

# Koordinátageometria

## Vektorok ismétlés

1) Ábrázoljuk az alábbi vektorokat!

a)  $a(3; 5)$

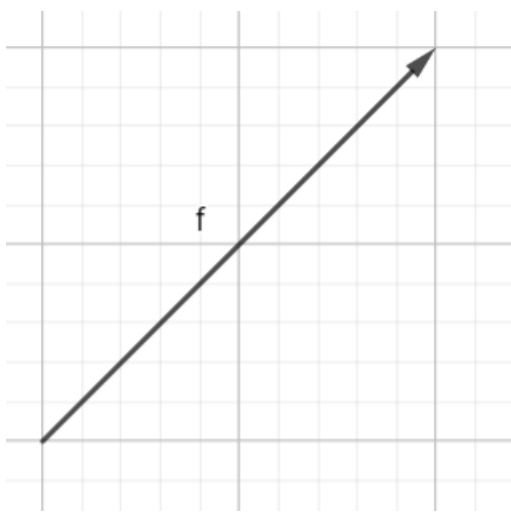
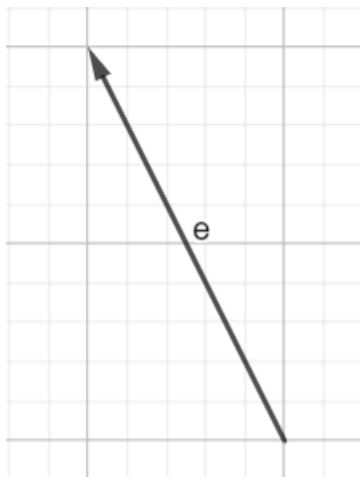
b)  $b(-2; 4)$

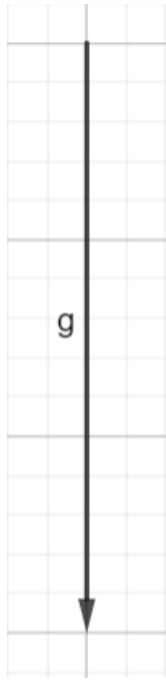
c)  $c = 5i - 4j$

d)  $d = -3i - 3j$

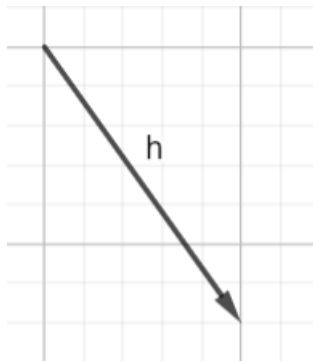
Tovább a feladathoz

2) Olvassuk le az alábbi vektorok koordinátáit!

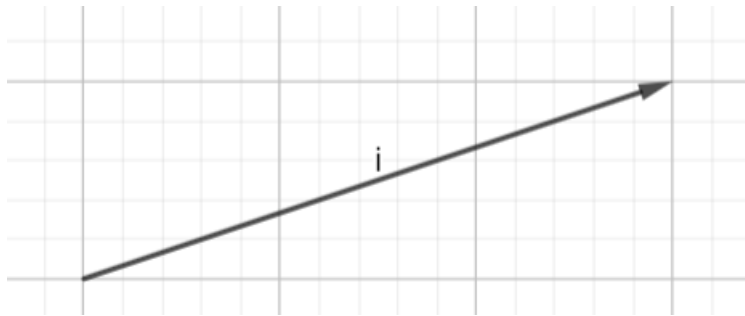




c)



d)



e)

Tovább a feladathoz

3) Adott három vektor:  $A(1,7), B(2,-3), C(-4,5)$ . Adjuk meg az alábbi vektorok koordinátáit:

a)  $A + C$

b)  $A + B$

c)  $A - C$

Tovább a feladathoz

4) Adott három vektor:  $A(-3,5), B(-4,-1), C(5,6)$ . Adjuk meg az alábbi vektorok koordinátáit:

a)  $A - C$

b)  $A - B$

c)  $(A + C) - B$

Tovább a feladathoz

5) Adott három vektor:  $A(2,-4), B(-5,5), C(-3,-2)$

Adjuk meg az alábbi vektorok koordinátáit:

a)  $A + B + C$

b)  $(A + C) - B$

c)  $(A - B) - B$

Tovább a feladathoz

6) Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$3\underline{a} - 2 \cdot (\underline{b} + 2\underline{a}) + 3 \cdot (\underline{a} - \underline{b})$$

