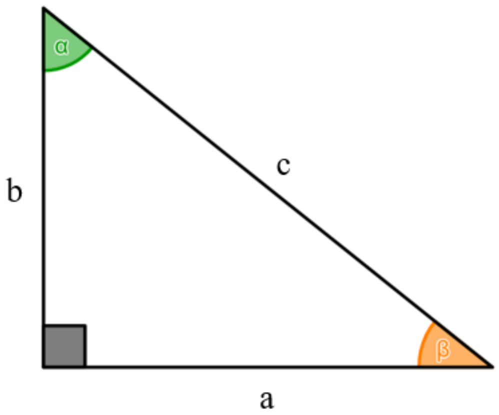
Trigonometria

Szögfüggvények

Szinusz (sin)

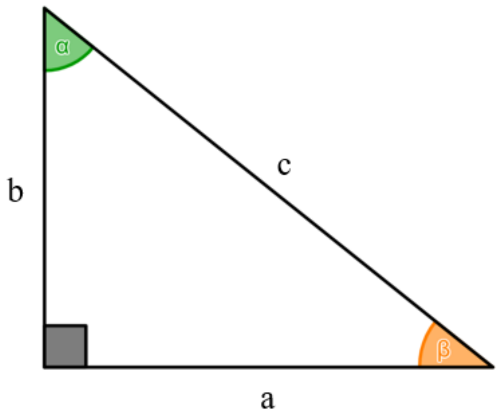


$$\sin\alpha = \frac{\textit{szöggel szemközti befogó}}{\textit{átfogó}}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c}$$

Koszinusz (cos)

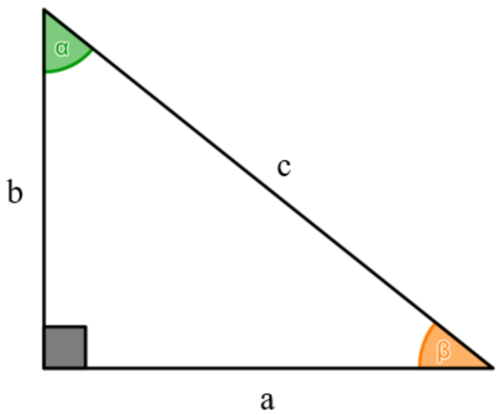


$$\cos\alpha = \frac{\textit{szög melletti befogó}}{\textit{átfogó}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c}$$

Tangens (tg, tan)



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\textit{szöggel szemközti befogó}}{\textit{szög melletti befogó}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$$

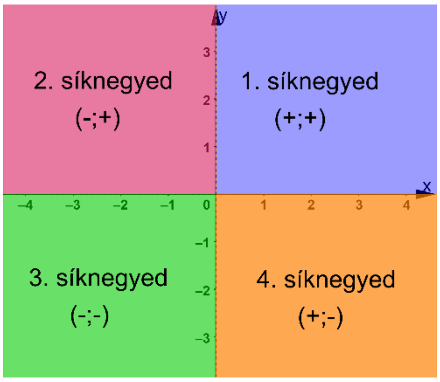
Szögfüggvények nevezetes szögértékei

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \cos(\alpha - 90°)$$

$$\cos\alpha = \sin(\alpha + 90°)$$

Szögek átváltása, radián

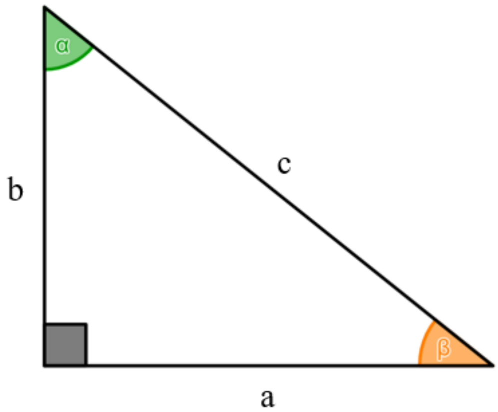
Fok (°)	Radián (rad)
$360°$	2π
$180°$	π
$90°$	$\frac{\pi}{2}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$
$0°$	0

Átváltás fokból radiánba $(° \to rad)$	**Átváltás radiánból fokba $(rad \to °)$**
$\boldsymbol{\alpha° \cdot \frac{2\pi}{360} = \alpha_{rad}}$ $\alpha° \cdot \frac{\pi}{180} = \alpha_{\mathrm{rad}}$	$\boldsymbol{\alpha_{rad} \cdot \frac{360}{2\pi} = \alpha°}$ $\alpha_{\mathrm{rad}} \cdot \frac{180}{\pi} = \alpha°$
Váltószám: $\boldsymbol{\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}}$ $\boldsymbol{1\ radián \sim 57,3°}$	

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
α_{rad}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Szinusztétel, koszinusztétel

Szinusztétel

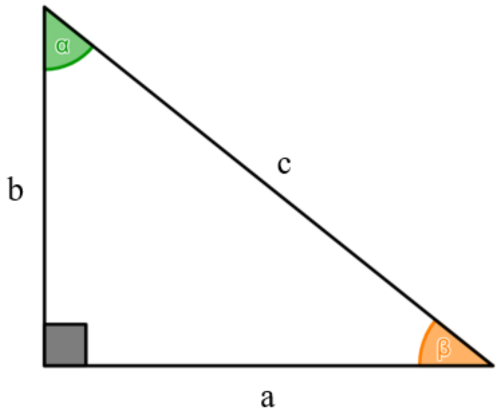


$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{c} = \frac{sin\,\alpha}{sin\,\gamma}}$$

$$\boldsymbol{\frac{b}{c} = \frac{sin\,\beta}{sin\,\gamma}}$$

Koszinusztétel



$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\,\gamma}$$

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\,\beta}$$

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\,\alpha}$$

Addíciós tételek

$$\boldsymbol{\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

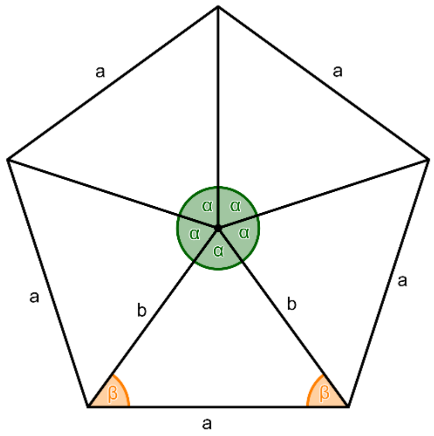
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

