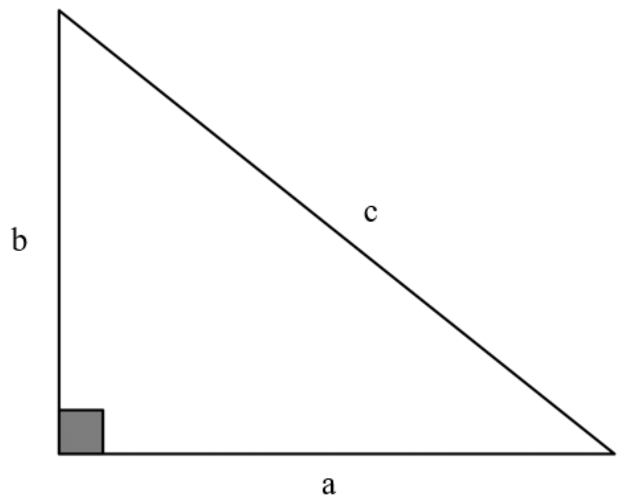
Térgeometria

Pitagorasz tétel

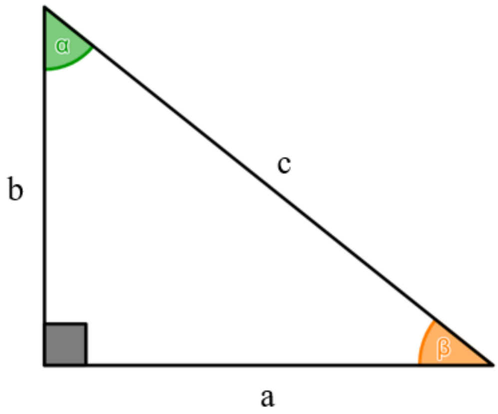


Pitagorasz-tétel:

$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$

Szögfüggvények

Szinusz (sin)

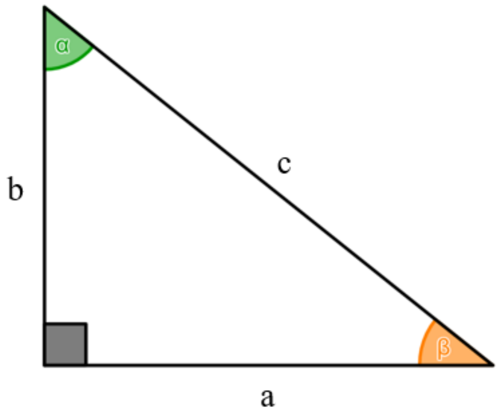


$$\sin\alpha = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{átfogó}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c}$$

Koszinusz (cos)

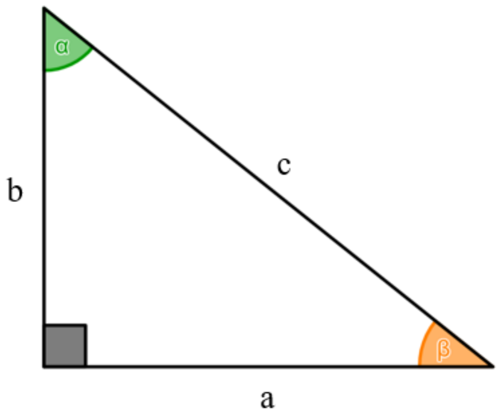


$$\cos\alpha = \frac{szög\ melletti\ befogó}{átfogó}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c}$$

Tangens (tg, tan)



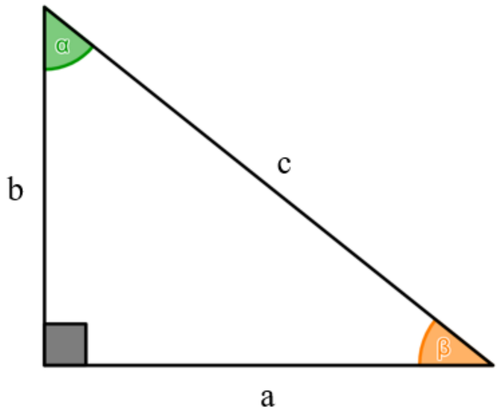
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{szög\ melletti\ befogó}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$$

Szinusztétel, koszinusztétel

Szinusztétel

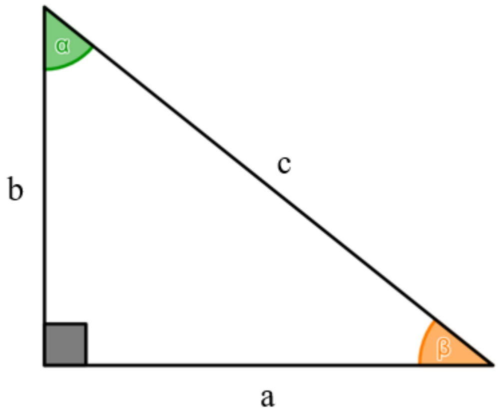


$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Koszinusztétel

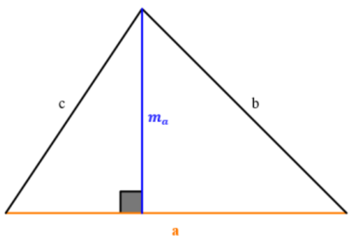


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

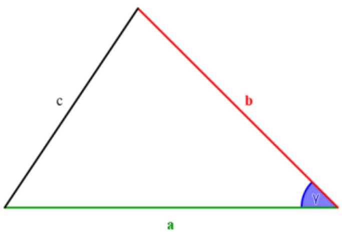
Háromszögek területe



Hagyományos módszer:

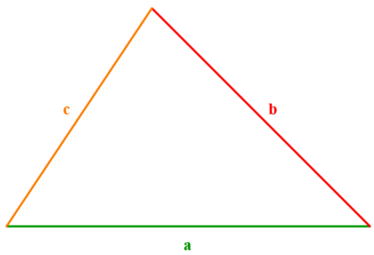
$$T = \frac{alap \cdot magasság}{2}$$

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$



Ha ismert két oldal és az általuk bezárt szög:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$$



Ha ismert mind a 3 oldal (Héron képlet):