Tovább a feladathoz

7) Adjuk meg az alábbi vektorok összegét és különbségét:

a)  $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$

b)  $\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$

c)  $\underline{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Tovább a feladathoz

8) Adjuk meg az alábbi vektorműveletek eredményét:

a)  $\underline{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

$$3\underline{a} + 2\underline{b}$$

$$\frac{\underline{a} - \underline{b}}{2}$$

$$\frac{2}{3}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b}$$

b)  $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \underline{d} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\underline{a} + 2\underline{b} - \underline{c}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (2\underline{d} + \underline{b}) - \underline{a}$$

$$\frac{\underline{a} + 2\underline{c}}{3} + \underline{d}$$

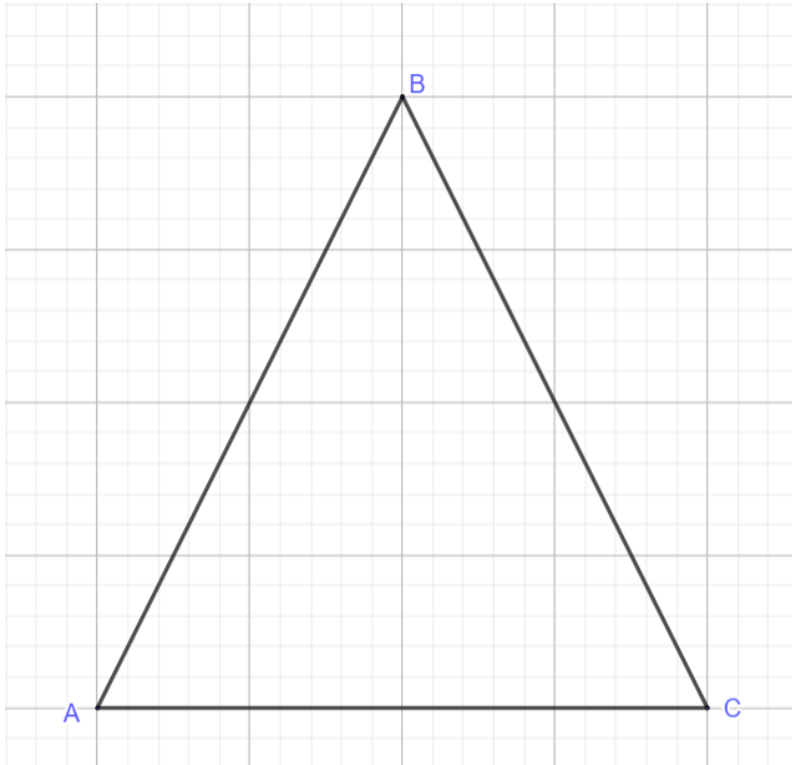
Tovább a feladathoz

9) Adott a képen látható háromszög. Tudjuk, hogy az oldalai egy-egy vektort alkotnak, sorrendben:

**a** jelöli az A pontból B pontba mutató vektort

**b** jelöli a B pontból C pontba mutató vektort

**c** jelöli a C pontból A pontba mutató vektort.



Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

- Adjuk meg az **a**, **b** és **c** vektorok koordinátáit!
- Mekkora a háromszög kerülete?
- Adjuk meg annak a vektornak a koordinátáit, amely a B pontból az AC oldal felezőpontjába mutat!
- Adjuk meg annak a vektornak a koordinátáit, amelyik a BC oldal felezőpontjából az AC oldal felezőpontjába mutat!

Tovább a feladathoz

10) Adjuk meg az alábbi pontok távolságát:

a)  $A = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

b)  $A = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \end{bmatrix}$

Tovább a feladathoz

11) Adjuk meg az alábbi vektorok nagyságát (hosszát):

a)  $\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

b)  $\underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Tovább a feladathoz

### Skaláris szorzat

12) Mennyi az  $|a| = 7$  és  $|b| = 4$  vektorok skaláris szorzata, ha a két vektor bezárt szöge:

a)  $90^\circ$

b)  $180^\circ$

c)  $120^\circ$

d)  $48^\circ$

Tovább a feladathoz

13) Mennyi az  $|e| = 20$  és az  $f = \frac{1}{5}e$  vektorok skaláris szorzata, ha a vektorok bezárt

szöge:

a)  $20^\circ$

b)  $40^\circ$

c)  $60^\circ$

Tovább a feladathoz

14) Adott  $A(-3,5)$ ,  $B(4,7)$  és  $C(3,-5)$  pontok a koordinátarendszerben.

