

Hatvány, gyök, logaritmus

Hatványozás

1) Írjuk fel egyetlen hatványként!

a) $\frac{4^5 \cdot 4^8}{4^7}$

b) $\frac{a^8 \cdot a^4}{a^7 \cdot a^3}$

c) $\frac{x^{12} \cdot y^5}{y^3 \cdot x^9}$

d) $\frac{2^2 \cdot 3^4 \cdot 2^4}{2^8 \cdot 3^3}$

e) $\frac{7^7 \cdot 7^{-2}}{7^4} \cdot \frac{11^3 \cdot 11^2}{11^5 \cdot 11^{-3}}$

f) $\frac{p^3 \cdot q^7}{q^4 \cdot p^3} \cdot \frac{q^{10} \cdot p^2}{q^5 \cdot p^3}$

g) $\frac{a^4 \cdot b^2 \cdot c^{11}}{a^9 \cdot b \cdot c^2} \cdot \frac{a^3 \cdot b^{12} \cdot c^8}{a^2 \cdot b^5 \cdot c^{12}}$

h) $\frac{11^2 \cdot 11^7 \cdot 4^{13} \cdot 4^{-7}}{11^6 \cdot 4^5 \cdot 4^{-2}} \cdot \frac{11^5 \cdot 4^9 \cdot 4^2}{11^3 \cdot 4^3 \cdot 11}$

i) $\frac{(h^5 \cdot h^{-3})^2 \cdot (h^4)^3 \cdot h^8}{((h^5)^2 \cdot h^{10})^2}$

j) $\frac{(m^2)^3 \cdot n^6}{n^4 \cdot m^5} \cdot \frac{(n^3)^2 \cdot m^7}{(n^5)^2 \cdot m^{11}}$

k) $\frac{(2^6)^2 \cdot (5^2)^5}{(2^4)^3 \cdot (5^3)^3} \cdot \frac{(2^8)^3 \cdot (5^6)^3}{(2^2)^{12} \cdot (5^5)^2}$

l) $\frac{((a^3)^{-2})^4 \cdot b^{13}}{(b^3 \cdot a^7)^3} \cdot \frac{(a^{-6} \cdot b^2)^5}{(a^5 \cdot b^2)^4}$

m) $\frac{(p^3)^{-4} \cdot (q^2 \cdot r^{-2})^5}{(p^6 \cdot q^5 \cdot r^4)^{-2}} \cdot \left(\frac{1}{p^{-3}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{q^8}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{r^{11}}\right)^4$

Tovább a feladathoz

Kihozás gyökjel alól

2) Hozzuk ki a gyökjel alól, amit ki tudunk!

- a) $\sqrt[4]{x^4}$
- b) $\sqrt[4]{x^5}$
- c) $\sqrt[5]{128}$
- d) $\sqrt[3]{x^7}$
- e) $\sqrt{32 \cdot x^5}$

Tovább a feladathoz

Bevitel gyökjel alá

3) Vigyük be a gyökjel alá, amit be tudunk!

- a) $2 \cdot \sqrt[4]{2}$
- b) 5
- c) $3x \cdot \sqrt{x+2}$

Tovább a feladathoz

N-edik gyök

4) Egy gömb alakú üzemanyagtartályban összesen 33510 liter üzemanyagot tárolunk. Mekkora a gömb sugara? Milyen hosszú hengeres üzemanyag tartályra lenne szükség ugyanennyi üzemanyag tárolásához, ha a henger sugara megegyezik a gömb sugarával?

$$\left(V_{gömb} = \frac{4\pi}{3} \cdot R^3, V_{henger} = R^2 \cdot \pi \cdot l \right)$$

Tovább a feladathoz

5) Egy szállítmányozási cég Rubik kockák szállításával foglalkozik. Különböző méretű kocka alakú dobozokat használnak a szállításhoz. Mekkora élhosszúságú dobozra lenne szükségük, ha egy Rubik kocka éle 6 cm és tudjuk, hogy 125 db kocka éppen kitölti a dobozt?