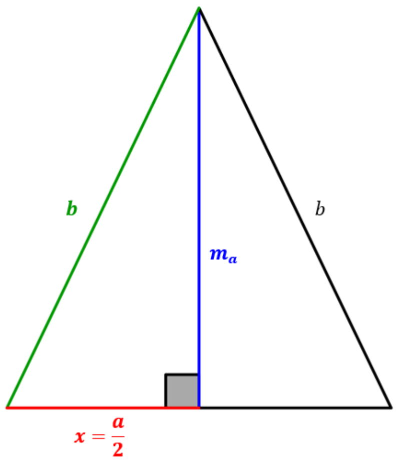
$$T = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

s: *félkerület*

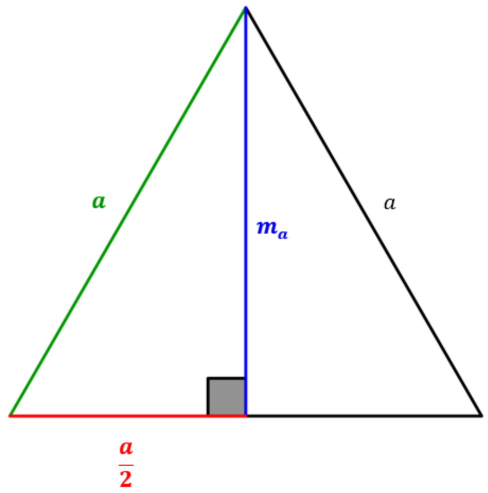
$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

Háromszögek magassága, területe

Egyenlőszárú háromszög



Szabályos háromszög



Pitagorasz-tétel:

$$x^2 + m_a{}^2 = b^2 \qquad /-x^2$$

$$m_a{}^2 = b^2 - x^2 \qquad /\sqrt{}$$

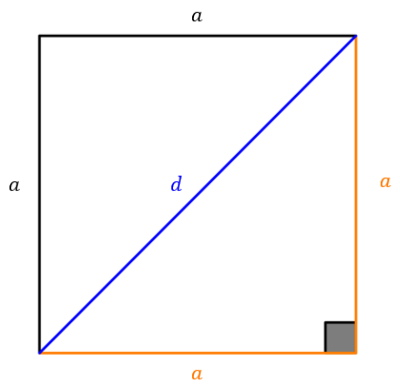
$$\boldsymbol{m_a = \sqrt{b^2 - x^2}}$$

$$\boldsymbol{T = \frac{a \cdot m_a}{2}}$$

$$\boldsymbol{m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a}$$

$$\boldsymbol{T = \frac{a \cdot m_a}{2}}$$

Négyzet átlója, területe



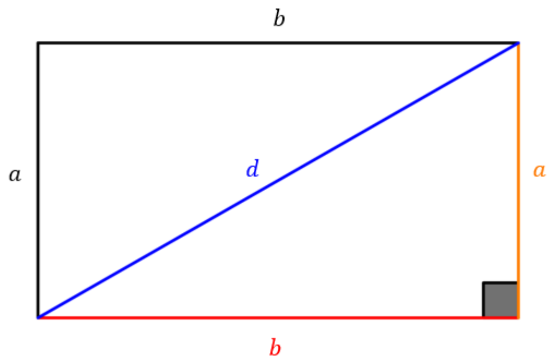
Átló:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{2} \cdot a}$$

Terület:

$$\boldsymbol{T = a \cdot a = a^2}$$

Téglalap átlója, területe



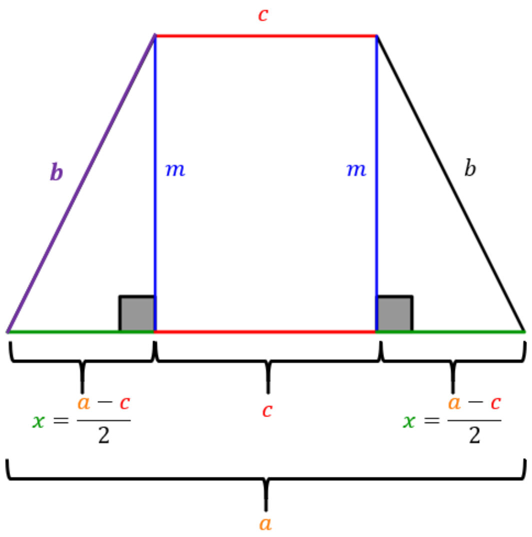
Átló:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Terület:

$$\boldsymbol{T = a \cdot b}$$

Húrtrapéz magassága, területe



Pitagorasz-tétel:

$$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{m}^2 = \boldsymbol{b}^2 \qquad /-x^2$$

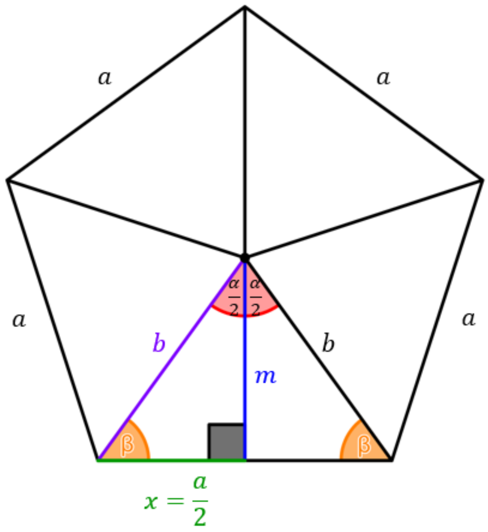
$$m^2 = b^2 - x^2 \qquad /\sqrt{\ }$$

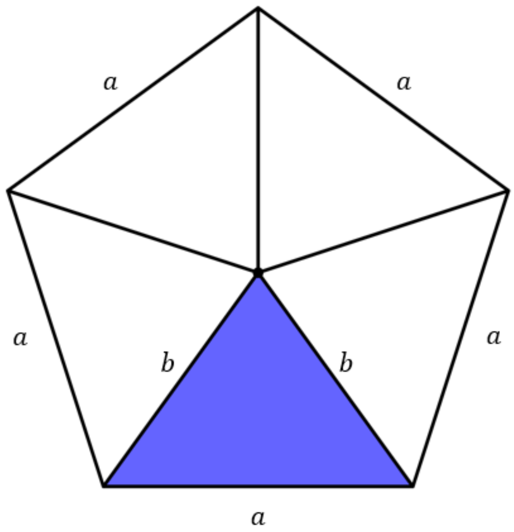
$$\boldsymbol{m = \sqrt{b^2 - x^2}}$$

Terület:

$$\boldsymbol{T = \frac{a+c}{2} \cdot m}$$

Ötszög magassága, területe





Középponti szög:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{360°}{5} = \mathbf{72°}$$

Egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{180° - \alpha}{2} = \mathbf{54°}$$

