Koordinátageometria

Vektorok jelölése

a

$\underline{a}$

$\vec{a}$

Vektorok megadása

$\underline{a}(2; 1)$

$\underline{a} = (2; 1)$

$\underline{a} = \left(2\underline{i} + 1\underline{j} + 0\underline{k}\right)$

$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektorok összeadása

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x + b_x} \\ \boldsymbol{a_y + b_y} \end{bmatrix}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

Vektorok kivonása

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x - b_x} \\ \boldsymbol{a_y - b_y} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_x - a_x} \\ \boldsymbol{b_y - a_y} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}} = -(\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}})$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

Két pont távolsága

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x - B_x \\ A_y - B_y \end{bmatrix}$$

Kétpont távolsága:

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}| = \sqrt{\boldsymbol{AB_x}^2 + \boldsymbol{AB_y}^2}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Kétpont távolsága:

$$|\boldsymbol{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$$

Vektor hossza

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$|\underline{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{\boldsymbol{a_x}^2 + \boldsymbol{a_y}^2}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{4^2 + 1^1} = \sqrt{\mathbf{17}}$$

Skaláris szorzat

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a_x} \cdot \boldsymbol{b_x} + \boldsymbol{a_y} \cdot \boldsymbol{b_y}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 5 = \mathbf{41}$$

Két vektor által bezárt szög

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a_x}^2 + \boldsymbol{a_y}^2}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{\boldsymbol{b_x}^2 + \boldsymbol{b_y}^2}$$

Képlet:

$$\boldsymbol{\underline{a} \cdot \underline{b}} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \boldsymbol{\cos \alpha}$$

Rendezés $\cos \alpha$-ra

Ha a skaláris szorzat:

- **Pozitív → $0° < \alpha < 90°$**
  - **$0 \rightarrow \alpha = 90°$**

Negatív → $90° < \alpha < 180°$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\underline{a} \cdot \underline{b}} = 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 = \boldsymbol{-7}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \boldsymbol{\sqrt{10}}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \boldsymbol{\sqrt{13}}$$

Képlet:

$$\boldsymbol{\underline{a} \cdot \underline{b}} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \boldsymbol{\cos \alpha}$$

$$\boldsymbol{-7} = \boldsymbol{\sqrt{10}} \cdot \boldsymbol{\sqrt{13}} \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{-7}{\sqrt{130}} = \cos \alpha$$

$$-0{,}614 = \cos \alpha$$

$$\boldsymbol{127{,}875° = \alpha}$$

Felezőpont

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F_x = \frac{A_x + B_x}{2}}$$

$$\boldsymbol{F_y = \frac{A_y + B_y}{2}}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F_x} = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = \boldsymbol{4}$$

$$\boldsymbol{F_y} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = \boldsymbol{1}$$

$$\boldsymbol{F = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Harmadolópont

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

A-hoz közelebbi:

$$\boldsymbol{H_{1x} = \frac{2 \cdot A_x + B_x}{3}}$$

$$\boldsymbol{H_{1y} = \frac{2 \cdot A_y + B_y}{3}}$$

B-hez közelebbi:

$$\boldsymbol{H_{2x} = \frac{A_x + 2 \cdot B_x}{3}}$$

$$\boldsymbol{H_{2y} = \frac{A_y + 2 \cdot B_y}{3}}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A-hoz közelebbi:

$$\boldsymbol{H_{1x}} = \frac{2 \cdot 1 + 4}{3} = \frac{6}{3} = \boldsymbol{2}$$

$$\boldsymbol{H_{1y}} = \frac{2 \cdot 2 + 5}{3} = \frac{9}{3} = \boldsymbol{3}$$

B-hez közelebbi:

$$\boldsymbol{H_{2x}} = \frac{1 + 2 \cdot 4}{3} = \frac{6}{3} = \boldsymbol{3}$$

$$\boldsymbol{H_{2y}} = \frac{2 + 2 \cdot 5}{3} = \frac{12}{3} = \boldsymbol{4}$$

$$\boldsymbol{H_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{H_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tetszőleges osztópont

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

n-edelő pont

A-hoz közelebbi:

$$\boldsymbol{T_{1x} = \frac{(n-1) \cdot A_x + B_x}{n}}$$

$$\boldsymbol{T_{1y} = \frac{(n-1) \cdot A_y + B_y}{n}}$$

B-hez közelebbi:

$$\boldsymbol{T_{2x} = \frac{A_x + (n-1) \cdot B_x}{n}}$$

$$\boldsymbol{T_{2y} = \frac{A_y + (n-1) \cdot B_y}{n}}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5-ödölő pont