Tovább a feladathoz

- 6) Zsófi szeretné betenni a megtakarított pénzét a bankba, hogy kamatozhasson. Hány százalék kamatot fizet a bank a megtakarításokra, ha Zsófi 2015-ben 500 000 Ft-ot helyezett el a bankban és 2022-ben 614 937 Ft-ot vett ki?

Tovább a feladathoz

Gyök átírás hatványos alakba

- 7) Írjuk át a gyökös kifejezéseket hatvány alakba, a hatványokat gyökös alakba!

a) $\sqrt[10]{2^4}$

b) $c^{\frac{7}{3}}$

c) $(\sqrt[3]{12})^7$

d) $(5^4)^{\frac{1}{10}}$

e) $\sqrt{r^{\frac{1}{5}}} \cdot \sqrt[4]{r^{\frac{5}{3}}}$

f) $\frac{11^{\frac{4}{3}}}{11^{\frac{9}{5}}}$

g) $\left(\sqrt[4]{\sqrt{\frac{2}{611}}}\right)^9$

h) $(11^{0,5})^{\frac{1}{2}}$

i) $(\sqrt[5]{a^2})^3 \cdot \sqrt{a^7}$

j) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{-\frac{2}{4}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^9}$

k) $(\sqrt[6]{x^{-5}})^{\frac{2}{6}} \cdot \sqrt[12]{x^{\frac{4}{3}}}$

l) $\sqrt{\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[5]{3 \cdot \sqrt[4]{3^{\frac{2}{3}}}}}}$

$$\text{m) } \frac{p^{\frac{3}{4}} \cdot \left[\left(\frac{1}{p^8} \right)^{-7} \cdot \left(\frac{11}{p^{12}} \right)^{21} \right]^{-3}}{\left(p^{\frac{5}{7}} \right)^{\frac{-1}{2}}}$$

Tovább a feladathoz

Gyökös egyenletek

8) Oldjuk meg az alábbi gyökös egyenleteket!

a) $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x-1} = 0$

b) $\sqrt{x+5} = x+3$

c) $\sqrt{2x^2 - 4x + 4} - x = 2$

d) $\sqrt{x^2 + 8x + 16} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 1 = 0$

Tovább a feladathoz

Exponenciális egyenletek

9) Oldjuk meg az alábbi exponenciális egyenleteket!

a) $2^x = 8$

b) $2^x \cdot 4^{x-1} = 8^{3x}$

c) $27^x \cdot 9^{2x-1} = 3^{2x-\frac{2}{3}}$

d) $8^{x^2-4x+3} = 1$

e) $2^{x^2+2x-11} = 16$

f) $2^x \cdot 81 = 16 \cdot 3^x$

g) $5^{x+1} \cdot 9 = 625 \cdot 3^{x-1}$

h) $5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$

i) $3 \cdot 4^x + 4^{x+1} = 896$

j) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

k) $16^x - 7 \cdot 4^x = -10$

Tovább a feladathoz

10) Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a racionális számok halmazán!

$$2^{x+3} = 1024$$

Tovább a feladathoz

11) Mely természetes számra teljesül az alábbi egyenlőség?

$$\sqrt{4^x - 15 \cdot 2^x} = 4$$

Tovább a feladathoz

12) Határozzuk meg az alábbi egyenlet megoldáshalmazát!

$$9^x - 4^{x-\frac{1}{2}} = 4^{x+1} - 3^{2x-1}$$

Tovább a feladathoz

Exponenciális egyenlőtlenségek

13) Oldjuk meg az exponenciális egyenlőtlenségeket!

a) $2^x > 8$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$

c) $2^x \cdot 3^x < 36^{3x-2}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} > 2^x$

Tovább a feladathoz

14) Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $3^{x+4} < 9$

b) $4 \cdot 2^{x+2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Tovább a feladathoz

15) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget!

$$2,5^{x^2+3x-4} \geq 1$$

Tovább a feladathoz

Exponenciális egyenletrendszerek

16) Oldjuk meg az exponenciális egyenletrendszereket!

a) $2 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^y = -7$

$$3 \cdot 2^x - 3^y = 0$$

b) $5^x \cdot 5^{y-1} = 25$

$$\frac{3^x}{3^{2y}} = 27$$

Tovább a feladathoz

Exponenciális függvények

17) Ábrázoljuk az $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^{x+1} - 1$ függvényt, és a grafikon alapján jellemezzük is!