Középponti szög fele:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} = \frac{72°}{2} = \mathbf{36°}$$

Magasság:

$$\operatorname{tg} \boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{m}} \rightarrow \boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\gamma}}$$

$$\operatorname{tg} \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{x}} \rightarrow \boldsymbol{m} = \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{tg}\,\boldsymbol{\beta}$$

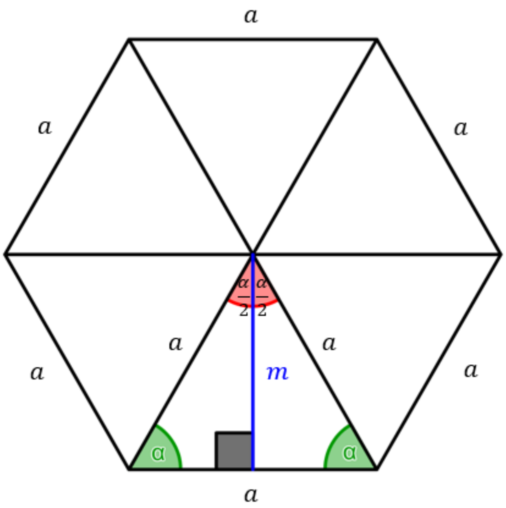
Háromszög területe:

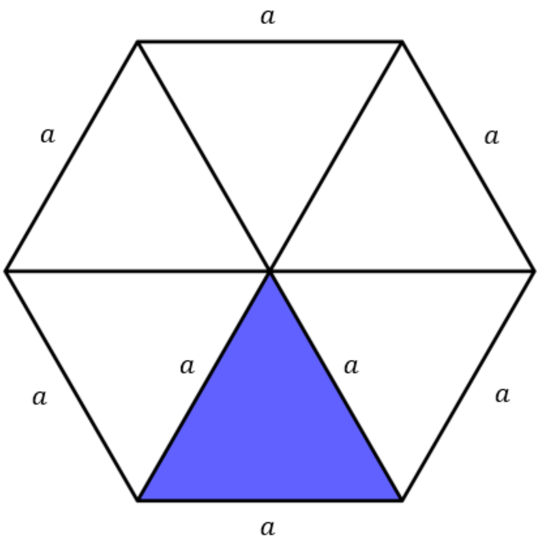
$$\boldsymbol{T}_{\Delta} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{m}}{\mathbf{2}}$$

Ötszög területe:

$$\boldsymbol{T} = \mathbf{5} \cdot \boldsymbol{T}_{\Delta}$$

Hatszög magassága, területe





Középponti szög:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{360°}{6} = \mathbf{60}°$$

Egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{180° - \alpha}{2} = \mathbf{60}°$$

Középponti szög fele:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} = \frac{60°}{2} = \mathbf{30}°$$

Magasság:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{a}$$

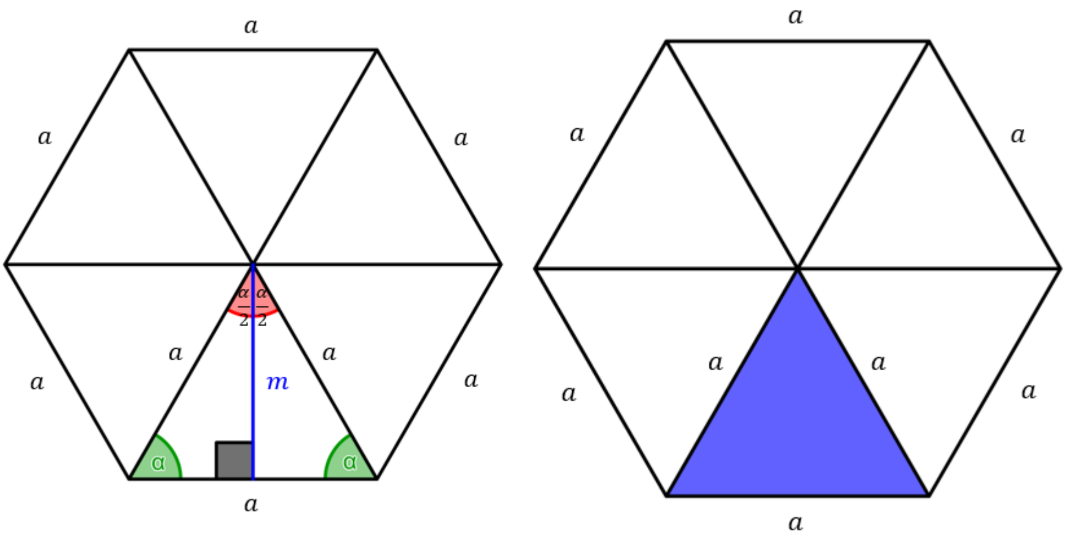
Háromszög területe:

$$\boldsymbol{T}_{\Delta} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{m}}{\mathbf{2}}$$

Hatszög területe:

$$\boldsymbol{T} = \mathbf{6} \cdot \boldsymbol{T}_{\Delta}$$

Szabályos sokszögek (n) magassága, területe



Középponti szög:

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{360°}{n}}$$

Egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei:

$$\boldsymbol{\beta = \frac{180° - \alpha}{2}}$$

Középponti szög fele:

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{\alpha}{2}}$$

Magasság:

$$\mathrm{tg}\,\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{m}} \rightarrow \boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\gamma}}$$

$$\mathrm{tg}\,\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{x}} \rightarrow \boldsymbol{m} = \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{tg}\,\boldsymbol{\beta}$$

