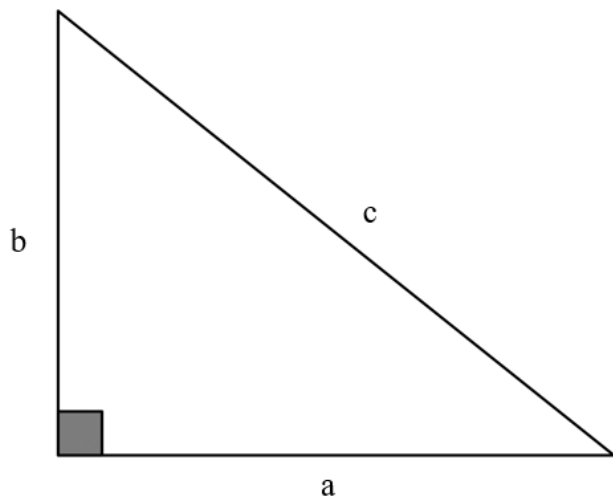


Térgeometria

Pitagorasz tétel

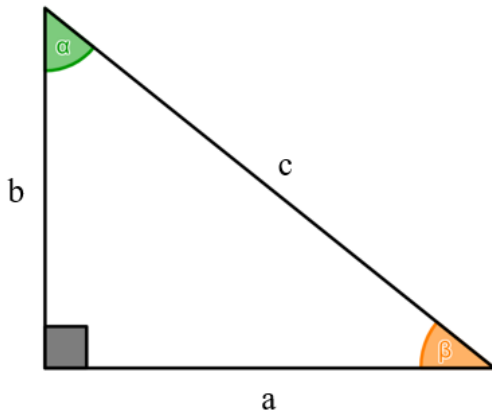


Pitagorasz-tétel:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Szögfüggvények

Színusz (sin)

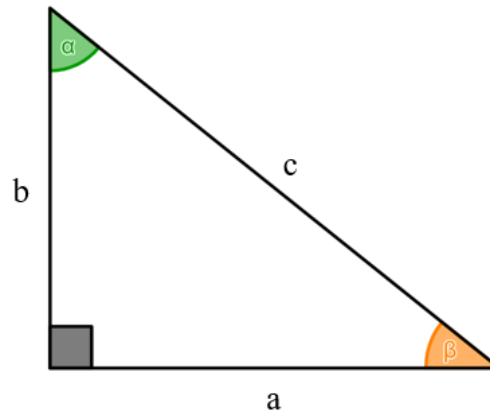


$$\sin \alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

Koszínusz (cos)

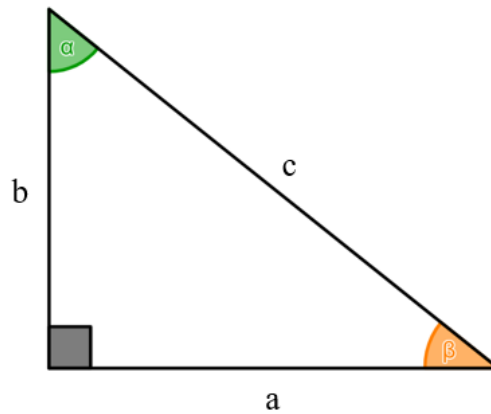


$$\cos \alpha = \frac{\text{szög mellettí befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

Tangens (tg, tan)



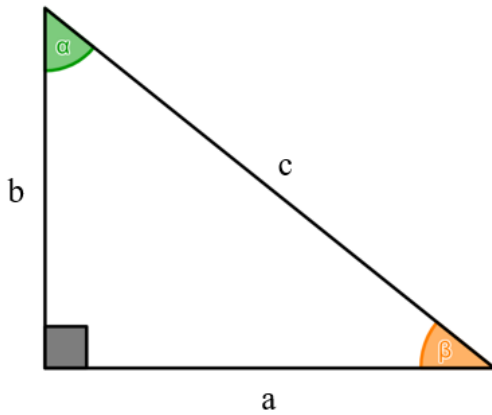
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög mellettí befogó}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{b}{a}$$

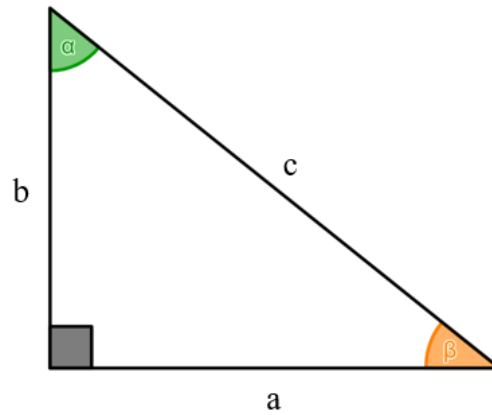
Szinusztétel, koszinusztétel

Szinusztétel



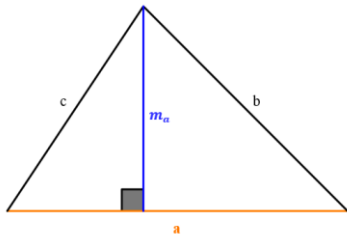
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$
$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$
$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Koszinusztétel



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

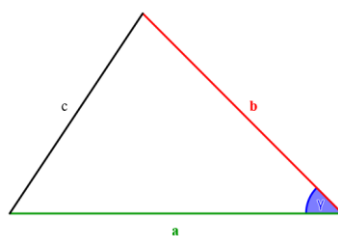
Háromszögek területe



Hagyományos
módszer:

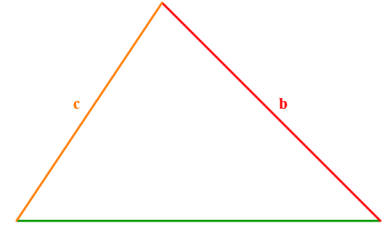
$$T = \frac{\text{alap} \cdot \text{magasság}}{2}$$

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$



Ha ismert két oldal és az
általuk bezárt szög:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$$



Ha ismert mind a 3 oldal

(Héron képlet):

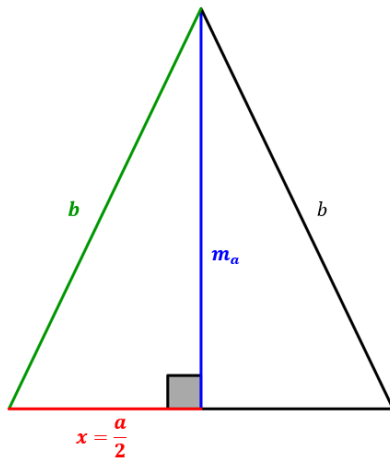
$$T = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

s: félkerület

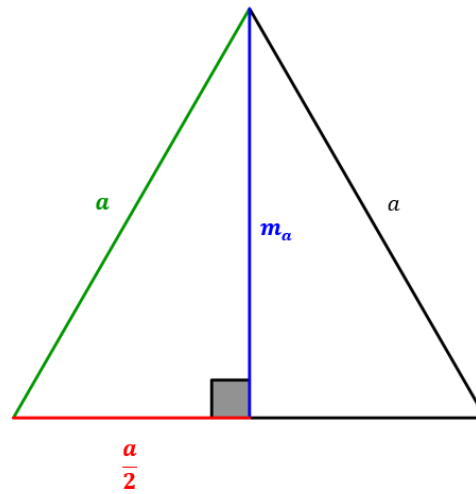
$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