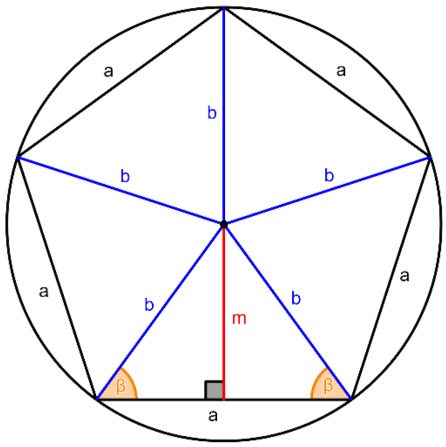
$$\boldsymbol{\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Szabályos ötszög





5 oldal és 5 csúcs

Minden oldala és szöge egyenlő

Egyenlőszárú háromszögekre bontható

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$$

$$\beta = \frac{180° - \alpha}{2} = 54°$$

Belső szög: $2 \cdot \beta = 108°$

Külső szög: $\frac{360°}{5} = 72°$

Kerület: $K = 5 \cdot a$

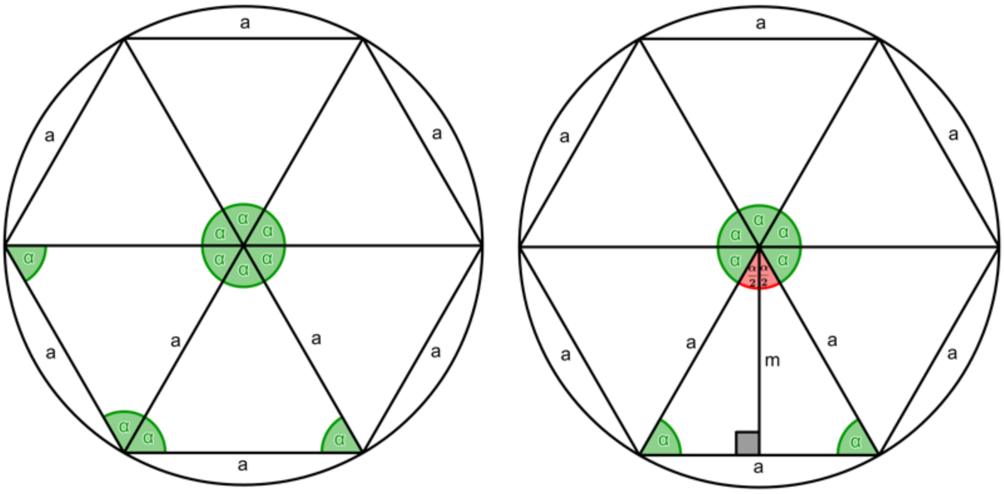
Terület: $T_{ötszög} = 5 \cdot T_{háromszög}$

$$T_{háromszög} = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{b \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$$

A köré írt kör sugara: $r = b$

Szimmetria tengelyek száma: 5

Szabályos hatszög



6 oldal és 6 csúcs

Minden oldala és szöge egyenlő

Szabályos háromszögekre bontható

$$\alpha = \frac{360°}{6} = 60°$$

$$\beta = \frac{180° - \alpha}{2} = 60°$$

Belső szög: $2 \cdot \beta = 120°$

Külső szög: $\frac{360°}{6} = 60°$

Kerület: $K = 6 \cdot a$

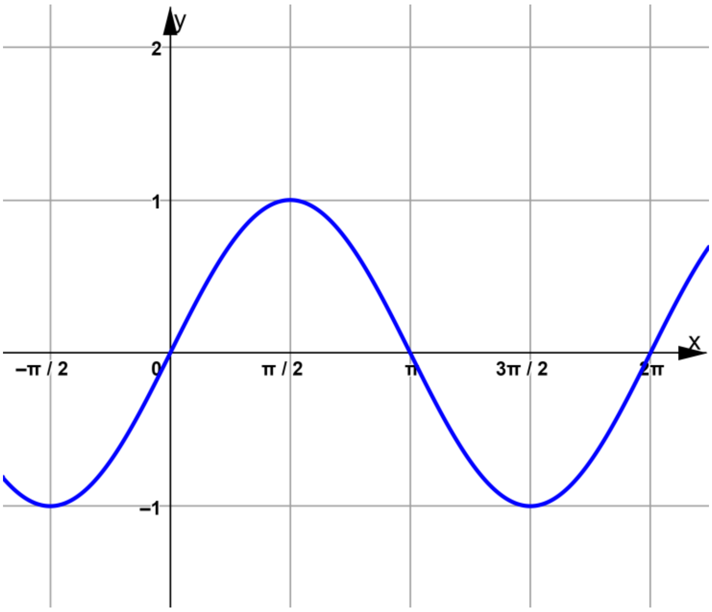
Terület: $T_{ötszög} = 6 \cdot T_{háromszög}$

$$T_{háromszög} = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{a \cdot a \cdot sin\,\alpha}{2}$$

