1. Egyetemi alapok

Inverz függvény

Lépések	Példa
Ha egy függvény inverz függvényét keressük, nincs más dolgunk, mint átrendezni az egyenletet úgy, hogy az egyik oldalon csak x szerepeljen, ez lesz az inverz függvény.	$\boldsymbol{y = f(x)}$ $\boldsymbol{y^{-1} = f^{-1}(x)}$
<u>Lineáris függvény inverze</u> is egy **<u>lineáris függvény</u>** lesz.	$y = 2x + 3 \qquad /-3$ $y - 3 = 2x \qquad /:2$ $\frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = x$ $\boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}$
<u>Másodfokú függvény inverze</u> egy **<u>gyökös függvény</u>** lesz. Gyökvonásnál két részre ágazik a feladat lesz egy pluszos, és egy mínuszos megoldás is.	$y = x^2 - 6x + 3 \qquad /Teljes\ négyzet\ alak$ $y = (x-3)^2 - 6 \qquad /+6$ $y + 6 = (x-3)^2 \qquad /\sqrt{\ }$ $\sqrt{y+6} = x - 3 \qquad /+3$ $\sqrt{y+6} + 3 = x$ $\boldsymbol{f^{-1}(x) = \sqrt{x+6} + 3} \qquad \boldsymbol{f^{-1}(x) = -\sqrt{x+6} + 3}$
<u>Gyökös függvény inverze</u> egy **<u>másodfokú függvény</u>** lesz.	$y = \sqrt{x+5} \qquad /\ ^2$ $y^2 = x + 5 \qquad /-5$ $y^2 - 5 = x$ $\boldsymbol{f^{-1}(x) = x^2 - 5}$
<u>Exponenciális függvény inverze</u> egy **<u>logaritmus függvény</u>** lesz.	$y = 2^x + 6 \qquad /-6$ $y - 6 = 2^x \qquad /\ log_2$ $log_2(y-6) = log_2 2^x \qquad /Azonosság$ $log_2(y-6) = x\, log_2 2 \qquad /\ log_2 2 = 1$ $log_2(y-6) = x$ $\boldsymbol{f^{-1}(x) = log_2(x-6)}$
<u>Logaritmus függvény inverze</u> egy **<u>exponenciális függvény</u>** lesz.	$y = lg(x+1) \qquad /Azonosság$ $lg\, 10^y = lg(x+1) \qquad /Sz.m.n.$ $10^y = x + 1 \qquad /-1$ $10^y - 1 = x$ $\boldsymbol{f^{-1}(x) = 10^x - 1}$

Vektorok által bezárt szög

Lépések	Példa
Adott két vektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$
Szeretnénk kiszámolni a két vektor által bezárt szöget.	
<u>1. lépés</u>: Kiszámoljuk a két vektor skaláris szorzatát.	
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$	$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b}} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) = 0 + 12 + 2 = \mathbf{14}$
<u>2. lépés</u>: Kiszámoljuk a két vektor nagyságát (hosszúságát).	
$\|a\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$ $\|b\| = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}$	$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{\mathbf{14}}$ $\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{0 + 16 + 1} = \sqrt{\mathbf{17}}$
<u>3. lépés</u>: Felírjuk az alábbi képletet, és behelyettesítjük a korábban kiszámolt értékeket. α a két vektor által bezárt szög lesz.	
$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\alpha}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\alpha$ $14 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{17} \cos\alpha$
<u>4. lépés</u>: Leosztjuk az egyenletet $\|a\| \cdot \|b\|$-vel.	
$\boldsymbol{\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|a\| \cdot \|b\|} = \cos\alpha}$	$\frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} = \cos\alpha$ $0{,}907 = \cos\alpha$
<u>5. lépés</u>: Visszakeressük a szöget.	
$\boldsymbol{\cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|a\| \cdot \|b\|}\right) = \alpha}$	$\boldsymbol{\alpha = 24{,}84°}$