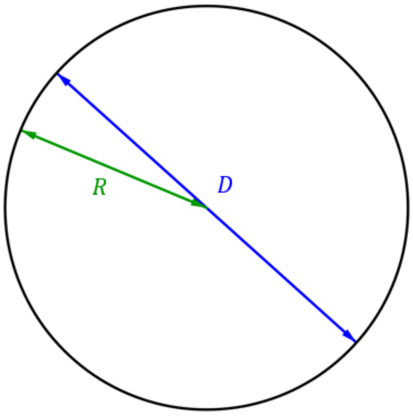
Háromszög területe:

$$\boldsymbol{T_{\Delta} = \frac{a \cdot m}{2}}$$

Sokszög területe:

$$\boldsymbol{T = n \cdot T_{\Delta}}$$

Kör



Sugár-Átmérő:

$$\boldsymbol{D = 2 \cdot R}$$

$$\boldsymbol{R = \frac{D}{2}}$$

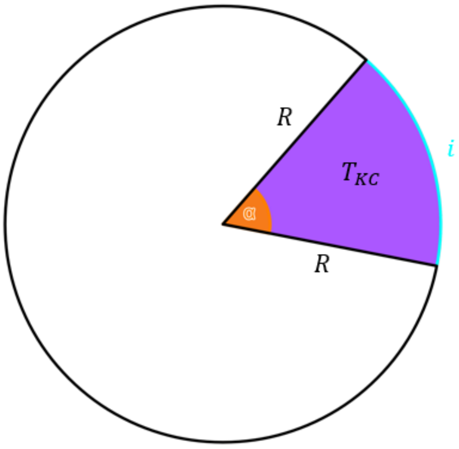
Kerület:

$$\boldsymbol{K = 2 \cdot R \cdot \pi = D \cdot \pi}$$

Terület:

$$\boldsymbol{T = R^2 \cdot \pi = \frac{D^2}{4} \cdot \pi}$$

Kör ívhossza, körcikk területe



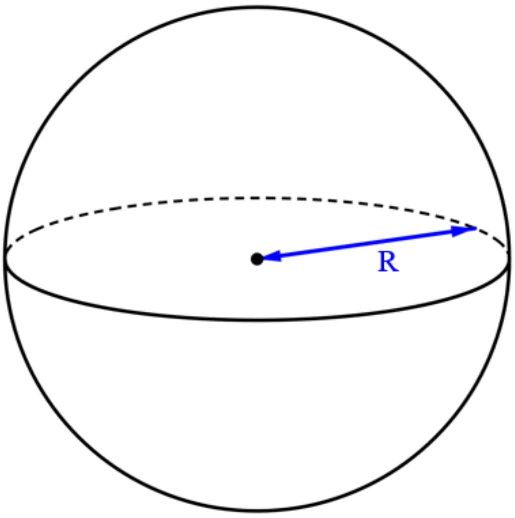
Körív:

$$\boldsymbol{i = \frac{\alpha}{360°} \cdot K = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot R \cdot \pi = \frac{\alpha}{180°} \cdot R \cdot \pi}$$

Körcikk területe:

$$\boldsymbol{T_{KC} = \frac{\alpha}{360°} \cdot T}$$

Gömb



Átmérő (D):

$$D = 2 \cdot R$$

Sugár (R):

$$R = \frac{D}{2}$$

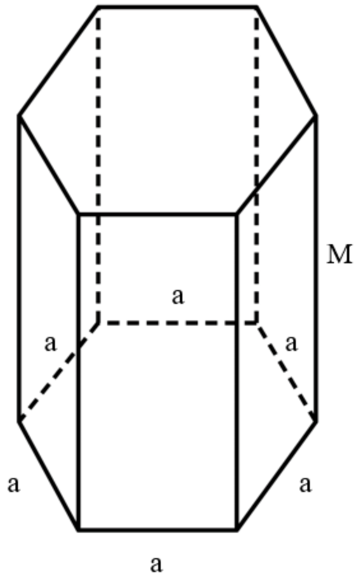
Felszín (A):

$$A = 4 \cdot R^2 \cdot \pi$$

Térfogat (V):

$$V = \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3}$$

Hasáb



- Elnevezés: Az alaplap alapján (háromszög alapú, négyzet alapú, ötszög alapú, hatszög alapú…)
- 2-féle oldal → 2 db Alaplap, annyi oldallap, ahány csúcsa van az alaplapnak (n)
- Alaplapok: Szabályos sokszögek
- Oldallapok: Téglalapok
- Alaplapok területe: $\boldsymbol{T_{alap}}$
- Oldallapok területe: $\mathbf{T_{oldal}} = \boldsymbol{a \cdot M}$
- Palást: Oldallapok területének összege → $\boldsymbol{T_{palást} = n \cdot T_{oldal}}$

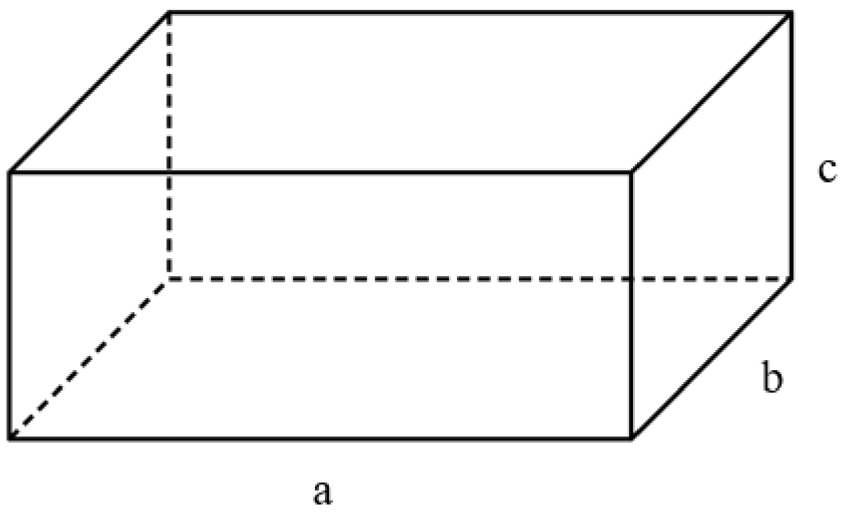
Felszín (A):

$$\boldsymbol{A = 2 \cdot T_{alap} + T_{palást}}$$

Térfogat (V):

$$\boldsymbol{V = T_{alap} \cdot M}$$

Téglatest



- 3-féle oldal, minden oldalból 2 db (egymással szemben)
- Lapok: Téglalapok
- Alsó és felső lapok területe: $\boldsymbol{T_1 = a \cdot b}$
- Jobb és bal lapok területe: $\boldsymbol{T_2 = b \cdot c}$
- Szemközti és hátsó lapok területe: $\boldsymbol{T_3 = a \cdot c}$

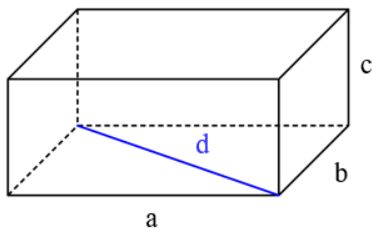
Felszín (A):

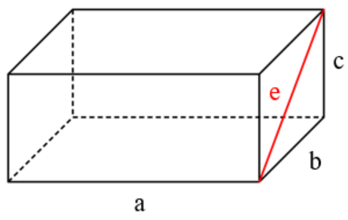
$\boldsymbol{A} = 2 \cdot T_1 + 2 \cdot T_2 + 2 \cdot T_3 = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c = \boldsymbol{2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)}$