A köré írt kör sugara: $r = a$

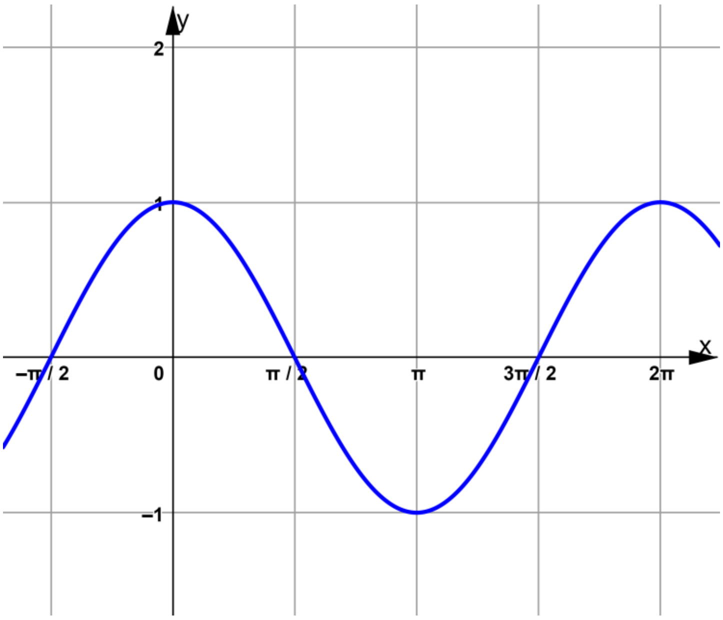
Szimmetria tengelyek száma: 6

Szinusz függvény



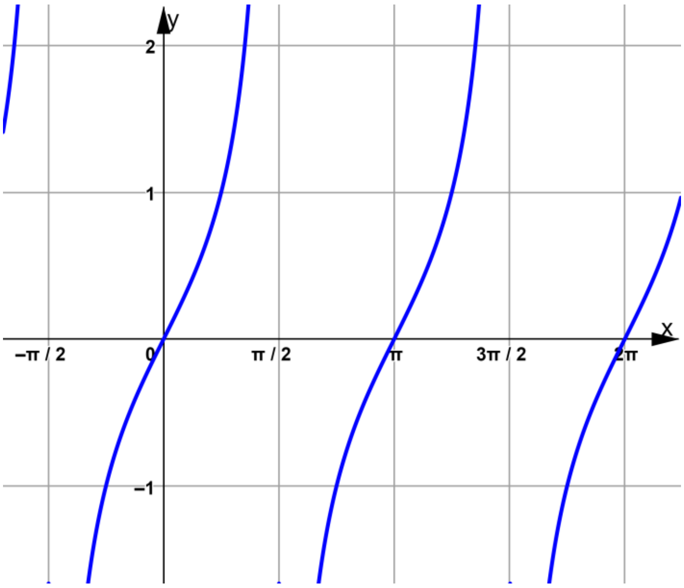
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

Koszinusz függvény



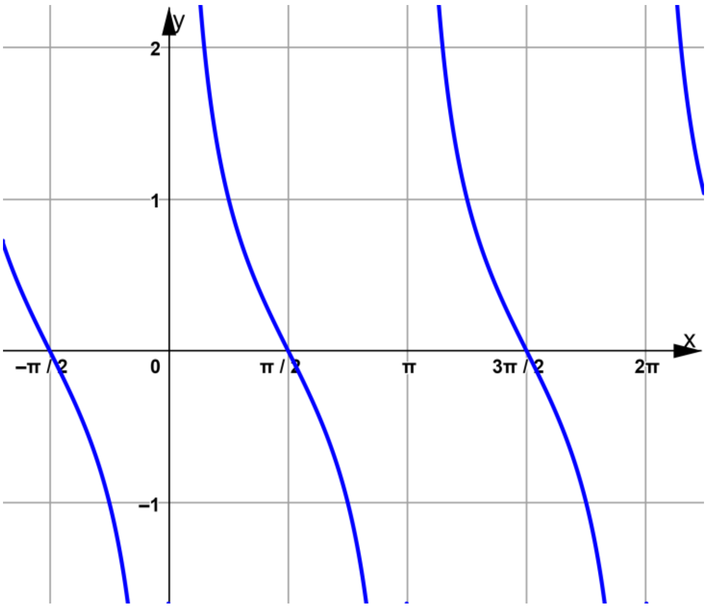
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

Tangens függvény



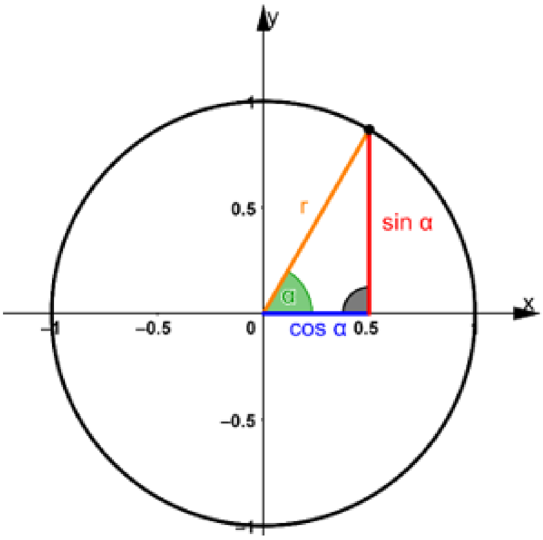
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\mathrm{t}g\,x$	$-$	-1	0	1	$-$

Kotangens függvény



x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\mathrm{ct}g\,x$	0	-1	$-$	1	0

Egységkör



- Kör középpontja: $origó$ $(0; 0)$
- Sugara: $r = 1$ egység
- $\cos\alpha$ lesz az x koordináta
- $\sin\alpha$ lesz az y koordináta
- Sin egyenletnél vízszintesen húzzuk be
- Cos egyenletnél függőlegesen húzzuk be
- Mindig 2 megoldás
- Kivéve $\sin x = \pm 1$ $\cos x = \pm 1$ → ott csak 1
- Megoldások után mindig odaírjuk a periódust is
- 1. síknegyedben maga a szög
- 2. síknegyedben 180°-ból vonjuk ki
- 3. síknegyedben 180°-hoz adjuk hozzá
- 4. síknegyedben 360°-ból vonjuk ki

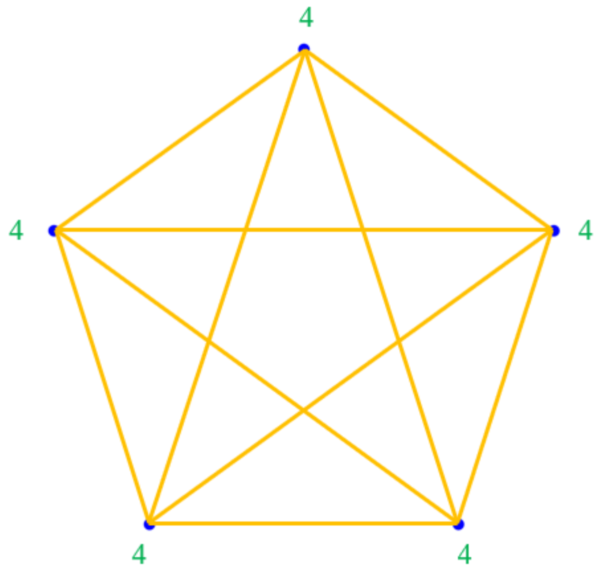
Trigonometrikus egyenlet megoldásainak száma, periódusok