Keresztszorzás

Lépések	Példa
Adott két vektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
Szeretnénk kiszámolni a két vektor keresztszorzatát.	
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	
<u>1. lépés</u>: Letakarjuk az első sort és összeszorozzuk a_2-t b_3-mal, és ebből kivonjuk a_3 és b_2 szorzatát.	
$\begin{pmatrix} \cancel{a_1} \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{b_1} \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ $a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2$	$\begin{pmatrix} \cancel{2} \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{6} \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $(-3) \cdot (-4) - 5 \cdot 1 = 12 - 5 = \mathbf{7}$
<u>2. lépés</u>: Letakarjuk a második sort és összeszorozzuk a_1-t b_3-mal, és ebből kivonjuk a_3 és b_1 szorzatát (elé $\ominus$).	
$\begin{pmatrix} a_1 \\ \cancel{a_2} \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \cancel{b_2} \\ b_3 \end{pmatrix}$ $-(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1)$	$\begin{pmatrix} 2 \\ \cancel{-3} \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ \cancel{1} \\ -4 \end{pmatrix}$ $-(2 \cdot (-4) - 5 \cdot 6) = -(-8 - 30) = \mathbf{38}$
<u>3. lépés</u>: Letakarjuk a harmadik sort és összeszorozzuk a_1-t b_2-vel, és ebből kivonjuk a_2 és b_1 szorzatát.	
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cancel{a_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cancel{b_3} \end{pmatrix}$ $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \cancel{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ \cancel{-4} \end{pmatrix}$ $2 \cdot 1 - (-3) \cdot 6 = 2 - (-18) = \mathbf{20}$
<u>4. lépés</u>: Sorrendbe ezeket írjuk be egy oszlopvektorba.	
$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}}$	$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 38 \\ 20 \end{pmatrix}}$

Polinomosztás

Polinomosztás	Sima osztás
Polinomosztásnál is ugyanazokat a lépéseket kell elvégezni, mint egy sima írásbeli osztásnál. Példa: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1)$	$1944 \div 6$
<u>1. lépés</u>: A legnagyobb kitevőjű tagot elosztjuk x-szel.	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2$	$19'44 \div 6 = 3$
<u>2. lépés</u>: A kapott taggal (x^2) visszaszorozzuk $x - 1$-et, és ezt írjuk az eredeti kifejezés alá.	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2$ $-(x^3 - x^2)$	$1944 \div 6 = 3$ -18
<u>3. lépés</u>: $x^3 - x^2$-et kivonjuk az eredeti kifejezésből.	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2$ $\underline{-(x^3 - x^2)}$ $0 - x^2 - 5x + 6$	$1944 \div 6 = 3$ $\underline{-18}$ 1
<u>4. lépés</u>: Ugyanaz, mint első lépés.	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2 - x$ $\underline{-(x^3 - x^2)}$ $-x^2 - 5x + 6$	$194'4 \div 6 = 32$ $\underline{-18}$ 14
<u>5. lépés</u>: A kapott taggal ($-x$) visszaszorozzuk $x - 1$-et, és ezt írjuk az eredeti kifejezés alá.	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2 - x$ $\underline{-(x^3 - x^2)}$ $-x^2 - 5x + 6$ $-(-x^2 + x)$	$1944 \div 6 = 32$ $\underline{-18}$ 14 -12
<u>6. lépés</u>: $x^2 - x$-et kivonjuk $x^2 - 5x + 6$-ból.	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2 - x$ $\underline{-(x^3 - x^2)}$ $-x^2 - 5x + 6$ $\underline{-(-x^2 + x)}$ $0 - 6x + 6$	$1944 \div 6 = 32$ $\underline{-18}$ 14 $\underline{-12}$ 2