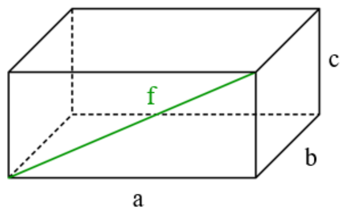
Térfogat (V):

$\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$

Téglatest lapátlók







$a^2 + b^2 = d^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$\boldsymbol{d = \sqrt{a^2 + b^2}}$

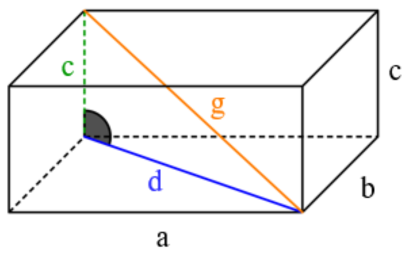
$b^2 + c^2 = e^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$\boldsymbol{e = \sqrt{b^2 + c^2}}$

$a^2 + c^2 = f^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$\boldsymbol{f = \sqrt{a^2 + c^2}}$

Téglatest testátló



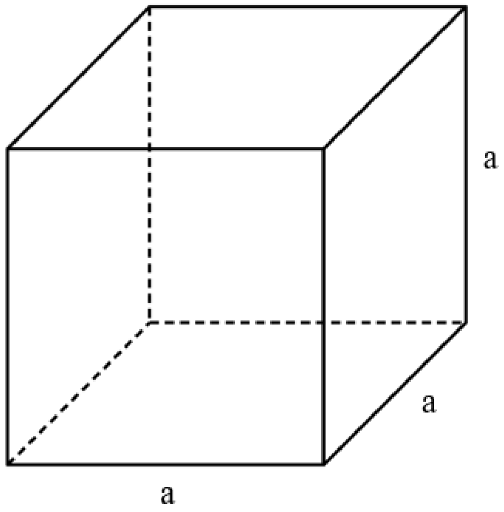
$d^2 + c^2 = g^2 \qquad /d = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + c^2 = g^2$

$a^2 + b^2 + c^2 = g^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$\boldsymbol{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = g}$

Kocka



- 1-féle oldal → 6 db
- Lapok: Négyzetek
- Lapok területe: $\mathbf{T} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}$

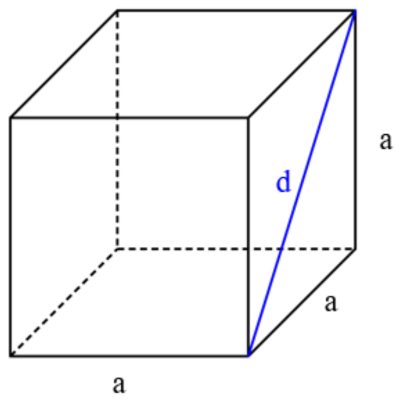
Felszín (A):

$\boldsymbol{A} = \mathbf{6} \cdot \boldsymbol{T} = \mathbf{6} \cdot \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}$

Térfogat (V):

$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}$

Kocka lapátló

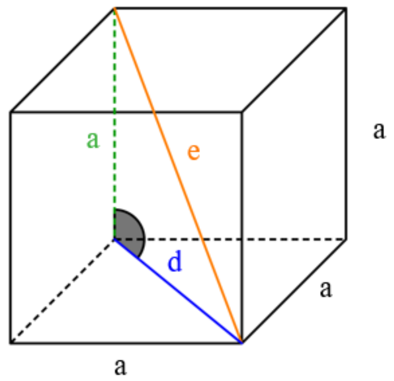


$$a^2 + a^2 = d^2 \qquad /d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$2a^2 = d^2 \qquad /\sqrt{}$$

$$\boldsymbol{d = \sqrt{2} \cdot a}$$

Kocka testátló



$$d^2 + a^2 = e^2 \qquad /d = \sqrt{2} \cdot a$$

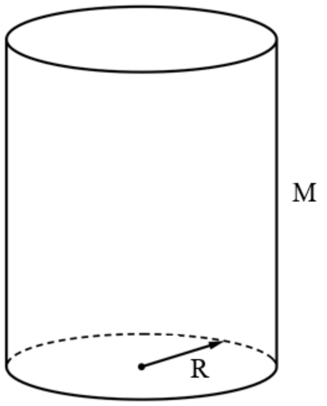
$$\left(\sqrt{2} \cdot a\right)^2 + a^2 = e^2$$

$$2a^2 + a^2 = e^2$$

$$3a^2 = e^2 \qquad /\sqrt{}$$

$$\boldsymbol{e = \sqrt{3} \cdot a}$$

Henger



- 2-féle oldal → 2 Alaplap, 1 Palást
- Alaplapok: Körök
- Palást (oldallap): Téglalap
- Alaplapok területe: $\boldsymbol{T_{alap} = R^2 \cdot \pi}$
- Palást területe: $\boldsymbol{T_{palást} = K \cdot M = 2 \cdot R \cdot \pi \cdot M}$

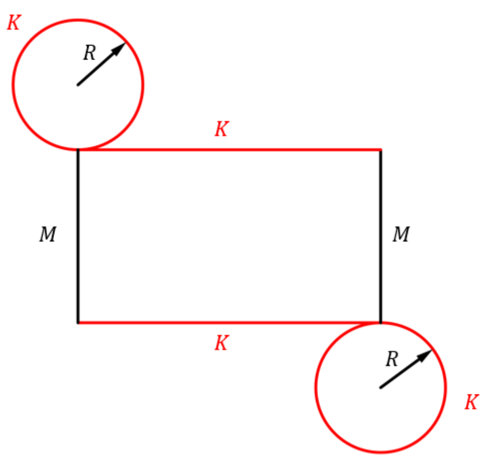
Felszín (A):

$$\boldsymbol{A = 2 \cdot T_{alap} + T_{palást} = 2 \cdot R^2 \cdot \pi + 2 \cdot R \cdot \pi \cdot M}$$