	Sin				Cos			
Alesetek	$\sin x < -1$ vagy $\sin x > 1$	$\sin x = \cdots$	$\sin x = 0$	$\sin x = 1$ $\sin x = -1$	$\cos x < -1$ vagy $\cos x > 1$	$\cos x = \cdots$	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$ $\cos x = -1$
Megoldások száma	0	2	1 (2)	1	0	2	1 (2)	1
Periódus		$\boldsymbol{k \cdot 2\pi}$	$\boldsymbol{k \cdot \pi}$	$\boldsymbol{k \cdot 2\pi}$		$\boldsymbol{k \cdot 2\pi}$	$\boldsymbol{k \cdot \pi}$	$\boldsymbol{k \cdot 2\pi}$

	Tg (Ctg)	
Alesetek	$\operatorname{tg} x = \cdots$	$\operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
Megoldások száma	1	0
Periódus	$\boldsymbol{k \cdot \pi}$	

Kombinatorika

Gráfok részei



Csúcs (pont)

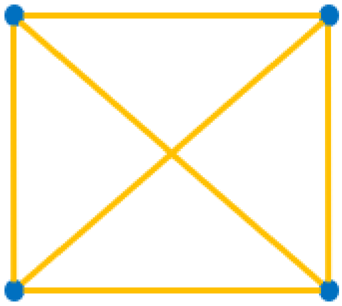
Él: A csúcsokat összekötő vonalak

Fokszám: A csúcsból kiinduló élek száma

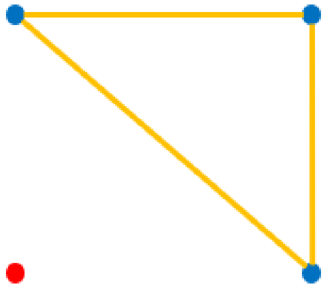
$Fokszámok\ összege = 2 \cdot élek\ száma$

$n\ csúcsú\ gráf\ éleinek\ a\ száma$: $\frac{\boldsymbol{n \cdot (n-1)}}{\mathbf{2}}$

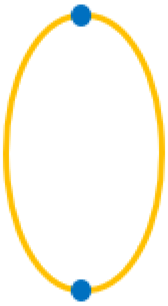
Gráfok típusai



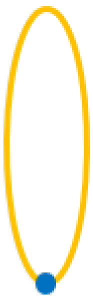
Teljes gráf: Ha bármely két pontja össze van kötve egy éllel.



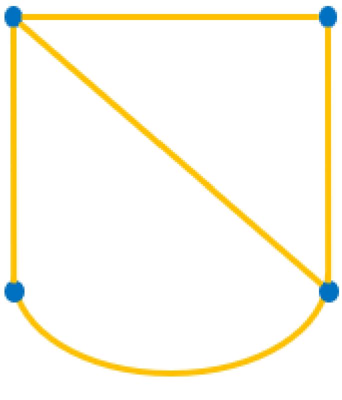
Izolált pont: Ha egy pontban nincs él.



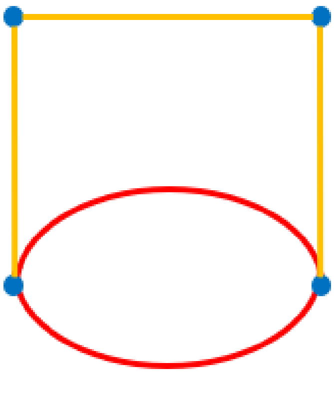
Többszörös él: Ha két pont között egynél több élt húzunk.



Hurok: Olyan él, amelynek a két végpontja ugyanaz a pont.



Egyszerű gráf: Ha nincs benne hurok vagy többszörös él.



Nem egyszerű gráf: Ha van benne hurok vagy többszörös él.

Kiválasztás

$$\binom{n}{k} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}! \cdot (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k})!}$$

Számológépen: $n \rightarrow nCr \rightarrow k$

Példa:

$$\binom{6}{2} = \mathbf{15}$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cancel{\cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1 \cancel{\cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \mathbf{15}$$

<u>Számológépen:</u>

Típuspéldák

	Variáció	Permutáció	Kombináció
Miről ismerhető fel?	• Jelszavak • Számkombinációk • Számkártyák • Dobogós helyezések alakulása • Fagylalt gombócok variálása	• Sorba rendezés • Ülésrend padon, asztalon, moziban, stb… • Fagylalt gombócok sorrendje • Felvonuláson résztvevők sorrendje	• Kiválasztás • Dobogós helyezettek kiválasztása • Ajándékok kiosztása • Jegy lyukasztás • Sokszögek átlóinak száma • Kártyák húzása • Lottó szelvény kitöltése

Valószínűségszámítás

$$P = \frac{kedvező\ elemi\ események}{összes\ elemi\ esemény}$$

Visszatevéses mintavétel

Jelölések:

Hibás / Selejtes / Rossz

$\boldsymbol{P_{hibás} = P_{selejtes} = P_{rossz}}$

Jó / Hibátlan

$\boldsymbol{P_{jó} = P_{hibátlan}}$

$\boldsymbol{P_{selejtes}}$

$\boldsymbol{P_{jó} = 1 - P_{selejtes}}$

$$\boldsymbol{P_{selejtes}} = \binom{\boldsymbol{húzások\ száma}}{\boldsymbol{jó/rossz\ húzások\ száma}} \cdot \boldsymbol{P_{rossz}}^{\boldsymbol{rossz\ húzások\ száma}} \cdot \boldsymbol{P_{jó}}^{\boldsymbol{jó\ húzások\ száma}}$$

Visszatevés nélküli mintavétel

Kedvező esetek száma: $\binom{jó\ darab\ száma}{jó\ húzások\ száma} \cdot \binom{rossz\ darab\ száma}{rossz\ húzások\ száma}$

Összes eset száma: $\binom{összes\ darab\ szám}{húzások\ száma}$

Visszatevéses és visszatevés nélküli feladatok felismerése

	Visszatevéses	**Visszatevés nélküli**
Példák	Alkatrészek 11-es rúgás Fej vagy írás	Cukorka (Ennivaló) Lottó Kártyák
Kulcsszavak	Jó Rossz Hibás Selejt	
	20 alkatrészből 2 hibás. Mennyi a valószínűsége, hogy ha 5 alkatrészt választunk, akkor 2 hibás lesz közte?	
	$P_{hibás} = \frac{2}{20} = \mathbf{0,1}$ $P_{jó} = 1 - P_{hibás} = 1 - 0{,}1 = \mathbf{0,9}$ $\boldsymbol{P_2} = \binom{5}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^3 = \mathbf{0,0729}$	Összes eset: $\binom{20}{5} = \mathbf{15\ 504}$ Kedvező esetek: $\binom{2}{2} \cdot \binom{18}{3} = 1 \cdot 816 = \mathbf{816}$ $\boldsymbol{P_2} = \frac{kedvező\ esetek}{összes\ eset} = \frac{816}{15\ 504} = \mathbf{0,0526}$