Háromszögek magassága, területe

Egyenlőszárú háromszög



Szabályos háromszög



Pitagorasz-tétel:

$$x^2 + m_a^2 = b^2 \quad / -x^2$$

$$m_a^2 = b^2 - x^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

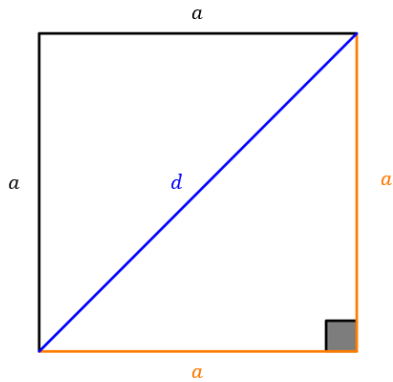
$$m_a = \sqrt{b^2 - x^2}$$

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

Négyzet átlója, területe



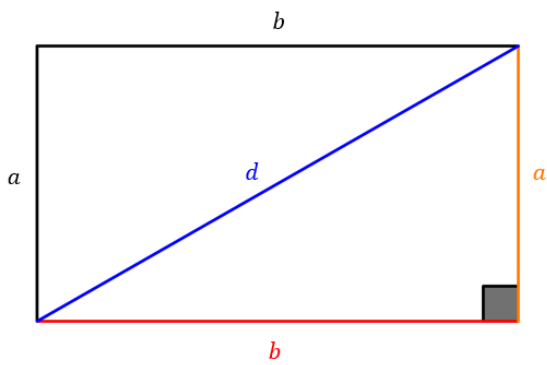
Átló:

$$d = \sqrt{2} \cdot a$$

Terület:

$$T = a \cdot a = a^2$$

Téglalap átlója, területe



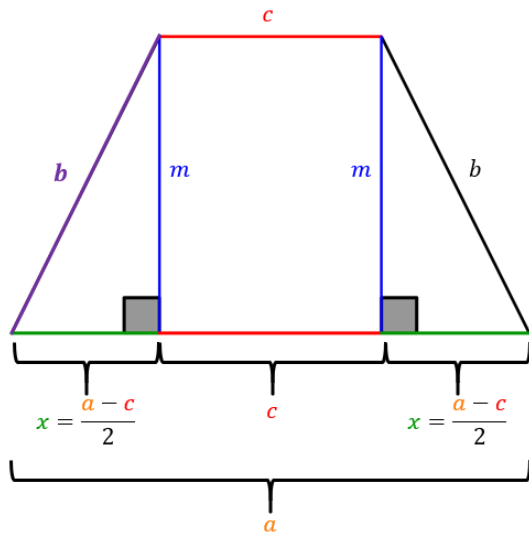
Átló:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Terület:

$$T = a \cdot b$$

Húrtrapéz magassága, területe



Pitagorasz-tétel:

$$x^2 + m^2 = b^2 \quad /-x^2$$

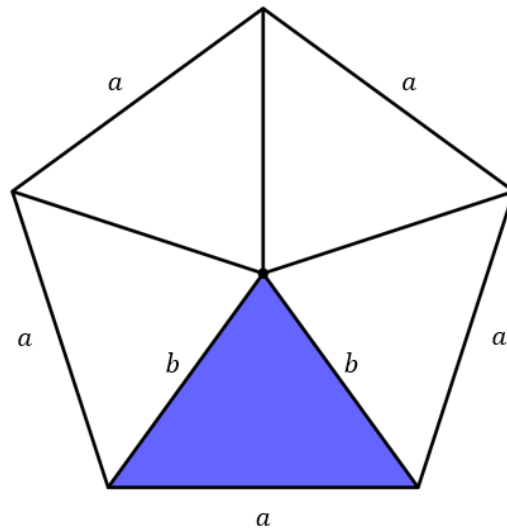
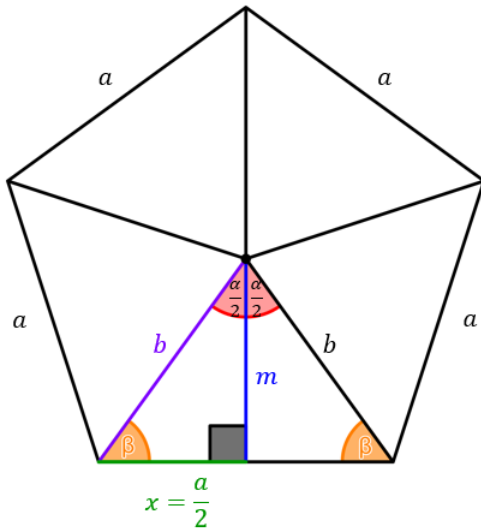
$$m^2 = b^2 - x^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$m = \sqrt{b^2 - x^2}$$

Terület:

$$T = \frac{a + c}{2} \cdot m$$

Ötszög magassága, területe



Középponti szög:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei:

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 54^\circ$$

Középponti szög fele:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

Magasság:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x}{m} \rightarrow m = \frac{x}{\operatorname{tg} \gamma}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m}{x} \rightarrow m = x \cdot \operatorname{tg} \beta$$

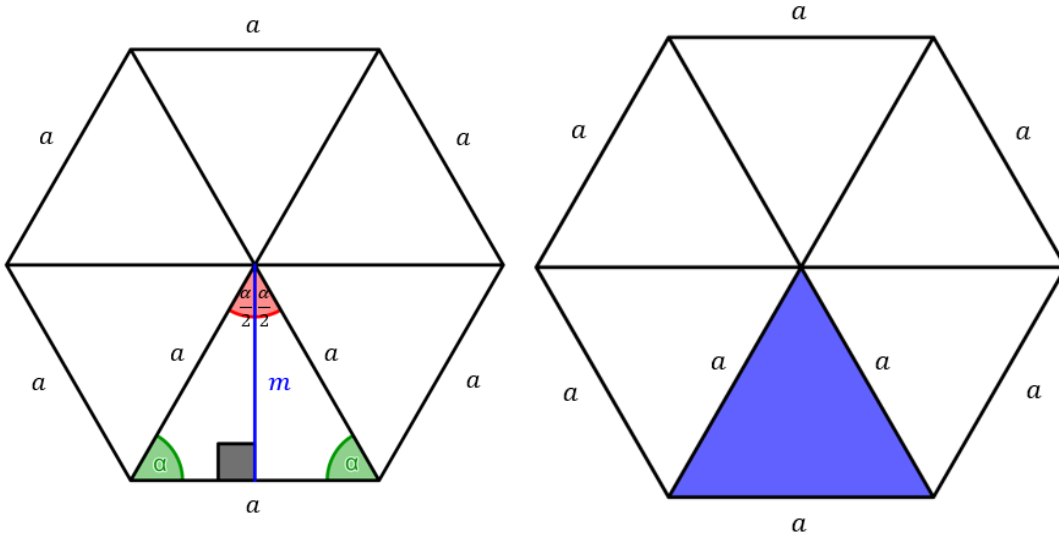
Háromszög területe:

$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot m}{2}$$

Ötszög területe:

$$T = 5 \cdot T_{\Delta}$$

Hatszög magassága, területe



Középponti szög:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

Egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei:

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 60^\circ$$

Középponti szög fele:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Magasság:

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

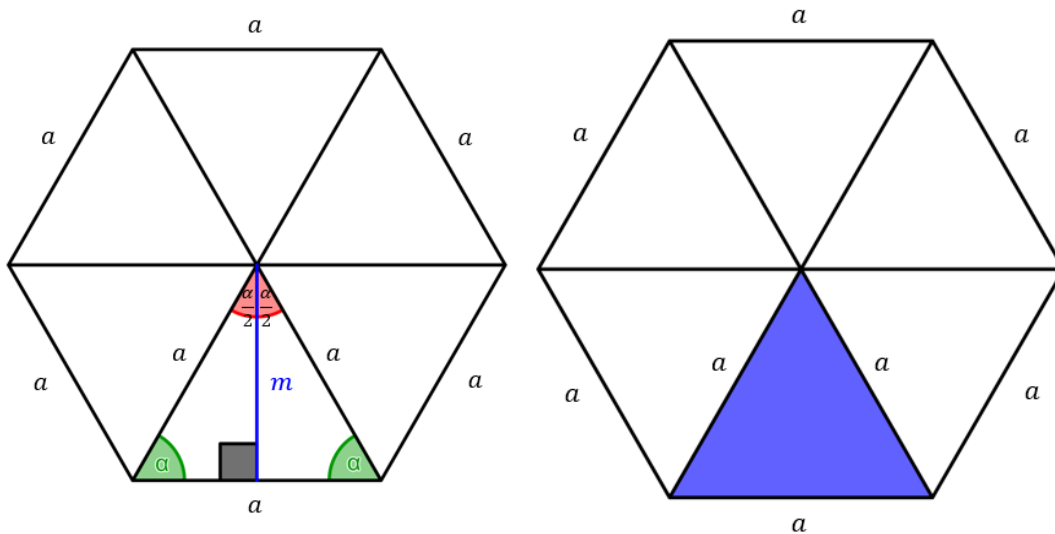
Háromszög területe:

$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot m}{2}$$

Hatszög területe:

$$T = 6 \cdot T_{\Delta}$$

Szabályos sokszögek (n) magassága, területe



Középponti szög:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

Egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei:

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$$

Középponti szög fele:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}$$

Magasság:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x}{m} \rightarrow m = \frac{x}{\operatorname{tg} \gamma}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m}{x} \rightarrow m = x \cdot \operatorname{tg} \beta$$

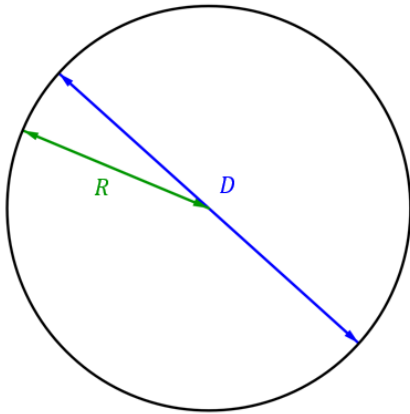
Háromszög területe:

$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot m}{2}$$

Sokszög területe:

$$T = n \cdot T_{\Delta}$$

Kör



Sugár-Átmérő:

$$D = 2 \cdot R$$

$$R = \frac{D}{2}$$

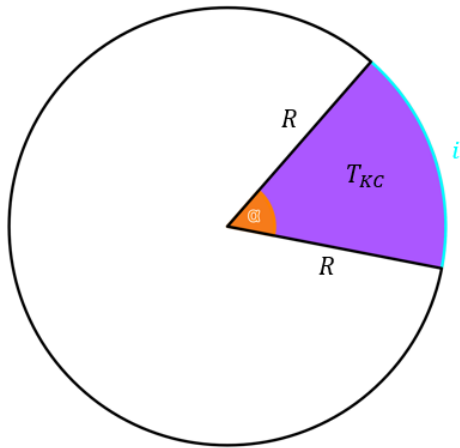
Kerület:

$$K = 2 \cdot R \cdot \pi = D \cdot \pi$$

Terület:

$$T = R^2 \cdot \pi = \frac{D^2}{4} \cdot \pi$$

Kör ívhossza, körcikk területe



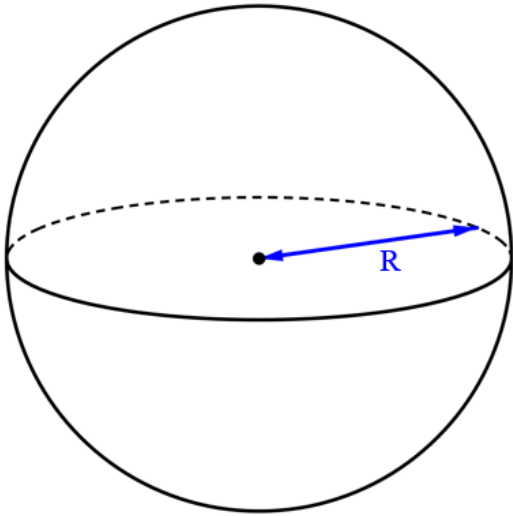
Körív:

$$i = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot K = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \cdot R \cdot \pi = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot R \cdot \pi$$