Tovább a feladathoz

18) Ábrázoljuk az $f(x) = 5^{x-2} + 1$ függvényt, és a grafikon alapján jellemezzük is!

Tovább a feladathoz

19) Ábrázoljuk az $f(x) = 4 \cdot 3^{-x+4} - 12$ függvényt, és a grafikon alapján jellemezzük is!

Tovább a feladathoz

Logaritmus

20) Határozzuk meg x értékét a logaritmus definícióját alkalmazva:

- a) $\log_2 8 = x$
- b) $\log_3 9 = x$
- c) $\log_2 \frac{1}{4} = x$
- d) $\log_4 x = 2$
- e) $\log_3 x = -1$
- f) $\log_5 x = 3$
- g) $\log_x 16 = 4$
- h) $\log_x 27 = 3$
- i) $\log_x 16 = -2$

Tovább a feladathoz

Logaritmus azonosságok

21) Határozzuk meg az alábbi logaritmusos kifejezések értékét a logaritmus azonosságait felhasználva:

- a) $\log_3 1 = x$
- b) $\log_x \frac{1}{4} = 2$
- c) $\log_5 x = 125$
- d) $\log_8 4 + \log_8 2$
- e) $\log 4 + \log 25$
- f) $\log_9 810 - \log_9 10$
- g) $\log_4(3x - 18) - \log_4 1,5$
- h) $6 \cdot \log_a 2$
- i) $-2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$
- j) $p^2 \cdot \log_3 \frac{12}{11}$
- k) $-\frac{1}{4} \cdot \log_r 2^4$
- l) $7 \cdot \log_7 14 - \log_7 14^3$

m) $2 \cdot \log_{121} \frac{1}{11} + \log_{121} 11^3$

n) $3^{\log_x 81 + 2 \cdot \log_x \frac{1}{9}}$

o) $9^{\log_9 - 3^6 - 4 \cdot \log_9 27}$

p) $\log_2 3 \cdot \log_3 2$

q) $\log_4 5^2 \cdot \log_5 16$

Tovább a feladathoz

Logaritmus értelmezési tartomány

22) Határozzuk meg az alábbi logaritmusos kifejezések értelmezési tartományát:

a) $\log_3(6x + 5)$

b) $\log_2(x^2 - 3x - 4)$

c) $\log_{11}(x^2 - 5x + 4)$

d) $\log_3(x + 2) + \log_3(2x - 6)$

e) $\log_5(4 - x) + \log_3(8x - 7)$

f) $\log_4(x + 2) - \log_4(3x - 9)$

g) $\log_4\left(\frac{x+2}{3x-9}\right)$

h) $\log_x(3x + 2)$

i) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)$

j) $\log[(10 - x) - (x - 2)]$

k) $\log_2(4x^2 + 12x) - \log_2(2x)$

Tovább a feladathoz

Logaritmus egyenletek

23) Oldjuk meg a logaritmusos egyenleteket:

- a) $\log_3(2x + 5) = 2$
- b) $\lg(x - 1) + \lg 4 = 2$
- c) $\log_5(x + 2) + \log_5(x - 1) = \log_5 18$
- d) $\log_5(3 - 4x) - \log_5(5x + 6) = 2$
- e) $\lg(x + 15)^2 - \lg(3x + 5) = \lg 20$
- f) $(\log_2 x - 3) \cdot (\log_2 x^2 + 6) = 0$
- g) $(\log_2(x - 3)) \cdot (\log_2(x^2 + 6)) = 0$

Tovább a feladathoz

24) Oldjuk meg a logaritmusos egyenleteket:

- a) $\log_2(x - 4) = -2$
- b) $\log_{\sqrt[4]{2}}(x - 3) - 3 \cdot \log_2(x - 3) = 3$

Tovább a feladathoz

Logaritmus szöveges feladatok

25) A földrengés erősségét a Richter-skála szerint szokták jellemezni. Egy szabványos szeizmográf legnagyobb kitérésének segítségével állapítjuk meg, hogy a Richter-skálán hányas erősségű a földrengés. A kitérés mikrométerben vett értékének vesszük a tízes alapú logaritmusát. Ha a kitérés $1 \text{ cm} = 10^4 \mu\text{m}$, akkor a földrengés $\log_{10} 10^4 = 4$ -es erősségű.