A-hoz közelebbi:

$$\boldsymbol{T_{1x}} = \frac{4 \cdot 3 + 8}{5} = \boldsymbol{4}$$

$$\boldsymbol{T_{1y}} = \frac{4 \cdot 2 + 2}{5} = \boldsymbol{2}$$

B-hez közelebbi:

$$\boldsymbol{T_{2x}} = \frac{1 + 4 \cdot 8}{5} = \boldsymbol{\frac{33}{5}}$$

$$\boldsymbol{T_{2y}} = \frac{2 + 4 \cdot 2}{5} = \boldsymbol{2}$$

Súlypont

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S_x} = \frac{\boldsymbol{A_x + B_x + C_x}}{\boldsymbol{3}}$$

$$\boldsymbol{S_y} = \frac{\boldsymbol{A_y + B_y + C_y}}{\boldsymbol{3}}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S_x} \\ \boldsymbol{S_y} \end{bmatrix}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S_x} = \frac{-2 + 1 + 4}{3} = \frac{3}{3} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{S_y} = \frac{4 + 5 + (-3)}{3} = \frac{6}{3} = \mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Irányvektor

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x} \\ \boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-a_x} \\ \boldsymbol{-a_y} \end{bmatrix}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

Irányvektor 2 pontból

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_1} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B_x - A_x} \\ \boldsymbol{B_y - A_y} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_x - B_x} \\ \boldsymbol{A_y - B_y} \end{bmatrix}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_1} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

Meredekség

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x} \\ \boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{a_x} \\ -\boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{v_y}}{\boldsymbol{v_x}}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$$

Normálvektor

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_x} \\ \boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{a_x} \\ -\boldsymbol{a_y} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_y} \\ -\boldsymbol{v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_y} \\ -\boldsymbol{a_x} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{v_y} \\ \boldsymbol{v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{a_y} \\ \boldsymbol{a_x} \end{bmatrix}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_y} \\ -\boldsymbol{v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-5} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{v_y} \\ \boldsymbol{v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

Egyenes egyenlete

Szabály

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n_y} \\ \boldsymbol{n_y} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{y_0} \end{bmatrix}$$

P olyan pont, ami rajta van az egyenesen.

Egyenes egyenlete:

$$\boldsymbol{n_x \cdot x + n_y \cdot y = n_x \cdot x_0 + n_y \cdot y_0}$$

Példa

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Egyenes egyenlete:

$$5 \cdot x + 1 \cdot y = 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 2$$

$$5x + y = -15 + 2$$

$$\boldsymbol{5x + y = -13}$$

Két egyenes metszéspontja

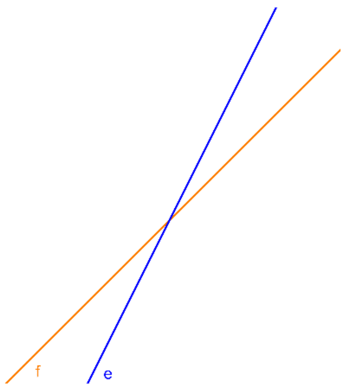
Szabály

$e1$: $x + y = 3$

$e2$: $2x + 3y = 4$

Egyenletrendszerként oldjuk meg.