Körcikk területe:

$$T_{KC} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot T$$

Gömb



Átmérő (D):

$$D = 2 \cdot R$$

Sugár (R):

$$R = \frac{D}{2}$$

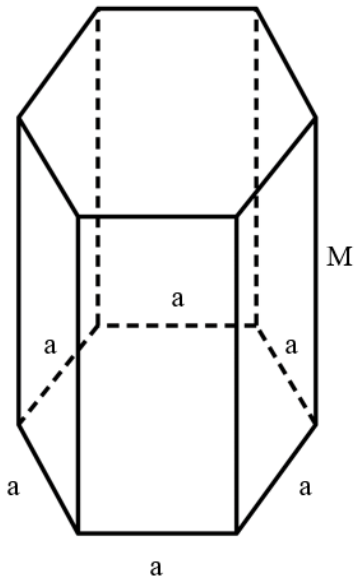
Felület (A):

$$A = 4 \cdot R^2 \cdot \pi$$

Térfogat (V):

$$V = \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3}$$

Hasáb



- Elnevezés: Az alaplapon alapján (háromszög alapú, négyzet alapú, ötszög alapú, hatszög alapú...)
- 2-féle oldal → 2 db Alaplapon, annyi oldalon, ahány csúcsa van az alaplapon (n)
- Alaplapon: Szabályos sokszögek
- Oldalon: Téglalapon
- Alaplapon területe: T_{alapon}
- Oldalon területe: $T_{oldal} = a \cdot M$
- Palást: Oldalon területének összege → $T_{palást} = n \cdot T_{oldal}$

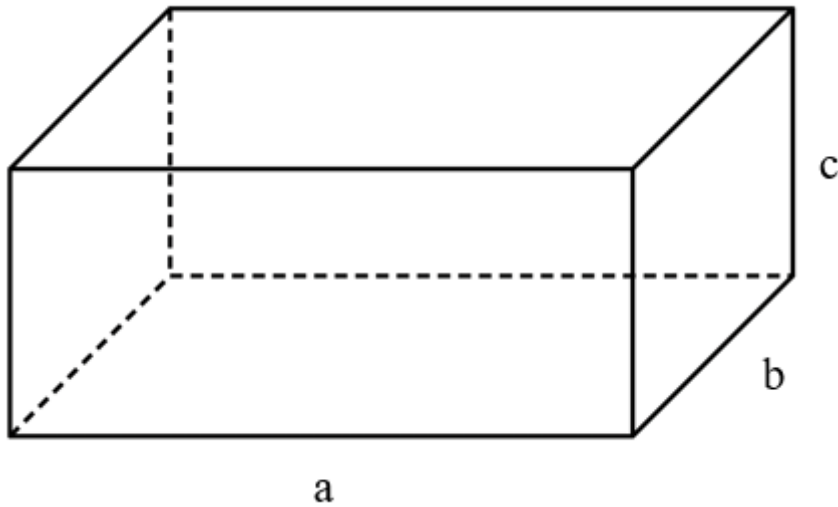
Felshín (A):

$$A = 2 \cdot T_{alapon} + T_{palást}$$

Térfogat (V):

$$V = T_{alapon} \cdot M$$

Téglatest



- 3-féle oldal, minden oldalból 2 db (egymással szemben)
- Lapok: Téglalapok
- Alsó és felső lapok területe: $T_1 = a \cdot b$
- Jobb és bal lapok területe: $T_2 = b \cdot c$
- Szemközti és hátsó lapok területe: $T_3 = a \cdot c$

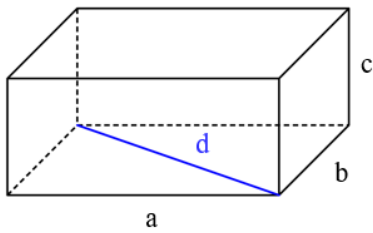
Felszín (A):

$$A = 2 \cdot T_1 + 2 \cdot T_2 + 2 \cdot T_3 = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$$

Térfogat (V):

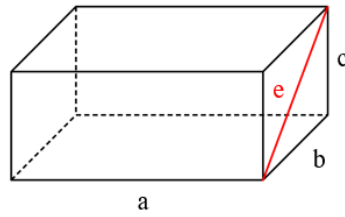
$$V = a \cdot b \cdot c$$

Téglatest lapátlók



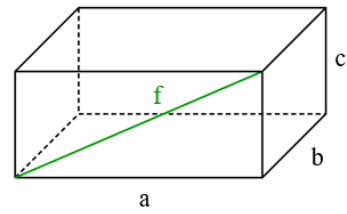
$$a^2 + b^2 = d^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$b^2 + c^2 = e^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

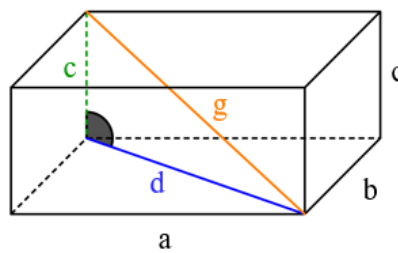
$$e = \sqrt{b^2 + c^2}$$



$$a^2 + c^2 = f^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$f = \sqrt{a^2 + c^2}$$

Téglatest testátló



$$d^2 + c^2 = g^2$$

$$/d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

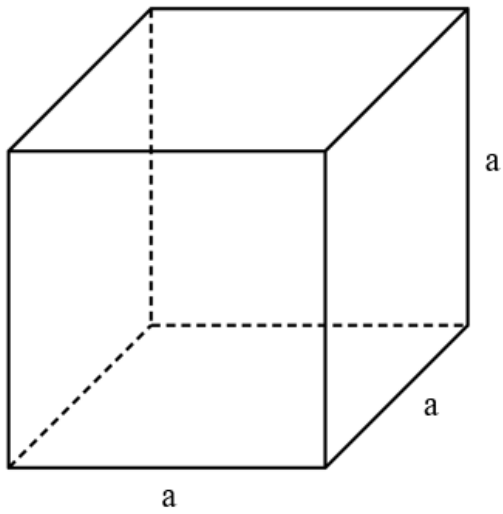
$$(\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2 = g^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = g^2$$

$$/ \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = g$$

Kocka



- 1-féle oldal \rightarrow 6 db
- Lapok: Négyzetek
- Lapok területe: $T = a \cdot a = a^2$

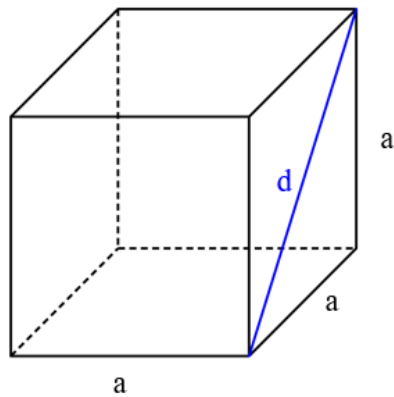
Felszín (A):

$$A = 6 \cdot T = 6 \cdot a^2$$

Térfogat (V):