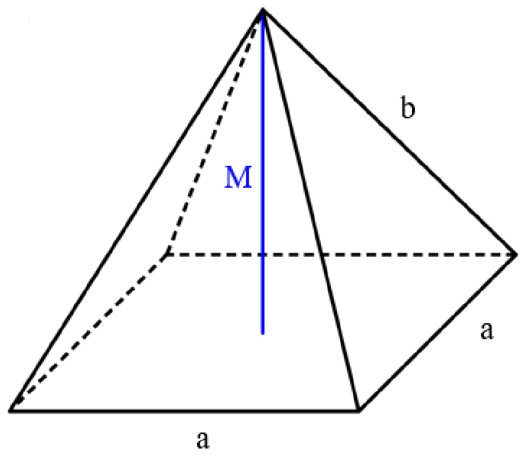
Térfogat (V):

$$\boldsymbol{V = T_{alap} \cdot M = R^2 \cdot \pi \cdot M}$$

Henger kiterítve



Gúla



- Elnevezés: az alaplap alapján (háromszög alapú, **négyzet alapú**, ötszög alapú, hatszög alapú…)
- 2-féle oldal → 1 db Alaplap, annyi oldallap, ahány csúcsa van az alaplapnak (n)
- Alaplap: Szabályos sokszög (általában négyzet)
- Oldallapok: Egyenlőszárú háromszögek (csak speciális esetben szabályos háromszög)
- Alaplap területe: $\boldsymbol{T_{alap}}$ (négyzetnél: $\boldsymbol{T_{alap} = a^2}$)
- Oldallapok (egyenlőszárú háromszögek) területe: $\mathbf{T_{oldal}} = \frac{\boldsymbol{a \cdot m}}{\mathbf{2}}$
- Palást: Oldallapok területének összege → $\boldsymbol{T_{palást} = n \cdot T_{oldal}}$

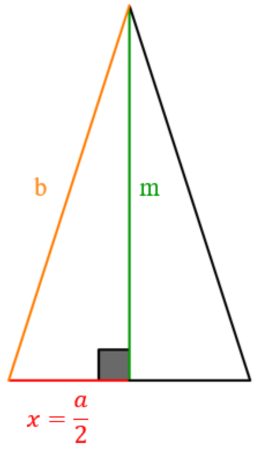
Felszín (A):

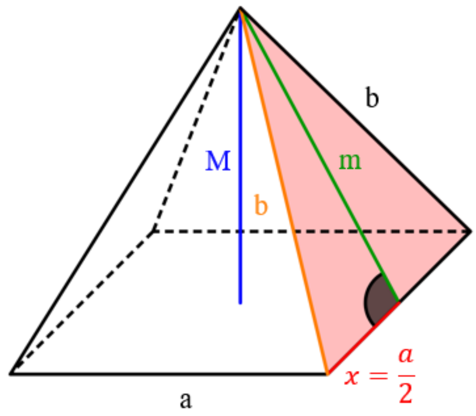
$$\boldsymbol{A = T_{alap} + T_{palást}}$$

Térfogat (V):

$$\boldsymbol{V = \frac{T_{alap} \cdot M}{3}}$$

Gúla oldallapjának magassága





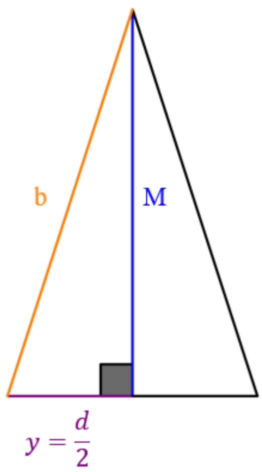
Pitagorasz tétel:

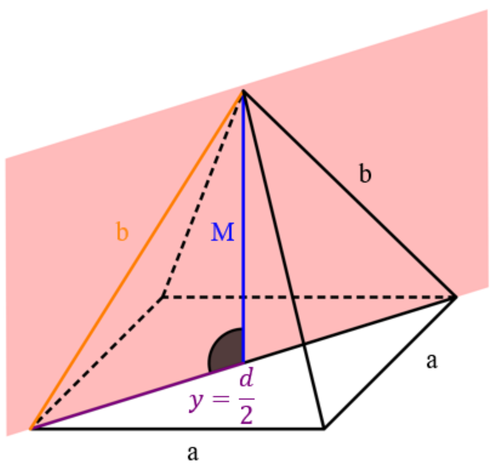
$$x^2 + m^2 = b^2 \qquad /-x^2$$

$$m^2 = b^2 - x^2 \qquad /\sqrt{}$$

$$\boldsymbol{m = \sqrt{b^2 - x^2}}$$

Gúla metszete az oldalélek mentén





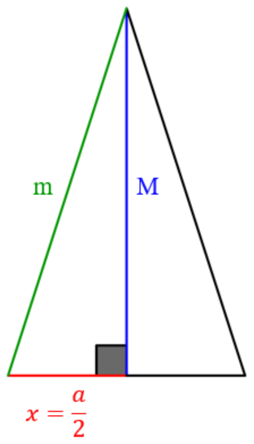
Pitagorasz tétel:

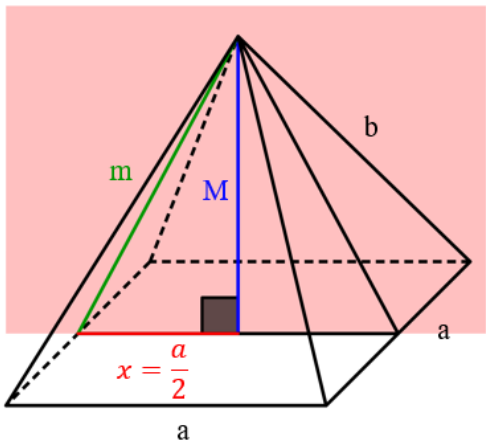
$$y^2 + M^2 = b^2 \qquad /-y^2$$

$$M^2 = b^2 - y^2 \qquad /\sqrt{}$$

$$\boldsymbol{M = \sqrt{b^2 - y^2}}$$

Gúla metszete az alaplap felénél

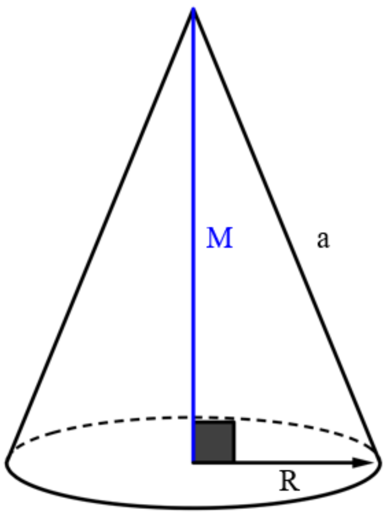




Pitagorasz tétel:

$$x^2 + M^2 = m^2$$

Kúp



- 2-féle oldal → 1 db Alaplap, 1 db oldallap
- Alaplap: Kör
- Oldallap: Körcikk
- Alaplap területe: $\boldsymbol{T_{alap} = R^2 \cdot \pi}$
- Palást (Oldallap) területe: $\mathbf{T_{palást}} = \boldsymbol{R \cdot \pi \cdot a}$

