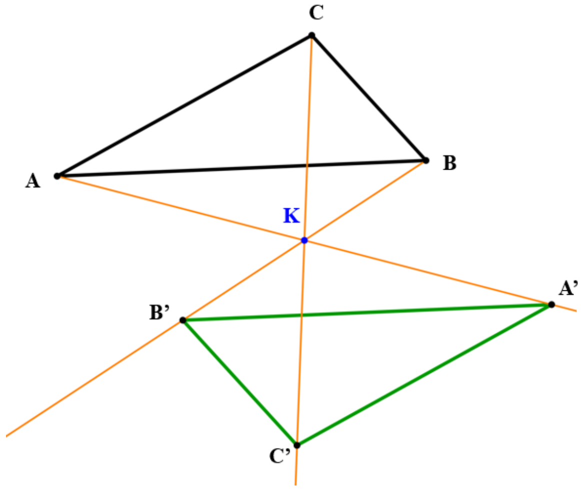
Tükrözések

<table>
<tr><th>Tengelyes tükrözés</th><th>Középpontos tükrözés</th></tr>
<tr><td colspan="2">Pontok tükrözése</td></tr>
<tr><td>

1. lépés: Merőleges állítása a pontból a tükörtengelyre (meghosszabbítva)
2. lépés: A pont és a tükörtengely távolságának felmérése a tükörtengely másik oldalára a merőleges egyenesen (A') </td>
<td>

1. lépés: A pont összekötése K ponttal (meghosszabbítva)
2. lépés: A pont és K pont távolságának felmérése az egyenes meghosszabított részére (A') </td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Alakzatok tükrözése</th></tr>
<tr>
<td>

1. lépés: Az alakzat pontjainak elnevezése (A, B, C, D…)
2. lépés: A pontok tükrözése egyesével a Pontok tükrözése alapján
3. lépés: A pontok összekötése figyelve a sorrendre, ugyanolyan sorrendbe kell összekötni őket, mint az eredeti alakzatnál (ha A pont C és E pontokkal volt összekötve, akkor A' pont C' és E' pontokkal lesz összekötve) </td>
<td>

1. lépés: Az alakzat pontjainak elnevezése (A, B, C, D…)
2. lépés: A pontok tükrözése egyesével a Pontok tükrözése alapján
3. lépés: A pontok összekötése figyelve a sorrendre, ugyanolyan sorrendbe kell összekötni őket, mint az eredeti alakzatnál (ha A pont C és E pontokkal volt összekötve, akkor A' pont C' és E' pontokkal lesz összekötve) </td>
</tr>
</table>

Forgatás

Forgatási irányok:

Óramutatóval ellentétes irány (mintha visszafele járna az óra): pozitív irány

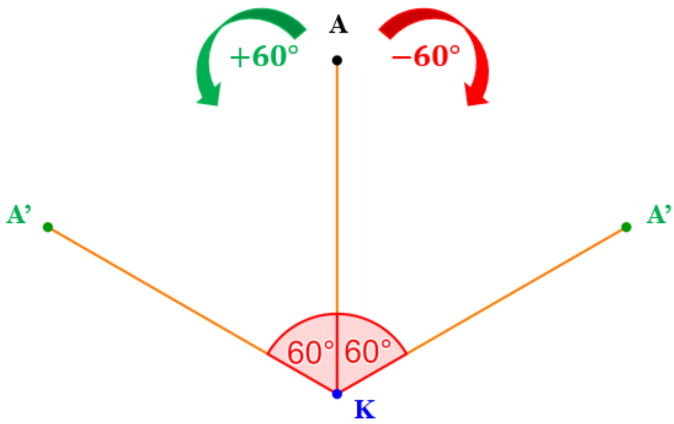
Óramutatóval megegyező irány: negatív irány

- Forgatni mindig pont körül szoktunk (K)

Pontok forgatásának lépései:

1. lépés: Pont (A) összekötése a forgatási ponttal (K)

2. lépés: Elforgatás figyelve a forgatási irányokra (A')

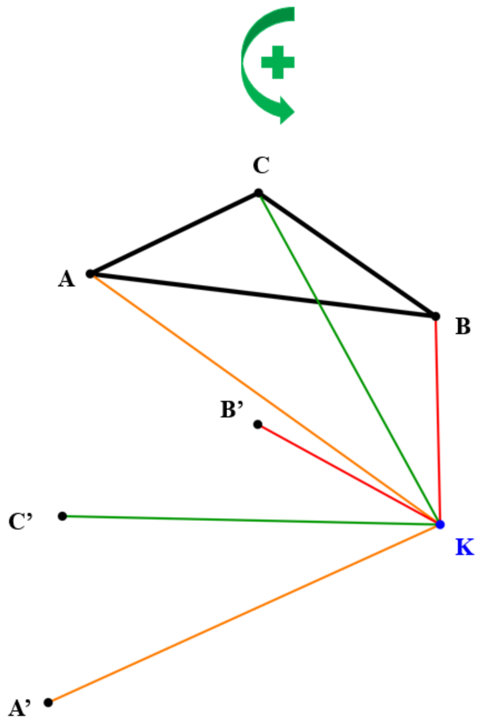


Alakzatok forgatásának lépései:

1. lépés: Az alakzat pontjainak elnevezése (A, B, C, D…)

2. lépés: A pontok tükrözése egyesével a **Pontok forgatásának lépései** alapján

3. lépés: A pontok összekötése figyelve a sorrendre, ugyanolyan sorrendbe kell összekötni őket, mint az eredeti alakzatnál (ha A pont C és E pontokkal volt összekötve, akkor A' pont C' és E' pontokkal lesz összekötve)



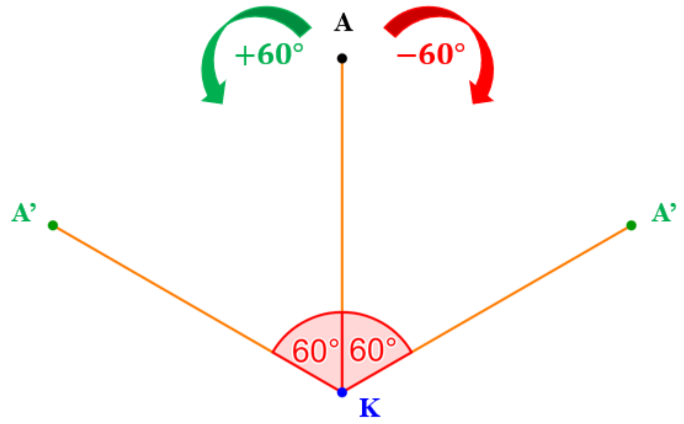
Eltolás

Eltolás megadása:

- Szövegesen (pl.: Toljuk jobbra 2 egységgel, toljuk felfelé 4 egységgel)
- Vektorokkal (pl.: Toljuk el a $(2; -1)$ vektorral)

Pontok eltolásának lépései:

Pont (A) eltolása a megadott irányokba vagy a megadott vektorral (A')



Alakzatok eltolásának lépései:

1. lépés: Az alakzat pontjainak elnevezése (A, B, C, D…)

2. lépés: A pontok tükrözése egyesével a **Pontok eltolásának lépései** alapján

3. lépés: A pontok összekötése figyelve a sorrendre, ugyanolyan sorrendbe kell összekötni őket, mint az eredeti alakzatnál (ha A pont C és E pontokkal volt összekötve, akkor A' pont C' és E' pontokkal lesz összekötve)