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Kocka lapátló



$$a^2 + a^2 = d^2$$

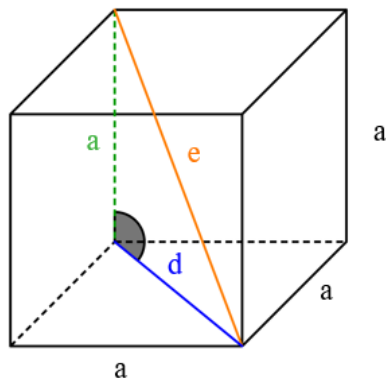
$$2a^2 = d^2$$

$$d = \sqrt{2} \cdot a$$

$$/d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$/\sqrt{\quad}$$

Kocka testátló



$$d^2 + a^2 = e^2$$

$$(\sqrt{2} \cdot a)^2 + a^2 = e^2$$

$$2a^2 + a^2 = e^2$$

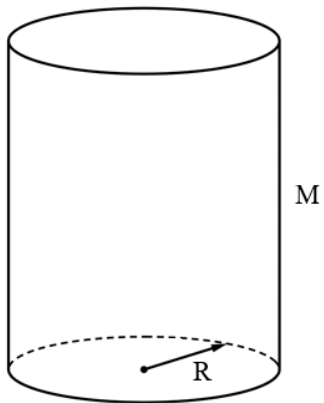
$$3a^2 = e^2$$

$$e = \sqrt{3} \cdot a$$

$$/d = \sqrt{2} \cdot a$$

$$/\sqrt{\quad}$$

Henger



- 2-féle oldal → 2 Alaplap, 1 Palást
- Alaplapok: Körök
- Palást (oldallap): Téglalap
- Alaplapok területe: $T_{alap} = R^2 \cdot \pi$
- Palást területe: $T_{palást} = K \cdot M = 2 \cdot R \cdot \pi \cdot M$

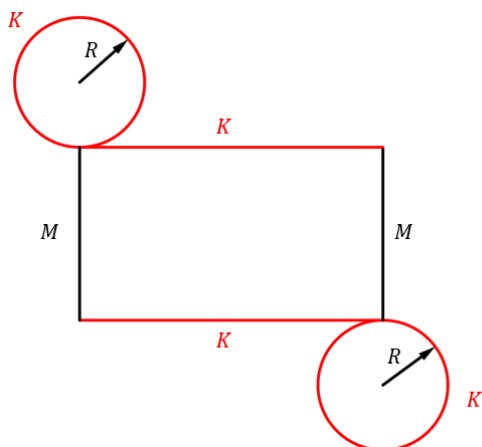
Felszín (A):

$$A = 2 \cdot T_{alap} + T_{palást} = 2 \cdot R^2 \cdot \pi + 2 \cdot R \cdot \pi \cdot M$$

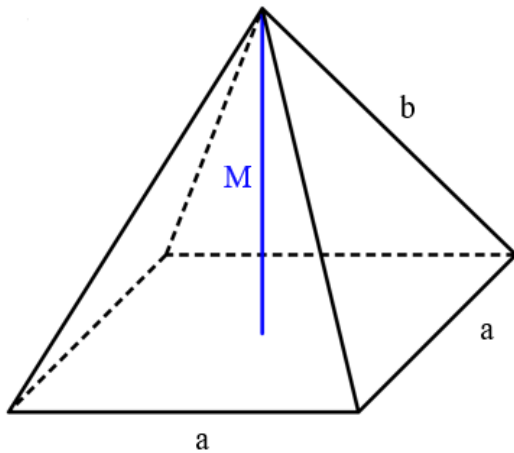
Térfogat (V):

$$V = T_{alap} \cdot M = R^2 \cdot \pi \cdot M$$

Henger kiterítve



Gúla



- Elnevezés: az alaplapon alapján (háromszög alapú, **négyzet alapú**, ötszög alapú, hatszög alapú...)
- 2-féle oldal → 1 db Alaplapon, annyi oldallapon, ahány csúcsa van az alaplapon (n)
- Alaplapon: Szabályos sokszög (általában négyzet)
- Oldallapon: Egyenlőszárú háromszögek (csak speciális esetben szabályos háromszög)
- Alaplapon területe: T_{alapon} (négyzetnél: $T_{alapon} = a^2$)
- Oldallapon (egyenlőszárú háromszögek) területe: $T_{oldal} = \frac{a \cdot m}{2}$
- Palást: Oldallapon területének összege → $T_{palást} = n \cdot T_{oldal}$

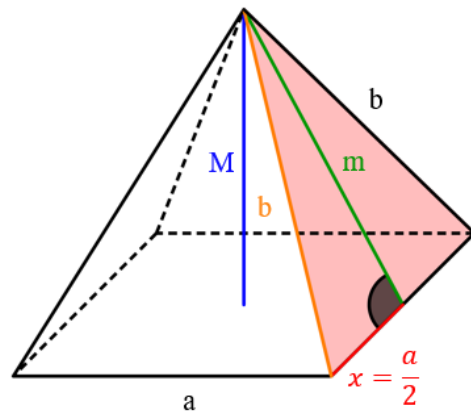
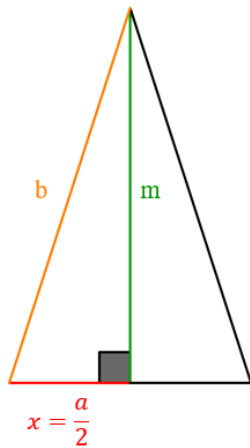
Felshín (A):

$$A = T_{alapon} + T_{palást}$$

Térfogat (V):

$$V = \frac{T_{alapon} \cdot M}{3}$$

Gúla oldallapjának magassága



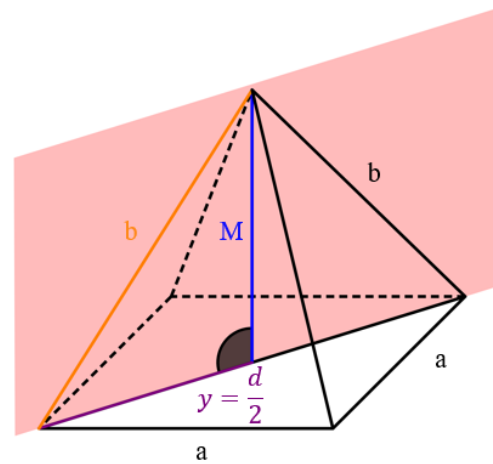
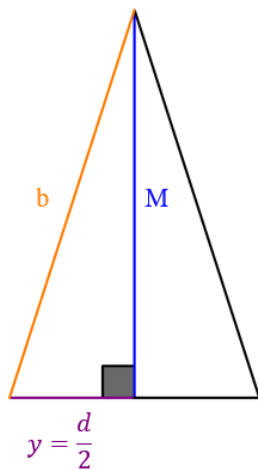
Pitagorasz tétel:

$$x^2 + m^2 = b^2 \quad /-x^2$$

$$m^2 = b^2 - x^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$m = \sqrt{b^2 - x^2}$$