Hatvány, gyök, logaritmus

Hatványozás

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots}_{n - szer}$$

$a: alap$

$n: kitevő$

Példák:

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{8}$

$5^2 = 5 \cdot 5 = \mathbf{25}$

$1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \mathbf{1}$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \mathbf{10\,000}$

$x^2 = \boldsymbol{x \cdot x}$

$y^3 = \boldsymbol{y \cdot y \cdot y}$

Nevezetes hatványok

2. Hatványok (x^2)	
x	x^2
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169

3. Hatványok (x^3)	
x	x^3
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
10	1 000

4. Hatványok (x^4)	
x	x^4
1	1
2	16
3	81
4	256
5	625
10	10 000

2 hatványai (2^x)	
x	2^x
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1 024

10 hatványai (10^x)	
x	10^x
0	1
1	10
2	100
3	1 000
4	10 000
6	1 000 000
9	1 000 000 000

Hatvány azonosságok

Elnevezés	Azonosság	Példák	
E1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$ $x^4 \cdot x^7 = 2^{4+7} = x^{11}$	$2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2$ $x^{y+4} = x^y \cdot x^4$
E2	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{2^7}{2^2} = 2^{7-2} = 2^5$ $\frac{x^2}{x^4} = 2^{2-4} = x^{-2}$	$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3}$ $x^{y-5} = \frac{x^y}{x^5}$
E3	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^x \cdot 3^x = (2 \cdot 3)^x = 6^x$ $x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2$	$10^x = (2 \cdot 5)^x = 2^x \cdot 5^x$ $(x \cdot y)^4 = x^4 \cdot y^4$
E4	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{3^x}{5^x} = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ $\frac{x^5}{y^5} = \left(\frac{x}{y}\right)^5$	$\left(\frac{7}{8}\right)^x = \frac{7^x}{8^x}$ $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$
E5	$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \cdot m}$	$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$ $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$ $(4^7)^9 = (4^9)^7$	$5^{2 \cdot 4} = (5^2)^4$ $x^{7 \cdot 5} = (x^7)^5$ $(x^3)^8 = (x^8)^3$
E6	$a^1 = a$	$2^1 = 2$ $x^1 = x$	$5 = 5^1$ $y = y^1$
E7	$a^0 = 1$	$3^0 = 1$ $x^0 = 1$	$1 = 6^0$ $1 = x^0$
E8	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$ $x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{3} = 3^{-1}$ $\frac{1}{y} = y^{-1}$
E9	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ $x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$	$\frac{1}{5^4} = 5^{-4}$ $\frac{1}{y^5} = y^{-5}$

Logaritmus azonosságok

Elnevezés	Azonosság	Példák
L1	$\log_a b = c \to a^c = b$	$\log_2 x = 5 \to 2^5 = x$ $\log_3 27 = x \to 3^x = 27$ $\log_x 16 = 4 \to x^4 = 16$
L2	$\log_{10} x = \lg x = \log x$	-
L3	$\log_e x = \ln x$	-
L4	$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$	$\log_3(2 \cdot x) = \log_3 2 + \log_3 x$ $\log_5 7 + \log_5 y = \log_5(7 \cdot y)$
L5	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	$\log_8\left(\frac{3}{10}\right) = \log_8 3 - \log_8 10$ $\log_4 2 - \log_4 8 = \log_4\left(\frac{2}{8}\right)$
L6	$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$	$\log_5 x^3 = 3 \cdot \log_5 x$ $4 \cdot \log_3 x = \log_3 x^4$
L7	$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$	$\log_9 \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} \cdot \log_9 3$ $\frac{1}{3} \cdot \log_2 8 = \log_2 \sqrt[3]{8}$
L8	$\log_a a = 1$	$\log_2 2 = 1$ $\quad 1 = \log_5 5$ $\log_x x = 1$ $\quad 1 = \log_y y$
L9	$\log_a 1 = 0$	$\log_2 1 = 0$ $\quad 0 = \log_5 1$ $\log_x 1 = 0$ $\quad 0 = \log_x 1$
L10	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_5 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 5}$
L11	$b = \log_a a^b$	$2 = \log_3 3^2$
L12	$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$	$2^{\log_4 x} = x^{\log_4 2}$

Gyökvonás azonosságok

Elnevezés	Azonosság	Példák
GY1	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$ $\sqrt{5\cdot x}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{x}$
GY2	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{x}{7}}$ $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{16}{4}}=\sqrt{4}=2$
GY3	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	$\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{8\cdot x}$ $\sqrt[8]{2\cdot 9}=\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[8]{9}$
GY4	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ $\frac{\sqrt[7]{1}}{\sqrt[7]{x}}=\sqrt[7]{\frac{1}{x}}$
GY5	$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[5]{2}=2^{\frac{1}{5}}$ $\quad 10^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{10}$ $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ $\quad x^{\frac{1}{9}}=\sqrt[9]{x}$
GY6	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[7]{2^2}=2^{\frac{2}{7}}$ $\quad 3^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{3^5}$ $\sqrt[3]{x^5}=x^{\frac{5}{3}}$ $\quad x^{\frac{10}{7}}=\sqrt[\text{ű}]{x^{10}}$
GY7	$\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	$\sqrt[3]{8^6}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^6$
GY8	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}=\sqrt[n\cdot m]{a^{n+m}}$	$\sqrt[2]{x}\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[2\cdot 3]{x^{2+3}}=\sqrt[6]{x^5}$
GY9	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a^{m-n}}$	$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[7]{x}}=\sqrt[7\cdot 3]{x^{7-3}}=\sqrt[21]{x^4}$

Exponenciális egyenletek

- Cél: Végén ilyen alakban legyen az egyenlet:

  $2^{\Delta} = 2^{\boxplus}$

  $3^{\Delta} = 3^{\boxplus}$

  $4^{\Delta} = 4^{\boxplus}$

  $5^{\Delta} = 5^{\boxplus}$

- Ha ugyanaz az alap mind a két oldalon és rajta kívül nincs más, akkor:

➢ Ha az $alap > 1 \rightarrow Sz.m.n.$ $\text{Pl.}: 2,\ 3,\ 4,\ 5, \frac{8}{7}, \frac{9}{2}, \frac{10}{9}, \frac{120}{37} \dots$

➢ Ha az $alap < 1 \rightarrow Sz.m.cs.$ $\text{Pl.}: \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{99}{100}, \frac{15}{26} \dots$

Exponenciális egyenlőtlenségek

- Cél: Ugyanaz, mint egyenleteknél, ugyanaz legyen az alap mind a két oldalon
- Ha ugyanaz az alap mind a két oldalon és rajta kívül nincs más, akkor:

➢ Ha az $alap > 1 \rightarrow Sz.m.n.$ $\text{Pl.}: 2,\ 3,\ 4,\ 5, \frac{8}{7}, \frac{9}{2}, \frac{10}{9}, \frac{120}{37} \dots \rightarrow \boldsymbol{Reláció\ jel\ marad}$

➢ Ha az $alap < 1 \rightarrow Sz.m.cs.$ $\text{Pl.}: \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{99}{100}, \frac{15}{26} \dots \rightarrow \boldsymbol{Realáció\ jel\ megfordul}$

Logaritmus értelmezési tartomány

$\log_{a} b = c$

$a > 0,\ \ a \neq 1$

$b > 0$

$c \in \mathbb{R}$

Logaritmus egyenletek

Logaritmus egyenletek

- Mindig az értelmezési tartománnyal kezdjünk
- Ugyanaz a cél, mint exponenciális egyenleteknél
- Végén ilyen alakban legyen az egyenlet:

  $\log_2 \Delta = \log_2 ⊞$ $\qquad$ $\log_2 \Delta = szám$

  $\log_3 \Delta = \log_3 ⊞$ $\qquad$ $\log_3 \Delta = szám$

  $\log_4 \Delta = \log_4 ⊞$ $\qquad$ $\log_4 \Delta = szám$

- Ha ugyanaz az alap mind a két oldalon és rajta kívül nincs más, akkor:

➢ Ha az $alap > 1 \rightarrow Sz.m.n.$ $\quad$ Pl.: $\log_2, \log_3, \log_4, \log_{\frac{5}{3}} \ldots$

➢ Ha az $alap < 1 \rightarrow Sz.m.cs.$ $\quad$ Pl.: $\log_{\frac{1}{2}}, \log_{\frac{3}{4}}, \log_{\frac{5}{12}}, \log_{\frac{36}{91}} \ldots$

Logaritmus egyenlőtlenségek

- Cél: Ugyanaz, mint egyenleteknél, ugyanaz legyen az alap mind a két oldalon
- Ha ugyanaz az alap mind a két oldalon és rajta kívül nincs más, akkor:

➢ Ha az $alap > 1 \rightarrow Sz.m.n.$ $\quad$ Pl.: $\log_2, \log_3, \log_4, \log_{\frac{5}{3}} \ldots \rightarrow \boldsymbol{Reláció\ jel\ marad}$

➢ Ha az $alap < 1 \rightarrow Sz.m.cs.$ $\quad$ Pl.: $\log_{\frac{1}{2}}, \log_{\frac{5}{12}}, \log_{\frac{36}{91}} \ldots \rightarrow \boldsymbol{Realáció\ jel\ megfordul}$

Gyök egyenletek

- $\sqrt{\Delta} = ⊠ \rightarrow \Delta = ⊠^2$

  $\Delta \geq 0$

  $⊠ \geq 0$

- Gyökvonás eltűntetése négyzetre emeléssel
- Négyzet eltűntetése gyökvonással
- Kezdjünk mindig kezdeti feltétellel

Koordinátageometria

Vektorok jelölése

a

$\underline{a}$

$\vec{a}$

Vektorok megadása

$\underline{a}(2;1)$

$\underline{a} = (2;1)$

$\underline{a} = \left(2\underline{i} + 1\underline{j} + 0\underline{k}\right)$

$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektorok összeadása

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x + b_x} \\ \boldsymbol{a_y + b_y} \end{bmatrix}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

Vektorok kivonása

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x - b_x} \\ \boldsymbol{a_y - b_y} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_x - a_x} \\ \boldsymbol{b_y - a_y} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}} = -(\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}})$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

Két pont távolsága

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x - B_x \\ A_y - B_y \end{bmatrix}$$

Kétpont távolsága:

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}| = \sqrt{\boldsymbol{AB_x}^2 + \boldsymbol{AB_y}^2}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Kétpont távolsága:

$$|\boldsymbol{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$$

Vektor hossza

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$|\underline{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{\boldsymbol{a_x}^2 + \boldsymbol{a_y}^2}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{4^2 + 1^1} = \sqrt{\mathbf{17}}$$

Skaláris szorzat

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a_x} \cdot \boldsymbol{b_x} + \boldsymbol{a_y} \cdot \boldsymbol{b_y}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 5 = \mathbf{41}$$

Két vektor által bezárt szög

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a_x}^2 + \boldsymbol{a_y}^2}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{\boldsymbol{b_x}^2 + \boldsymbol{b_y}^2}$$

Képlet:

$$\boldsymbol{\underline{a} \cdot \underline{b}} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \boldsymbol{\cos \alpha}$$

Rendezés $\cos \alpha$-ra

Ha a skaláris szorzat:

- **Pozitív → $0° < \alpha < 90°$**
  - **$0 \rightarrow \alpha = 90°$**

Negatív → $90° < \alpha < 180°$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\underline{a} \cdot \underline{b}} = 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 = \boldsymbol{-7}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \boldsymbol{\sqrt{10}}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \boldsymbol{\sqrt{13}}$$

Képlet:

$$\boldsymbol{\underline{a} \cdot \underline{b}} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \boldsymbol{\cos \alpha}$$

$$\boldsymbol{-7} = \boldsymbol{\sqrt{10}} \cdot \boldsymbol{\sqrt{13}} \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{-7}{\sqrt{130}} = \cos \alpha$$

$$-0{,}614 = \cos \alpha$$

$$\boldsymbol{127{,}875° = \alpha}$$

Felezőpont

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F_x = \frac{A_x + B_x}{2}}$$

$$\boldsymbol{F_y = \frac{A_y + B_y}{2}}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F_x} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = \boldsymbol{4}$$

$$\boldsymbol{F_y} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = \boldsymbol{1}$$

$$\boldsymbol{F = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Harmadolópont