Két egyenes viszonya



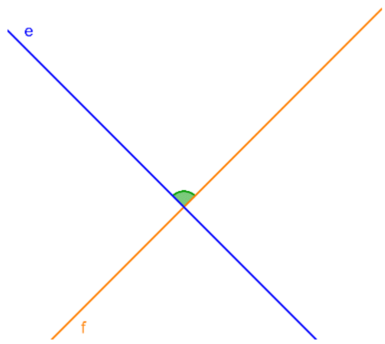
Metszik egymást

→ 1 metszéspont

$\boldsymbol{m_e \neq m_f}$

$\boldsymbol{v_e \neq v_f}$

$\boldsymbol{n_e \neq n_f}$



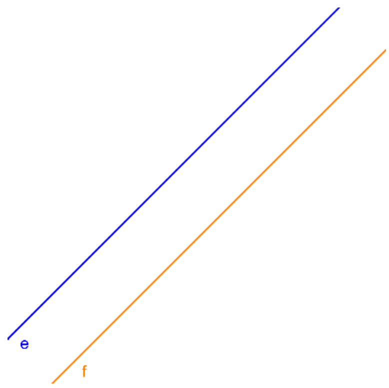
Egymásra merőlegesek

→ 1 metszéspont

$\boldsymbol{m_e \neq m_f}$

$\boldsymbol{v_e = n_f}$

$\boldsymbol{n_e = v_f}$



Párhuzamosak

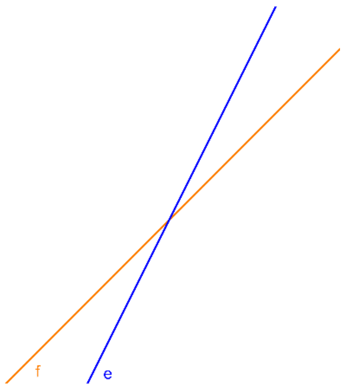
→ 0 metszéspont

$\boldsymbol{m_e = m_f}$

$\boldsymbol{v_e = v_f}$

$\boldsymbol{n_e = n_f}$

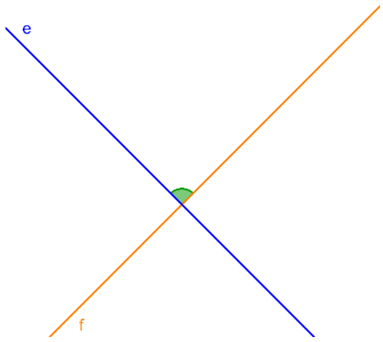
Két egyenes távolsága



Metszik egymást

→ 1 metszéspont

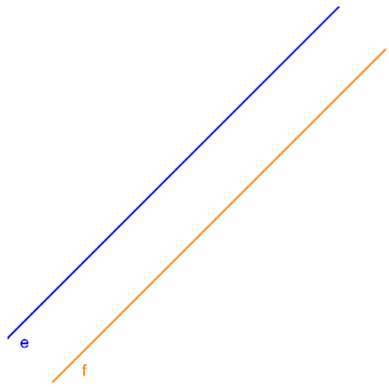
Nem számolunk távolságot



Egymásra merőlegesek

→ 1 metszéspont

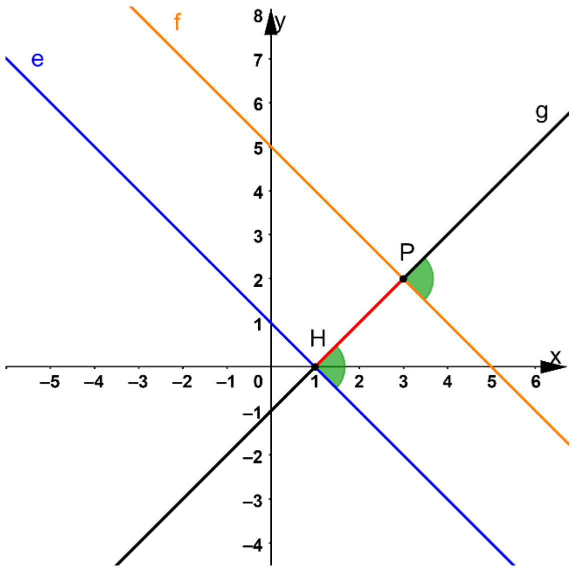
Nem számolunk távolságot



Párhuzamosak

→ 0 metszéspont

Csak itt számolunk távolságot



1. lépés: Megnézzük, hogy a két egyenes párhuzamos-e, ha nem azok nem számolunk távolságot

2. lépés: Felveszünk egy pontot valamelyik egyenesen (P)

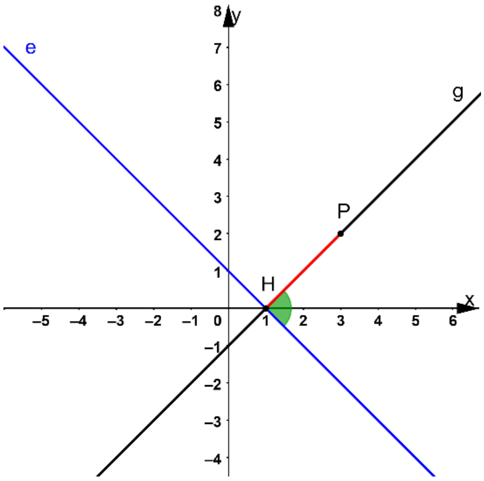
3. lépés: Merőlegest állítunk az egyenesre, ami átmegy a felvett P ponton (g)

4. lépés: Megkeressük az egyenes (g) és a másik egyenes metszéspontját (H)

5. lépés: Felírjuk $\overrightarrow{HP}$ vektort

6. lépés: Kiszámoljuk H és P pontok távolságát, ez a távolság lesz a két egyenes távolsága

Pont és egyenes távolsága



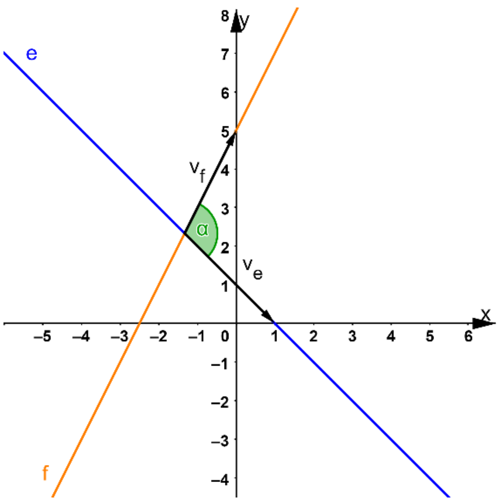
1. lépés: Merőlegest állítunk az egyenesre, ami átmegy P ponton (g)

2. lépés: Megkeressük az egyenes (g) és a másik egyenes (e) metszéspontját (H)

3. lépés: Felírjuk $\overrightarrow{HP}$ vektort

4. lépés: Kiszámoljuk H és P pontok távolságát, ez a távolság lesz a pont és az egyenes távolsága

Két egyenes hajlásszöge



1. lépés: Kiolvassuk az egyenesek normálvektorát

2. lépés: Ebből felírjuk az irányvektort

3. lépés: Kiszámoljuk a két irányvektor skaláris szorzatát, és hosszát

4. lépés Az alábbi képletet alkalmazva kiszámoljuk a szöget: $\boldsymbol{v_e} \cdot \boldsymbol{v_f} = |\boldsymbol{v_e}| \cdot |\boldsymbol{v_f}| \cdot \cos \boldsymbol{\alpha}$