Gúla metszete az oldalélek mentén



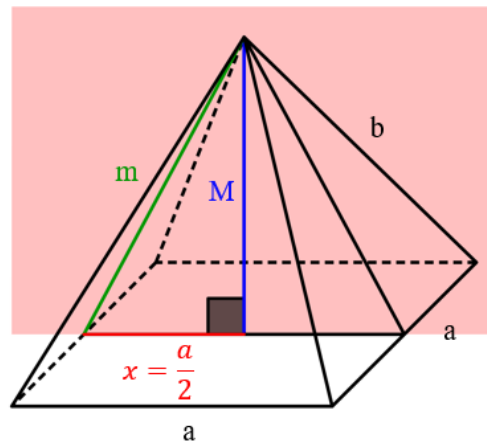
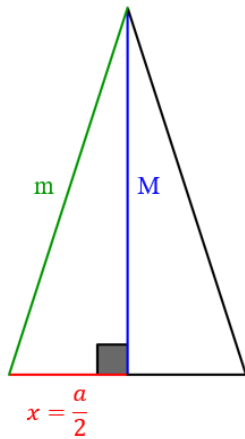
Pitagorasz tétel:

$$y^2 + M^2 = b^2 \quad /-y^2$$

$$M^2 = b^2 - y^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$M = \sqrt{b^2 - y^2}$$

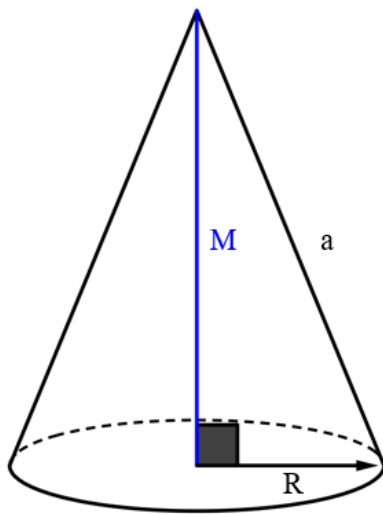
Gúla metszete az alaplap felénél



Pitagorasz tétel:

$$x^2 + M^2 = m^2$$

Kúp



- 2-féle oldal → 1 db Alaplap, 1 db oldallap
- Alaplap: Kör
- Oldallap: Körcikk
- Alaplap területe: $T_{alap} = R^2 \cdot \pi$
- Palást (Oldallap) területe: $T_{palást} = R \cdot \pi \cdot a$

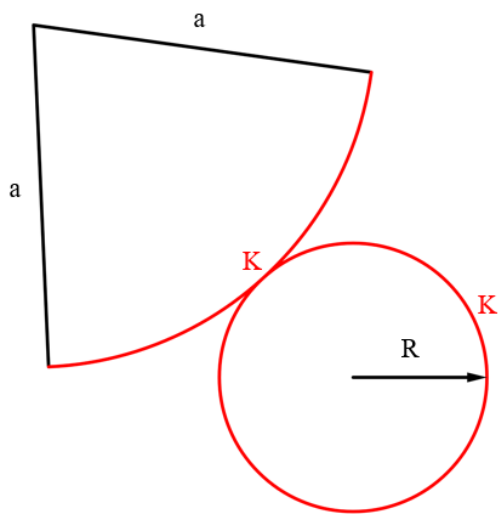
Felszín (A):

$$A = T_{alap} + T_{palást} = R^2 \cdot \pi + R \cdot \pi \cdot a$$

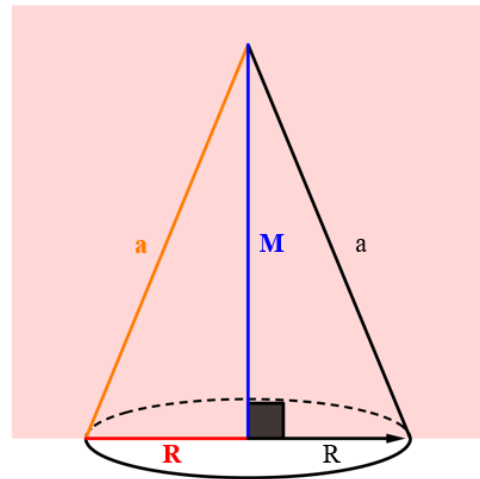
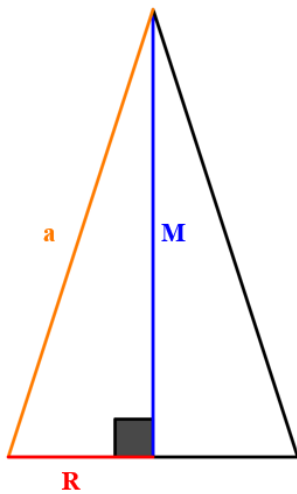
Térfogat (V):

$$V = \frac{T_{alap} \cdot M}{3} = \frac{R^2 \cdot \pi \cdot M}{3}$$

Kúp kiterítve



Kúp metszete



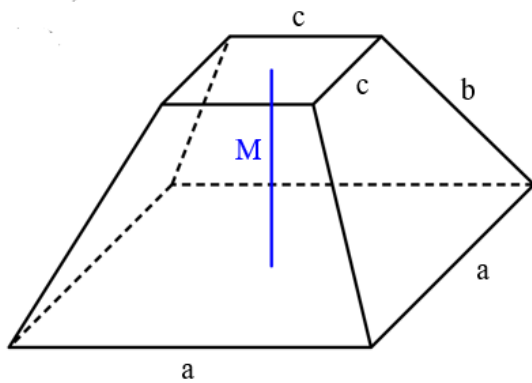
Pitagorasz tétel:

$$R^2 + M^2 = a^2 \quad / -R^2$$

$$M^2 = a^2 - R^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$M = \sqrt{a^2 - R^2}$$

Csonkagúla



- Elnevezés: az alaplapon alapján (háromszög alapú, **négyzet alapú**, ötszög alapú, hatszög alapú...)
- 3-féle oldal → 2 db Alaplap (1 nagy, 1 kicsi), annyi oldallap, ahány csúcsa van az alaplapnak (n)
- Alaplapok: Szabályos sokszögek (általában négyzetek)
- Oldallapok: Szimmetrikus trapézok
- Nagyobb alaplap területe: T (négyzetnél: $T = a^2$)
- Kisebb alaplap területe: t (négyzetnél: $t = c^2$)
- Oldallapok (szimmetrikus trapézok) területe: $T_{\text{oldal}} = \frac{a+c}{2} \cdot m$
- Palást: Oldallapok területének összege → $T_{\text{palást}} = n \cdot T_{\text{oldal}}$