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

A-hoz közelebbi:

$$\boldsymbol{H_{1x} = \frac{2 \cdot A_x + B_x}{3}}$$

$$\boldsymbol{H_{1y} = \frac{2 \cdot A_y + B_y}{3}}$$

B-hez közelebbi:

$$\boldsymbol{H_{2x} = \frac{A_x + 2 \cdot B_x}{3}}$$

$$\boldsymbol{H_{2y} = \frac{A_y + 2 \cdot B_y}{3}}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A-hoz közelebbi:

$$\boldsymbol{H_{1x}} = \frac{2 \cdot 1 + 4}{3} = \frac{6}{3} = \boldsymbol{2}$$

$$\boldsymbol{H_{1y}} = \frac{2 \cdot 2 + 5}{3} = \frac{9}{3} = \boldsymbol{3}$$

B-hez közelebbi:

$$\boldsymbol{H_{2x}} = \frac{1 + 2 \cdot 4}{3} = \frac{6}{3} = \boldsymbol{3}$$

$$\boldsymbol{H_{2y}} = \frac{2 + 2 \cdot 5}{3} = \frac{12}{3} = \boldsymbol{4}$$

$$\boldsymbol{H_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{H_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tetszőleges osztópont

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

n-edelő pont

A-hoz közelebbi:

$$\boldsymbol{T_{1x} = \frac{(n-1) \cdot A_x + B_x}{n}}$$

$$\boldsymbol{T_{1y} = \frac{(n-1) \cdot A_y + B_y}{n}}$$

B-hez közelebbi:

$$\boldsymbol{T_{2x} = \frac{A_x + (n-1) \cdot B_x}{n}}$$

$$\boldsymbol{T_{2y} = \frac{A_y + (n-1) \cdot B_y}{n}}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5-ödölő pont

A-hoz közelebbi:

$$\boldsymbol{T_{1x}} = \frac{4 \cdot 3 + 8}{5} = \boldsymbol{4}$$

$$\boldsymbol{T_{1y}} = \frac{4 \cdot 2 + 2}{5} = \boldsymbol{2}$$

B-hez közelebbi:

$$\boldsymbol{T_{2x}} = \frac{1 + 4 \cdot 8}{5} = \boldsymbol{\frac{33}{5}}$$

$$\boldsymbol{T_{2y}} = \frac{2 + 4 \cdot 2}{5} = \boldsymbol{2}$$

Súlypont

Szabály	Példa
$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{S_x} = \dfrac{\boldsymbol{A_x + B_x + C_x}}{\boldsymbol{3}}$	$\boldsymbol{S_x} = \dfrac{-2+1+4}{3} = \dfrac{3}{3} = \mathbf{1}$
$\boldsymbol{S_y} = \dfrac{\boldsymbol{A_y + B_y + C_y}}{\boldsymbol{3}}$	$\boldsymbol{S_y} = \dfrac{4+5+(-3)}{3} = \dfrac{6}{3} = \mathbf{2}$
$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S_x} \\ \boldsymbol{S_y} \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$

Irányvektor

Szabály	Példa
$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$	$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x} \\ \boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{a_x} \\ -\boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$

Irányvektor 2 pontból

Szabály	Példa
$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{v_1} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B_x - A_x} \\ \boldsymbol{B_y - A_y} \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{v_1} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{v_2} = \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_x - B_x} \\ \boldsymbol{A_y - B_y} \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{v_2} = \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}$

Meredekség

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x} \\ \boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{a_x} \\ -\boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{v_y}}{\boldsymbol{v_x}}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$$

Normálvektor

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x} \\ \boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{a_x} \\ -\boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_y} \\ -\boldsymbol{v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_y} \\ -\boldsymbol{a_x} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{v_y} \\ \boldsymbol{v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{a_y} \\ \boldsymbol{a_x} \end{bmatrix}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_y} \\ -\boldsymbol{v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-5} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{v_y} \\ \boldsymbol{v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

Egyenes egyenlete

Szabály

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n_y} \\ \boldsymbol{n_y} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{y_0} \end{bmatrix}$$

P olyan pont, ami rajta van az egyenesen.

Egyenes egyenlete:

$$\boldsymbol{n_x \cdot x + n_y \cdot y = n_x \cdot x_0 + n_y \cdot y_0}$$

Példa

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Egyenes egyenlete:

$$5 \cdot x + 1 \cdot y = 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 2$$

$$5x + y = -15 + 2$$

$$\boldsymbol{5x + y = -13}$$

Két egyenes metszéspontja

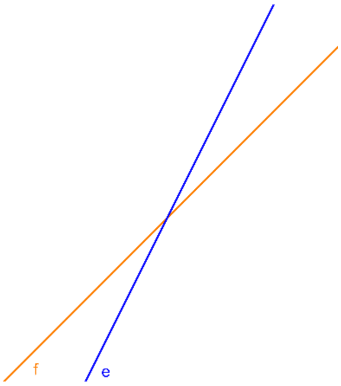
Szabály

$e1$: $x + y = 3$

$e2$: $2x + 3y = 4$

Egyenletrendszerként oldjuk meg.