- a) Adjuk meg az origóból az A pontba mutató vektor és az origóból a B pontba mutató vektor skaláris szorzatát!
- b) Adjuk meg az origóból az A pontba mutató vektor és az origóból a C pontba mutató vektor skaláris szorzatát!

Tovább a feladathoz

15) Határozzuk meg a vektorok ismeretlen koordinátáit, ha  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 22$  és

- a)  $\vec{a} (10, -y)$ ,  $\vec{b} (-5, 12)$
- b)  $\vec{a} (-6, 4)$ ,  $\vec{b} (x, 24)$

Tovább a feladathoz

### Vektorok szöge

16) Hány fokal szöget zárnak be egymással az alábbi vektorok:

- a)  $\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$
- b)  $\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$
- c)  $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$
- d)  $\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Tovább a feladathoz

17) A vízszinteshez képest milyen szögben húzzuk a szánkót, ha  $|F| = 8 [N]$  erővel  $|s| = 12 [m]$ -t tettünk meg és eközben a végzett munka:

- a)  $48 [J]$
- b)  $0 [J]$
- c)  $80 [J]$
- d)  $-24 [J]$

Tovább a feladathoz

18) Határozzuk meg, hogy mekkora szöget zárnak be az alábbi vektorok!

- a)  $|a| = 6; |b| = 4$  és  $ab = 12$
- b)  $|u| = 3; |v| = 2$  és  $uv = -4$
- c)  $|e| = 5; |f| = 3$  és  $ef = 0$

Tovább a feladathoz

19) Egy háromszög csúcsai  $A(1, -2), B(3,4)$  és  $C(0,5)$  koordinátájú pontok. Számítsuk ki a háromszög szögeit!

Tovább a feladathoz

20) Két vektor hossza  $5 \text{ cm}$  és  $7 \text{ cm}$ . Legfeljebb mekkora lehet a skaláris szorzatuk?

Tovább a feladathoz

### Felező, harmadolópont

21) Adottak  $A(0, -4)$  és  $B(-5,3)$  pontok.

- a) Adjuk meg az AB szakasz F felezőpontjának koordinátáit!
- b) Adjuk meg az AB szakasz A-hoz közelebb eső H harmadolópontjának koordinátáit!

Tovább a feladathoz



22) Adott az  $A(-6,3)$ ,  $B(-1,-2)$ ,  $C(1,4)$  háromszög.

- Határozzuk meg a háromszög területét!
- Számítsuk ki az oldalfelezőpontok koordinátáit!
- Számítsuk ki az AB oldal A-hoz közelebb eső harmadolópontját!

Tovább a feladathoz

23) Egy háromszög oldalainak felezőpontjai  $F_{AB}(2,2)$ ,  $F_{BC}(6,5; 2)$ ,  $F_{AC}(3,5; 0)$ .

Számítsuk ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit!

Tovább a feladathoz

24) Határozzuk meg az alábbi két pontot összekötő szakasz

- Felezőpontjának koordinátáit!
- A ponthoz közelebbi harmadoló pontjának koordinátáit!
- B ponthoz közelebbi nyolcadoló pontjának koordinátáit!

Tovább a feladathoz

### Súlypont

25) Az ABC Háromszög csúcspontjai  $A(-7,-3)$ ,  $B(7,-1)$ ,  $C(1,7)$ . Írjuk fel:

- az AB, a BC és az AC oldalak felezőpontját!
- A háromszög súlypontját!

Tovább a feladathoz

26) Adott a koordináta-rendszerben az FGH háromszög, ahol  $F(-3,5)$ ,  $G(3,5)$  és  $H(0,-1)$  pontokat jelölik.

- Számítsuk ki a súlypont helyét!
- Milyen koordinátájú pontba toljuk el a H pontot, hogy az új súlypont az  $S(-1,3)$  pontba essen?