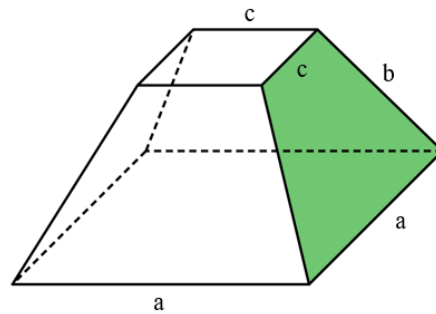
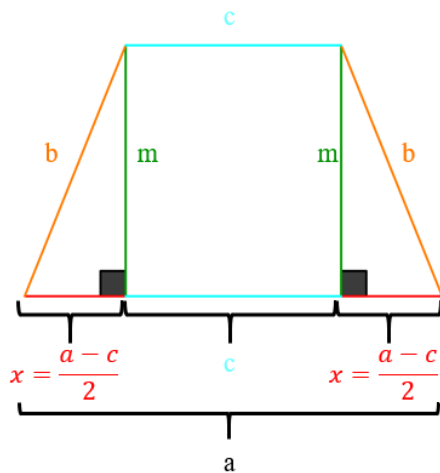
Felszín (A):

$$A = t + T + T_{\text{palást}}$$

Térfogat (V):

$$V = \frac{(t + \sqrt{t \cdot T} + T) \cdot M}{3}$$

Csonkagúla oldallapjának magassága



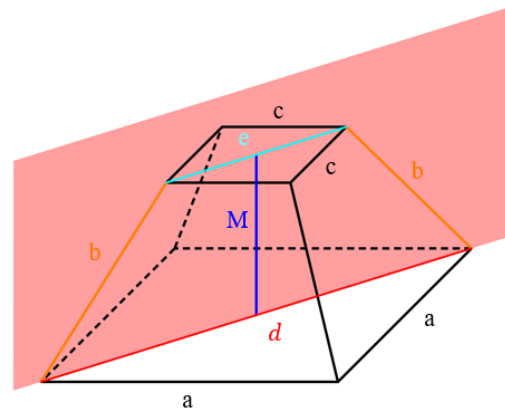
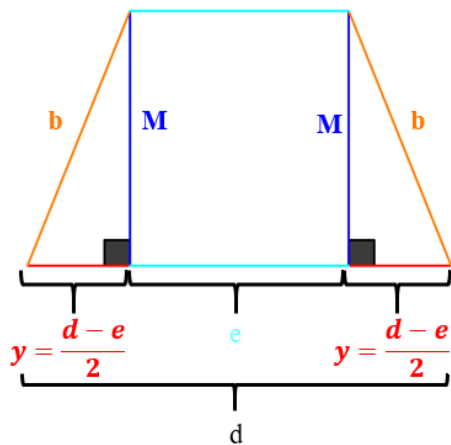
Pitagorasz tétel:

$$x^2 + m^2 = b^2 \quad / -x^2$$

$$m^2 = b^2 - x^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$m = \sqrt{b^2 - x^2}$$

Csonkagúla metszete az oldalélek mentén



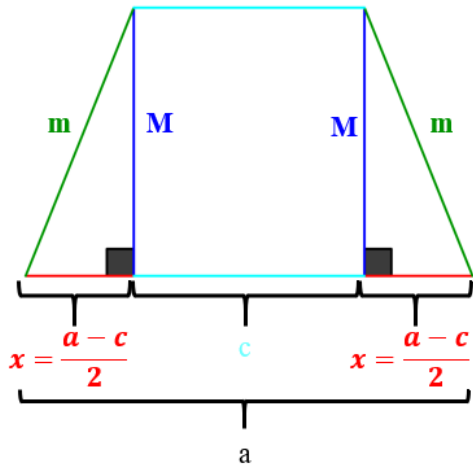
Pitagorasz tétel:

$$y^2 + M^2 = b^2 \quad / -y^2$$

$$M^2 = b^2 - y^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

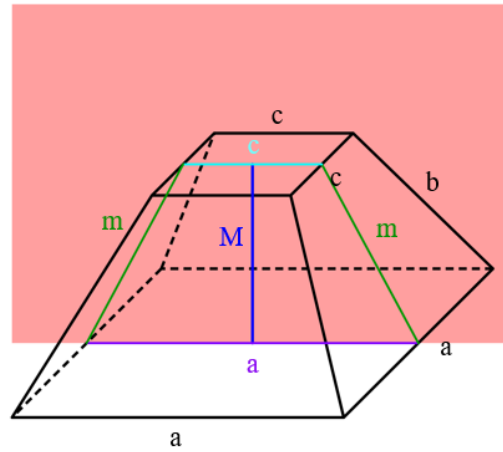
$$M = \sqrt{b^2 - y^2}$$

Csonkagúla metszete az alaplap felénél

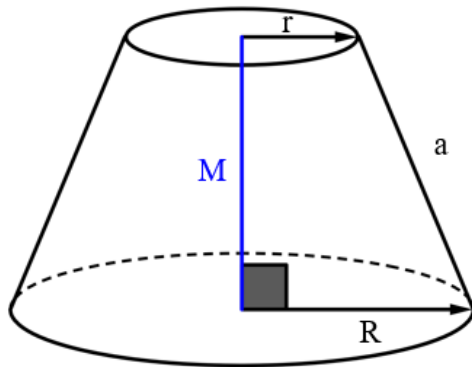


Pitagorasz tétel:

$$x^2 + M^2 = m^2$$



Csonkakúp



- 3-féle oldal \rightarrow 2 db Alaplap (1 nagy, 1 kicsi), 1 oldallap
- Alaplapok: Körök
- Oldallap: Körcikkyszerű
- Kisebb alaplap (fed(ö)lap) területe: $t = r^2 \cdot \pi$
- Nagyobb alaplap (alaplap) területe: $T = R^2 \cdot \pi$
- Palást (Oldallap) területe: $T_{\text{palást}} = (r + R) \cdot \pi \cdot a$