Két egyenes viszonya



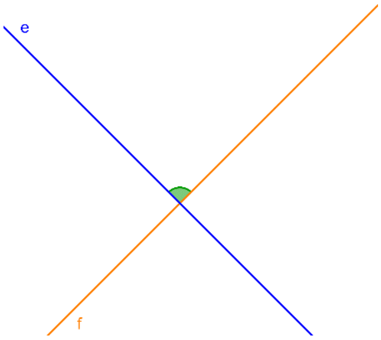
Metszik egymást

→ 1 metszéspont

$\boldsymbol{m_e \neq m_f}$

$\boldsymbol{v_e \neq v_f}$

$\boldsymbol{n_e \neq n_f}$



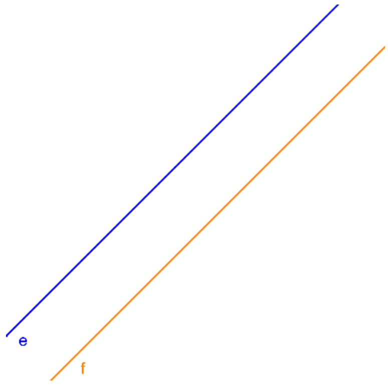
Egymásra merőlegesek

→ 1 metszéspont

$\boldsymbol{m_e \neq m_f}$

$\boldsymbol{v_e = n_f}$

$\boldsymbol{n_e = v_f}$



Párhuzamosak

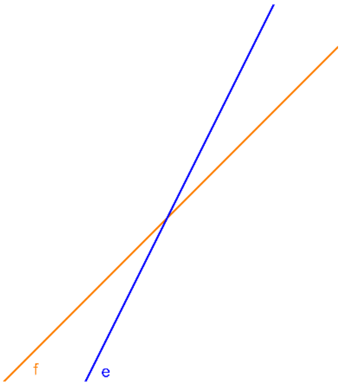
→ 0 metszéspont

$\boldsymbol{m_e = m_f}$

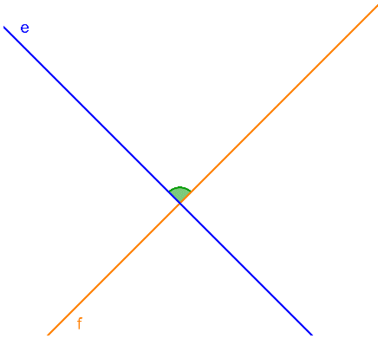
$\boldsymbol{v_e = v_f}$

$\boldsymbol{n_e = n_f}$

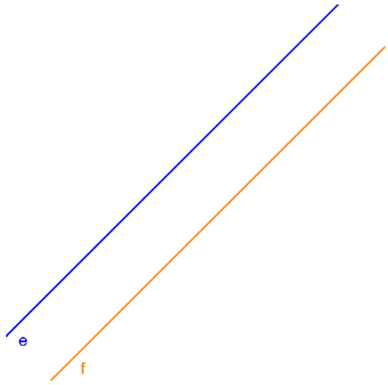
Két egyenes távolsága



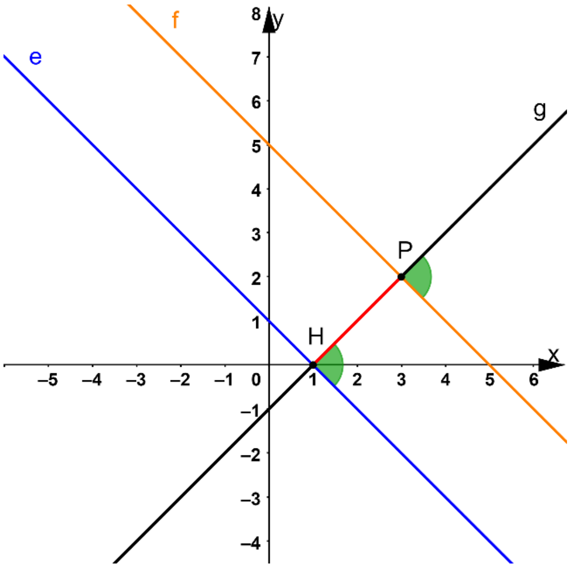
Metszik egymást
→ 1 metszéspont
Nem számolunk távolságot



Egymásra merőlegesek
→ 1 metszéspont
Nem számolunk távolságot



Párhuzamosak
→ 0 metszéspont
Csak itt számolunk távolságot



1. lépés: Megnézzük, hogy a két egyenes párhuzamos-e, ha nem azok nem számolunk távolságot

2. lépés: Felveszünk egy pontot valamelyik egyenesen (P)

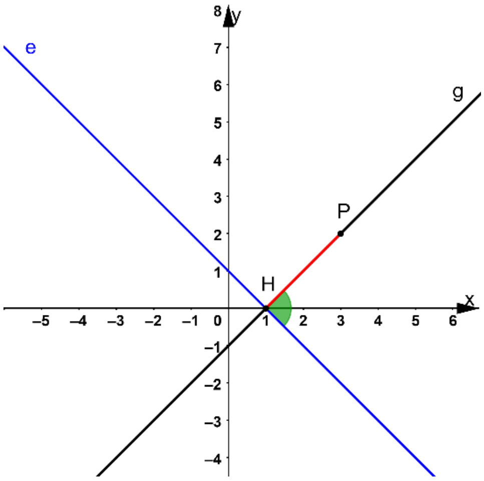
3. lépés: Merőlegest állítunk az egyenesre, ami átmegy a felvett P ponton (g)

4. lépés: Megkeressük az egyenes (g) és a másik egyenes metszéspontját (H)

5. lépés: Felírjuk $\overrightarrow{HP}$ vektort

6. lépés: Kiszámoljuk H és P pontok távolságát, ez a távolság lesz a két egyenes távolsága

Pont és egyenes távolsága



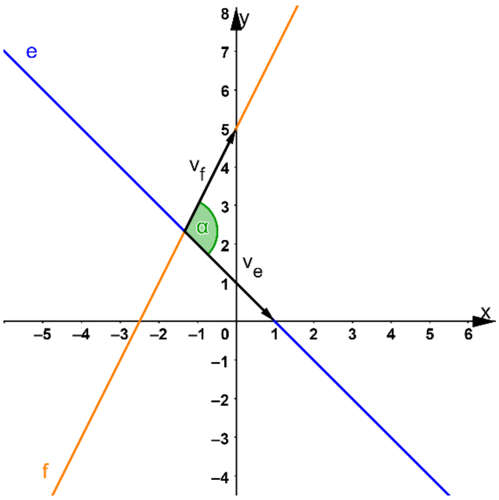
1. lépés: Merőlegest állítunk az egyenesre, ami átmegy P ponton (g)

2. lépés: Megkeressük az egyenes (g) és a másik egyenes (e) metszéspontját (H)

3. lépés: Felírjuk $\overrightarrow{HP}$ vektort

4. lépés: Kiszámoljuk H és P pontok távolságát, ez a távolság lesz a pont és az egyenes távolsága

Két egyenes hajlásszöge



1. lépés: Kiolvassuk az egyenesek normálvektorát

2. lépés: Ebből felírjuk az irányvektort

3. lépés: Kiszámoljuk a két irányvektor skaláris szorzatát, és hosszát

4. lépés Az alábbi képletet alkalmazva kiszámoljuk a szöget: $\boldsymbol{v_e \cdot v_f = |v_e| \cdot |v_f| \cdot \cos\alpha}$