Tovább a feladathoz

27) Határozzuk meg az alábbi pontok által kifeszített háromszög súlypontjának koordinátáit.

$$A = \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S = ?$$

Tovább a feladathoz

28) Határozzuk meg az alábbi pontok által kifeszített háromszög B pontjának koordinátáit.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad B = ?$$

Tovább a feladathoz

### Irányvektor

29) Adjuk meg az egyenes irányvektorát, ha az egyenes átmegy az adott kétponton!

- a)  $A(-1,3)$  és  $B(2,-1)$
- b)  $A(2,1)$  és  $B(-3,1)$
- c)  $A(4,-2)$  és  $B(2,5)$
- d)  $A(-7,-1)$  és  $B(-3,6)$

Tovább a feladathoz

30) Adottak egy ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái.  $A(-6,-3)$ ,  $B(0,2)$  és  $C(3,-4)$ . Adjuk meg a háromszög oldalaira fektetett egyenesek irányvektorait!

Tovább a feladathoz

### Normálvektor

31) Írjuk fel az alábbi vektorok irány és normálvektorait:

- a)  $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
- b)  $\underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$

Tovább a feladathoz

## Egyenes egyenlete

32) Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, ami merőleges e egyenesre és átmegy P ponton:

a)  $e: 3x + y = 4$

$P(2; -1)$

b)  $e: x - 4y = -8$

$P(0; 5)$

Tovább a feladathoz

33) Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, ami párhuzamos e egyenessel és átmegy P ponton:

a)  $e: 3x + 4y = 6$

$P(-1; -3)$

b)  $e: -2x - 3y = 9$

$P(7; 5)$

Tovább a feladathoz

34) Írjuk fel az alábbi pontokra illeszkedő egyenes egyenletét:

a)  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

b)  $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$

Tovább a feladathoz

35) Írjuk fel az alábbi pontra illeszkedő egyenes egyenletét, aminek normálvektor  $n = (-5; 3)$ :

$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Tovább a feladathoz

36) Írjuk fel az alábbi pontra illeszkedő egyenes egyenletét, aminek meredeksége  $m = -\frac{1}{3}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Tovább a feladathoz

37) Határozzuk meg az A és B pontokat összekötő szakasz felezőmerőlegesének egyenletét.

$$A = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tovább a feladathoz

38) Ábrázoljuk két pontjával az  $2x - 3y = 6$  egyenletű egyenest és állapítsuk meg a meredekségét!

Tovább a feladathoz

39) Számítsuk ki, hogy  $p$  mely értéke mellett illeszkedik az  $A(2,1)$  pont a  $2x + py = 10$  egyenesre!

Tovább a feladathoz

40) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $P(3,6)$  ponton és az egyik normálvektora:

a)  $n(1,3)$

b)  $n(-2,1)$

c)  $n(3,6)$

d)  $n(-4,-5)$

Tovább a feladathoz

41) Melyik egyenes az ABC egyenlőszárú háromszög szimmetriatengelye, ha az alap két végpontja  $A(-1, -4)$  és  $B(9,8)$ !

Tovább a feladathoz

42) Adjuk meg az egyenes egy normálvektorát és meredekségét, ha az egyenlete:

a)  $2x - 5y = 5$

b)  $-3x - y = -12$

c)  $4x + 7y = 8$

d)  $x + 6y = 1$

Tovább a feladathoz

### Egyenesek metszéspontja

43) Határozzuk meg az alábbi egyenesek metszéspontjának koordinátáit:

a)  $e: 2x + 5y = 6$

$f: -x + 2y = -3$

b)  $e: 4x + 2y = -7$

$f: -2x - y = 5$

c)  $e: x + 3y = 2$

$f: 2x + 6y = 4$

Tovább a feladathoz

44) Adjuk meg az e és az f egyenes metszéspontját, ha az e egyenes egyenlete  $2x - 4y = 6$ , az f egyenes egyenlete pedig  $-x + 3y = -2$ !

Tovább a feladathoz

45) Adott két egyenes egyenlete. A g egyenes egyenlete  $3x + 4y = 8$ , a h egyenes egyenlete  $7x - 4y = -8$ . Melyik az a pont, amelyik mindkét egyenesen rajta van?