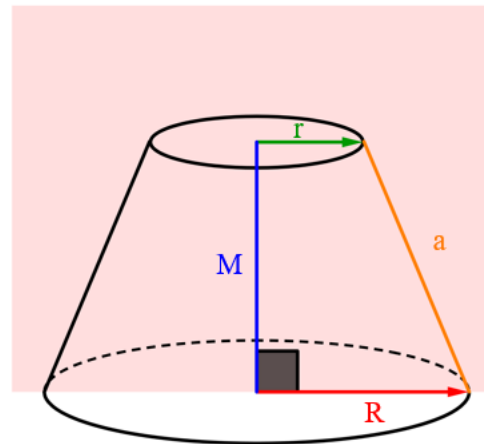
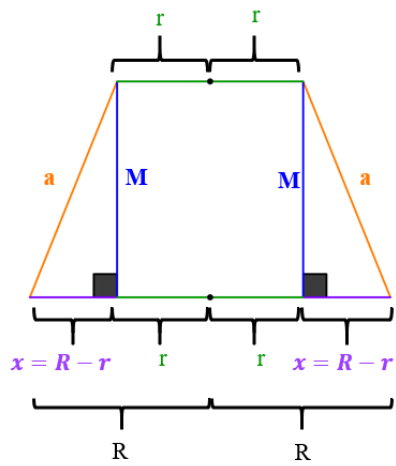
Felszín (A):

$$A = t + T + T_{\text{palást}} = r^2 \cdot \pi + R^2 \cdot \pi + (r + R) \cdot \pi \cdot a$$

Térfogat (V):

$$V = \frac{(r^2 + r \cdot R + R^2) \cdot \pi \cdot M}{3}$$

Csonkakúp metszet



Pitagorasz tétel:

$$x^2 + M^2 = a^2$$

Sorozatok

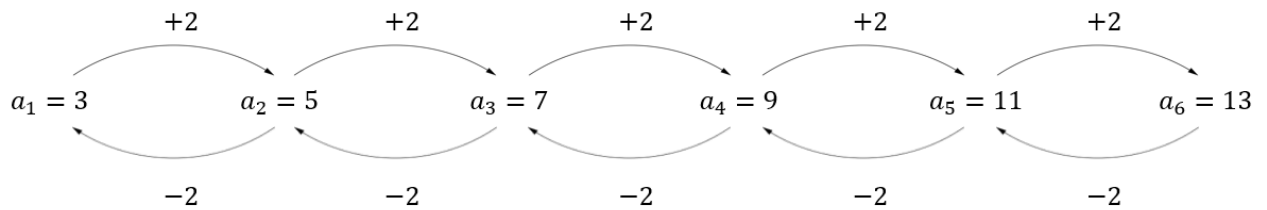
Számítási sorozatok

$$a_1 = 3$$

$$d = 2$$

a_1 – első tag

d – differencia, különbség



$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

a_n – n . tag

$$S_n = \frac{(2a_1 + (n - 1) \cdot d) \cdot n}{2} = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

S_n – az első n tag összege

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

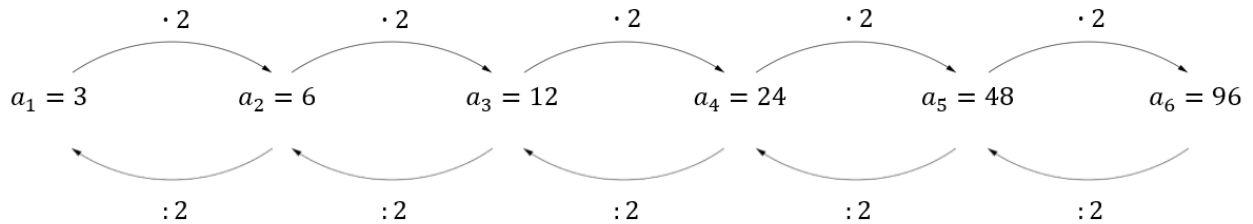
Mértani sorozatok

$$a_1 = 3$$

$$q = 2$$

a_1 – első tag

q – kvóciens, hányados



$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

a_n – n . tag

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

S_n – az első n tag összege

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

Mértani sorozat százalékok

	Nő	Csökken
Példák	Minden héten 10 %-kal nő $q = 1,1$	Minden nap 5 %-kal csökken $q = 0,95$
	Minden hónapban 22 %-kal nő $q = 1,22$	Minden évben 38,7 %-kal csökken $q = 0,615$

Hogyan ismerjük fel a számtani/mértani sorozatokat?

	Számtani sorozat	Mértani sorozat
Kulcsszavak	...-vel nő/csökken	...-szorosára/hányadára nő/csökken ...%-kal nő/csökken Kamat, hitel
Példák	Minden nap 5-tel csinál több ...	Minden hónapban 10%-kal nő az előző havhoz képest
	Minden hónapban 100-zal nő	Minden évben 25 %-kal csökken az előző évihez képest
	Minden évben 450-nel csökken	Minden héten az előző heti felére csökken
	Minden héten 4-gyel kevesebb... csinál	Minden nap a duplájára nő

Statisztika

Szórás

- Átlagtól való átlagos eltérés
- Megadja, hogy az adatok átlagosan mennyivel térnek el az átlagtól
- Jele: σ (szigma)
- Kiszámítása: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2 \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Ahol:

$$\sum_{i=1}^n \quad - \text{szumma jel}$$

$i = 1$ – 1. tagtól kezdve

n – n . edik tagig

x_i – i – edik tag

\bar{x} – átlag

n – adatok száma

Osztályközép

- A legkisebb és a legnagyobb adat átlaga
- **Osztályközép:** $\frac{x_{min} + x_{max}}{2}$
- *Osztályközép* \neq *Átlag*

Számítási, mértani közép

	Számítási közép (átlag)	Mértani közép
Képlet	$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$	$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$
Példák	<p>4, 9</p> $A = \frac{4 + 9}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$	<p>4, 9</p> $G = \sqrt[2]{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$
	<p>6, 6</p> $A = \frac{6 + 6}{2} = \frac{12}{2} = 6$	<p>6, 6</p> $G = \sqrt[2]{6 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$
	<p>2, 4, 8</p> $A = \frac{2 + 4 + 8}{3} = \frac{14}{3} = 4,6$	<p>2, 4, 8</p> $G = \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 8} = \sqrt[3]{64} = 4$
	<p>7, 7, 7</p> $A = \frac{7 + 7 + 7}{3} = \frac{21}{3} = 7$	<p>7, 7, 7</p> $G = \sqrt[3]{7 \cdot 7 \cdot 7} = \sqrt[3]{343} = 7$

Statisztikai mutatók

- **Módusz:** Az adatsokaságban leggyakrabban előforduló elem(ek)
- **Medián:** Az adatsokaságot növekvő sorrendbe rakva a középső elem
 - Páros elemű adatsokaság esetén nincs egy darab középső elem, ezért a középső két elem átlaga a medián.
- **Terjedelem:** A legnagyobb és legkisebb elem különbsége

Példák:

1. adatsor: 1 7 2 4 7

Sorba rendezve: **1** 2 **4** **7** **7**

Az adatsor

Módusza: 7

Mediánja: 4

Terjedelme: 7 – 1 = 6

2. adatsor: 9 1 9 6 4 1

Sorba rendezve: **1** **1** **4** **6** **9** **9**

Az adatsor

Móduszai: 1 és 9

Mediánja: $\frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Terjedelme: 9 – 1 = 8