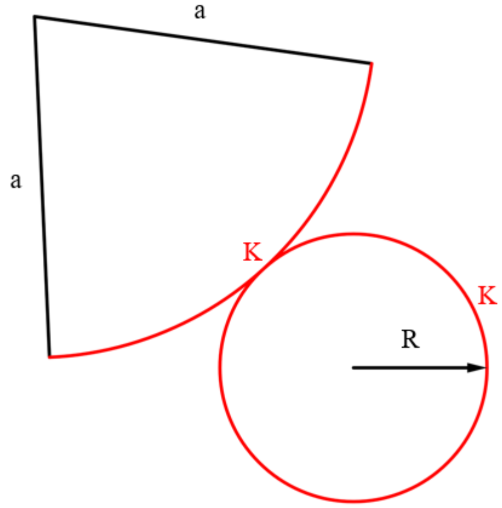
Felszín (A):

$$\boldsymbol{A = T_{alap} + T_{palást} = R^2 \cdot \pi + R \cdot \pi \cdot a}$$

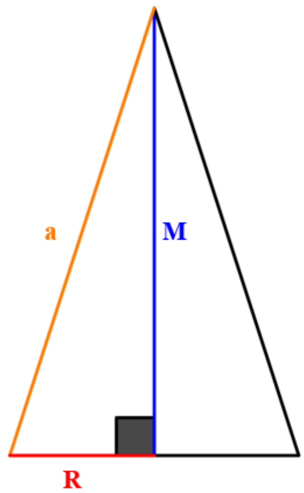
Térfogat (V):

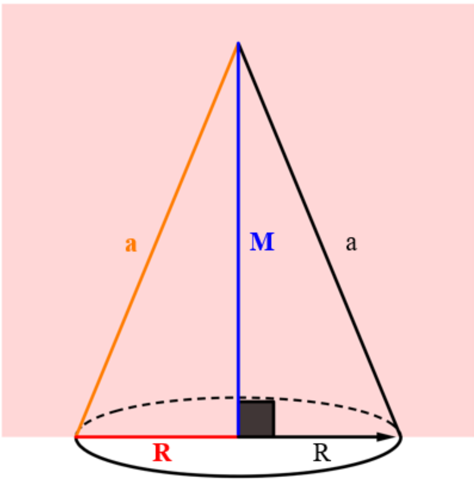
$$\boldsymbol{V = \frac{T_{alap} \cdot M}{3} = \frac{R^2 \cdot \pi \cdot M}{3}}$$

Kúp kiterítve



Kúp metszete





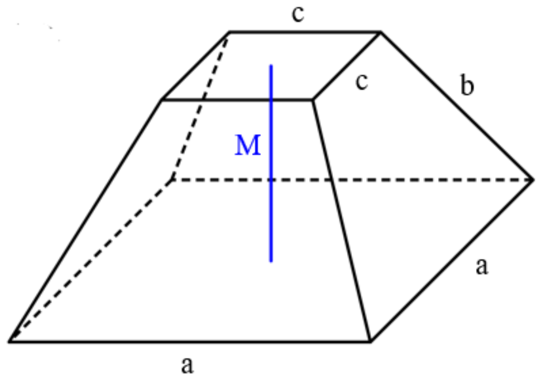
Pitagorasz tétel:

$$\boldsymbol{R}^2 + \boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{a}^2 \qquad /-R^2$$

$$M^2 = a^2 - R^2 \qquad /\sqrt{}$$

$$\boldsymbol{M = \sqrt{a^2 - R^2}}$$

Csonkagúla



- Elnevezés: az alaplapok alapján (háromszög alapú, **négyzet alapú**, ötszög alapú, hatszög alapú…)
- 3-féle oldal → 2 db Alaplap (1 nagy, 1 kicsi), annyi oldallap, ahány csúcsa van az alaplapnak (n)
- Alaplapok: Szabályos sokszögek (általában négyzetek)
- Oldallapok: Szimmetrikus trapézok
- Nagyobb alaplap területe: $\boldsymbol{T}$ (négyzetnél: $\boldsymbol{T = a^2}$)
- Kisebb alaplap területe: $\boldsymbol{t}$ (négyzetnél: $\boldsymbol{t = c^2}$)
- Oldallapok (szimmetrikus trapézok) területe: $\mathbf{T_{oldal}} = \frac{a+c}{2} \cdot \boldsymbol{m}$
- Palást: Oldallapok területének összege → $\boldsymbol{T_{palást} = n \cdot T_{oldal}}$

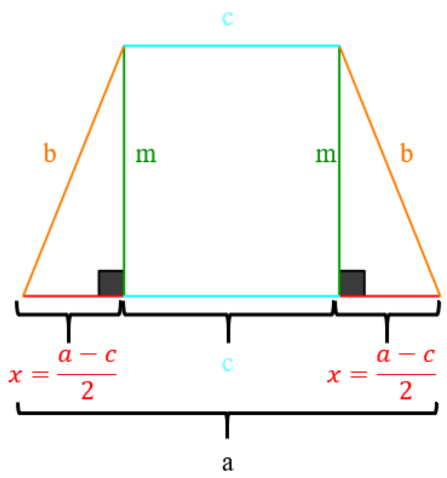
Felszín (A):

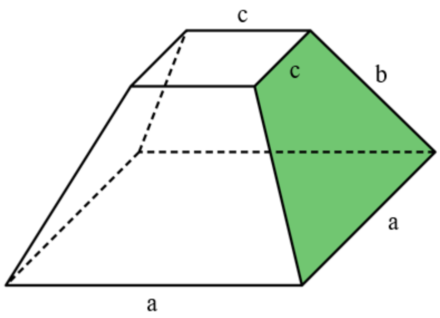
$$\boldsymbol{A = t + T + T_{palást}}$$

Térfogat (V):

$$\boldsymbol{V = \frac{\left(t + \sqrt{t \cdot T} + T\right) \cdot M}{3}}$$

Csonkagúla oldallapjának magassága





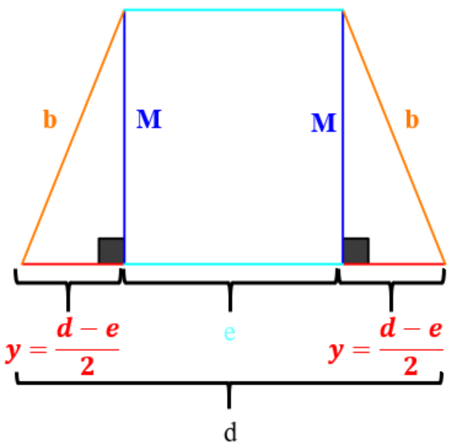
Pitagorasz tétel:

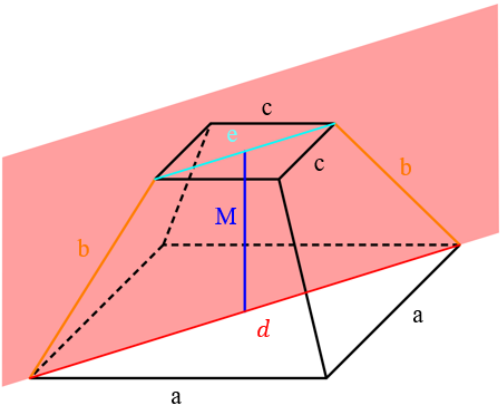
$$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{m}^2 = \boldsymbol{b}^2 \qquad /-x^2$$

$$m^2 = b^2 - x^2 \qquad /\sqrt{}$$

$$\boldsymbol{m = \sqrt{b^2 - x^2}}$$

Csonkagúla metszete az oldalélek mentén





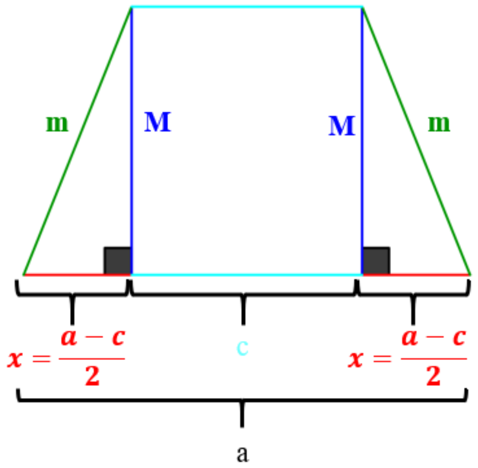
Pitagorasz tétel:

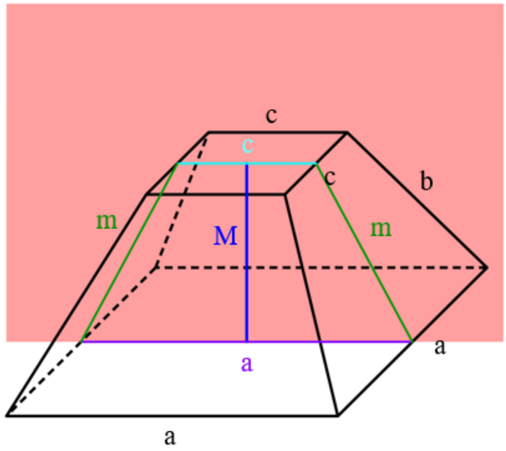
$$\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{b}^2 \qquad /-y^2$$

$$M^2 = b^2 - y^2 \qquad /\sqrt{}$$

$$\boldsymbol{M = \sqrt{b^2 - y^2}}$$

Csonkagúla metszete az alaplap felénél

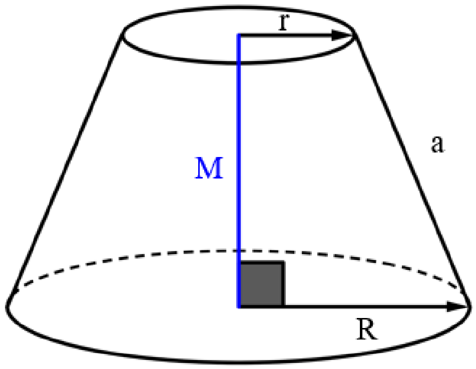




Pitagorasz tétel:

$$x^2 + M^2 = m^2$$

Csonkakúp



- 3-féle oldal → 2 db Alaplap (1 nagy, 1 kicsi), 1 oldallap
- Alaplapok: Körök
- Oldallap: Körcikkszerű
- Kisebb alaplap (fed(ő)lap) területe: $\boldsymbol{t = r^2 \cdot \pi}$
- Nagyobb alaplap (alaplap) területe: $\boldsymbol{T = R^2 \cdot \pi}$
- Palást (Oldallap) területe: $\mathbf{T_{palást}} = \boldsymbol{(r + R) \cdot \pi \cdot a}$

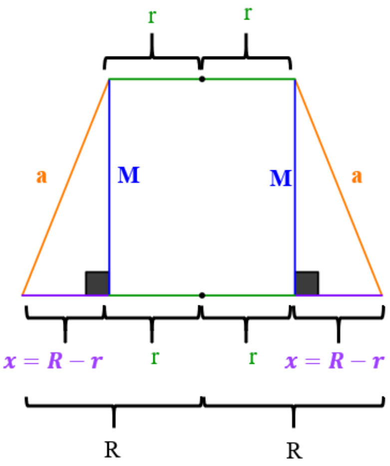
Felszín (A):

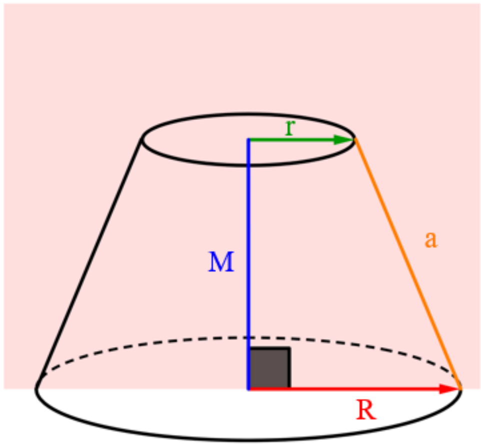
$$\boldsymbol{A = t + T + T_{palást} = r^2 \cdot \pi + R^2 \cdot \pi + (r + R) \cdot \pi \cdot a}$$

Térfogat (V):

$$\boldsymbol{V = \frac{(r^2 + r \cdot R + R^2) \cdot \pi \cdot M}{3}}$$

Csonkakúp metszet





Pitagorasz tétel:

$$x^2 + M^2 = a^2$$