Tovább a feladathoz

46) Van-e az alábbi egyeneseknek metszéspontja, ha igen, adjuk meg a metszéspont koordinátáit!

a)  $4x - 8y = -8$  és  $8x - 8y = 16$

b)  $-3x + y = 4$  és  $x - 3y = -12$

c)  $2x + 5y = 6$  és  $-4x - 10y = 12$

d)  $7x - 6y = 1$  és  $3,5x - 3y = 10$

Tovább a feladathoz

### Két egyenes távolsága

47) Határozzuk meg e és f egyenesek távolságát:

e:  $2x + 2y = -5$

f:  $x + y = 3$

Tovább a feladathoz

### Pont és egyenes távolsága

48) Határozzuk meg e egyenes és P pont távolságát:

a) e:  $2x - 5y = -7$

P(2; 1)

b) e:  $3x + 5y = 5$

P(5; -2)

Tovább a feladathoz

### Két egyenes hajlásszöge

49) Határozzuk meg e és f egyenesek hajlásszögét:

a)  $e: -2x + y = -1$

$f: x + 3y = 0$

b)  $e: x + y = 3$

$f: 2x + 2y = 4$

Tovább a feladathoz

### Háromszög területe

50) Adott 3 pont a koordináta rendszerben, számítsuk ki a 3 pont által meghatározott háromszög területét.

a)  $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

b)  $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

Tovább a feladathoz

51) Adottak az  $A(-5, -5), B(7, -3), C(-5, 4), D(-1, 2), E(2, -6), F(8, 4)$  pontok.

Számítsuk ki

a) az ABC háromszög területét!

b) az ABD háromszög területét!

c) az DEF háromszög területét!

d) az EFC háromszög területét!

Tovább a feladathoz

52) Határozzuk meg e egyenes és a koordináta tengelyek által bezárt háromszög területét

$e: 6x + 3y = 18$

Tovább a feladathoz

53) Határozzuk meg e f és g egyenesek által bezárt háromszög területét

$$e: -4x + 2y = 6$$

$$f: 3x - 2y = 14$$

$$g: 2x + 2y = 0$$

Tovább a feladathoz

### Kör egyenlete

54) Adott a kör középpontja (K) és sugara (r), határozzuk meg a kör egyenletét:

a)  $K(1; 2)$

$$r = 6$$

b)  $K(-3; -5)$

$$r = 4$$

c)  $K(-1,5; \sqrt{2})$

$$r = \sqrt{17}$$

Tovább a feladathoz

55) Adjuk meg annak a körnek az egyenletét, ami a koordinátatengelyeket 1-1 pontban érinti, a sugara 5 egység és az 1. síknegyedben található!

Tovább a feladathoz

56) Adott a kör egyenlete határozzuk meg a kör középpontját és sugarát:

a)  $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 81$

b)  $\left(x + \frac{3}{7}\right)^2 + (y - \sqrt{31})^2 = 105$

c)  $x^2 + 4x + y^2 - 8y - 5 = 0$



57) Írjuk fel azon pontok halmazának egyenletét, melyek az  $O(4; -12)$  ponttól 3 egység távolságra vannak! Milyen alakzatról van szó?

Tovább a feladathoz

58) Mit rajzolnak a koordinátarendszerben az alábbi egyenletek?

a)  $x + y = 9$

b)  $(x + 2)^2 + y^2 = 0$

c)  $x^2 + y^2 = 25$

d)  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$

Tovább a feladathoz

59) Adjuk meg AB átmérőjű kör egyenletét:

$$A = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tovább a feladathoz

60) Adjuk meg az A középpontú kör egyenletét, amin rajta van B pont:

$$A = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tovább a feladathoz

61) Adott a  $B(-3,1)$  és az  $P(0,-3)$  pont. Adjuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek

a) B a középpontja és P a kör egy pontja!

b) P a középpontja és B a kör egy pontja!

Tovább a feladathoz

62) Az EFGH négyzet két szemközti csúcsa  $E(4, -1)$  és  $G(10, 2)$ .

- a) Adjuk meg a négyzet köréírt körének egyenletét!
- b) Adjuk meg az F és H csúcsok koordinátáját is!

Tovább a feladathoz

63) Adjuk meg a megadott kör és egyenes metszéspontjait:

a)  $k: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 81$

$e: 2x + 4y = 6$

b)  $k: (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$

$e: 3x - y = 2$

Tovább a feladathoz