- a) Hányas erősségű földrengést mértünk, ha a szeizmográf legnagyobb kitérése 0,009 m volt?
- b) Mekkora lehetett a szeizmográf maximális kitérése, ha a Richter-skálán $\frac{60}{11} \sim 5,45$ -ös erősségű földrengést mértünk meg?

Tovább a feladathoz

26) Egy híg vizes oldat savasságát vagy lúgosságát a pH-értékkel szoktuk jellemezni. Ezt az értéket az oxónium-ion-koncentráció tízes alapú logaritmusá határozza meg, pontosabban annak ellentétével egyenlő. ($pH = -\log_{10} x$, ahol x a koncentráció mérőszáma)

- Mennyi lehet a teljesen tiszta víz pH-ja, ha tudjuk, hogy pontosan 10^{-7} az oxónium-ion koncentrációja.
- Az autó-akkumulátorokban is megtalálható kénsav bizonyos formában elérheti a 0,5-ös pH értéket. Mennyi oxónium-iont tartalmazhat 1 mol kénsav? (1 mol = $6 \cdot 10^{23}$ db molekula)

Tovább a feladathoz

27) Zsófi elhatározta, hogy a pénzét Bitcoin-ba fekteti. A Bitcoin jelenlegi árfolyama 38 500 USA dollár, azaz 1 Bitcoinért 38 500 dollárt kell fizetni. Zsófinak dollárra átszámolva 500 500 USA dollár megtakarítása van, amit teljes egészében Bitcoin vásárlásra költ. A Bitcoin árfolyamáról azt tudjuk, hogy minden évben a 10 %-kal növekszik.

- Mennyi pénze lesz 10 év múlva?
- Mennyi idő múlva lesz 2,5-szer annyi pénze, mint amennyit befektetett Bitcoinba?

Tovább a feladathoz

28) A 14-es tömegszámú szén izotóp felezési ideje 5566 év. Mennyi idős az a régészeti lelet, amelyben a C^{14} atomok 35,3%-a bomlott el? Az atomok hány százaléka bomlik el 12 000 év alatt? Az atomok számát az alábbi képlettel számítjuk: $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$. Ahol N_0 az atomok számának kezdeti, N pedig a pillanatnyi értéke, T a felezési idő és t az eltelt idő.

Tovább a feladathoz

Logaritmus egyenlőtlenségek

29) Oldjuk meg az alábbi logaritmusos egyenlőtlenségeket:

a) $\log_2 x < 4$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x > 1$

c) $\log_6(3x - 7) < 2$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(6x + 2) < 1$

e) $\ln x > 5$

f) $\log_{\frac{5}{7}}(5x + 7) \geq -2$

g) $\log_{\frac{1}{2}}(-x^2 - 2x + 8) > -1$

Tovább a feladathoz

Logaritmus egyenletrendszerek

30) Oldjuk meg az alábbi logaritmusos egyenletrendszereket:

a) $\lg x - 3 \cdot \log_2 y = 4$

$$3 \cdot \lg x + 3 \cdot \log_2 y = 0$$

b) $\log_2 x + \log_2 y = 5$

$$\log_4(x - y) = 1$$

Tovább a feladathoz

Logaritmus függvény

31) Ábrázoljuk az $f(x) = \log(x + 2) + 2$ függvényt és válaszoljunk a kérdésekre!

a) Mi a függvény értelmezési tartománya? $(] - 2; \infty[)$

b) Rajta van -e a grafikonon a $P(-2,1)$ pont? (igen)

Tovább a feladathoz

32) Ábrázoljuk az $f(x) = 2 \cdot \log_2(x - 1) + 2$ függvényt, és a grafikon alapján jellemezzük is!

Tovább a feladathoz

33) Ábrázoljuk az $f(x) = -2 \cdot \log_5(2x - 4) + 2$ függvényt, és a grafikon alapján jellemezzük is!

Tovább a feladathoz