<u>**7. lépés**</u>: Ugyanaz, mint első lépés.	
$x^3-2x^2-5x+6 \div (x-1) = x^2-x-6$ $\underline{-(x^3-x^2)}$ $-x^2-5x+6$ $\underline{-(-x^2+x)}$ $-6x+6$	$1944' \div 6 = 32$ $\underline{-18}$ 14 $\underline{-12}$ 24
<u>**8. lépés**</u>: A kapott taggal (-6) visszaszorozzuk $x-1$-et, és ezt írjuk az eredeti kifejezés alá.	
$x^3-2x^2-5x+6 \div (x-1) = x^2-x-6$ $\underline{-(x^3-x^2)}$ $-x^2-5x+6$ $\underline{-(-x^2+x)}$ $-6x+6$ $-(-6x+6)$	$1944 \div 6 = 324$ $\underline{-18}$ 14 $\underline{-12}$ 24 -24
<u>**9. lépés**</u>: $-6x+6$-et kivonjuk $-6x+6$-ból.	
$x^3-2x^2-5x+6 \div (\mathbf{x-1}) = \mathbf{x^2-x-6}$ $\underline{-(x^3-x^2)}$ $-x^2-5x+6$ $\underline{-(-x^2+x)}$ $-6x+6$ $\underline{-(-6x+6)}$ $0 \ + \ 0$	$1944 \div \mathbf{6} = \mathbf{324}$ $\underline{-18}$ 14 $\underline{-12}$ 24 $\underline{-24}$ 0
$\mathbf{x^3-2x^2-5x+6 = (x-1)\cdot(x^2-x-6)}$	$\mathbf{1944 = 6 \cdot 324}$

2. Sorozatok

Nevezetes sorozatok

	Sorozat	Példák
0-hoz tartó sorozatok	$\frac{1}{n^k} \to 0$	$\frac{1}{n} \to 0$
		$\frac{1}{n^2} \to 0$
		$\frac{1}{n^3} \to 0$
	$\frac{1}{\sqrt[k]{n}} \to 0$	$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$
		$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \to 0$
		$\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \to 0$
∞-hez tartó sorozatok	$n^k \to \infty$	$n \to \infty$
		$n^2 \to \infty$
		$n^3 \to \infty$
	$\sqrt[k]{n} \to \infty$	$\sqrt{n} \to \infty$
		$\sqrt[3]{n} \to \infty$
		$\sqrt[4]{n} \to \infty$
	$n! \to \infty$	$n! \to \infty$
	$n^n \to \infty$	$n^n \to \infty$
1-hez tartó sorozat	$\sqrt[n]{n} \to 1$	$\sqrt[n]{n} \to 1$
Különleges sorozatok	$k^n \to \begin{cases} k^n \to \infty, & ha\ k > 1 \\ k^n \to 1, & ha\ k = 1 \\ k^n \to 0, & ha -1 < k < 1 \\ divergens, & ha\ k \leq -1 \end{cases}$	$2^n \to \infty$ $1^n \to 1$ $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ $(-2)^n \to divergens$
	$\log_k n \to \begin{cases} \log_k n \to \infty, & ha\ k > 1 \\ \log_k n \to -\infty, & ha\ 0 < k < 1 \end{cases}$	$\log_2 n \to \infty$ $\log_{\frac{1}{2}} n \to -\infty$

Sorozatok erőssége

$log_k n < \sqrt[k]{n} < n^k < k^n < n! < n^n$

Hányadosok határértéke

	Hányadosok határértéke	Példák
$\frac{\boldsymbol{Polinom}}{\boldsymbol{Polinom}}$	Ha két polinom van elosztva egymással, akkor 3-féle eredmény jöhet ki a határértékre. Ezeket akár ránézésre is megtudjuk állapítani, csak meg kell keresni a számláló legnagyobb kitevőjű tagját, és a nevező legnagyobb kitevőjű tagját. Mindig a nevező legnagyobb kitevőjű tagjával osszuk el az összes többi tagot.	
	1. eset Ha a számláló legnagyobb kitevőjű tagja és a nevező legnagyobb kitevőjű tagja megegyezik egymással, akkor a határérték a legnagyobb kitevőjű tagok előtti szorzó tényezők hányadosa lesz.	$lim\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n}^{\mathbf{3}}-5n^2+3n}{\mathbf{4}\boldsymbol{n}^{\mathbf{3}}+6n^2-9n}=$ $=lim\frac{\mathbf{2}\frac{n^3}{n^3}-5\frac{n^2}{n^3}+3\frac{n}{n^3}}{\mathbf{4}\frac{n^3}{n^3}+6\frac{n^2}{n^3}-9\frac{n}{n^3}}=$ $=lim\frac{\mathbf{2}-5\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}}{\mathbf{4}+6\frac{1}{n}-9\frac{1}{n^2}}=$ $=\frac{\mathbf{2}-0+0}{\mathbf{4}+0-0}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
	2. eset Ha a számláló legnagyobb kitevőjű tagja nagyobb, mint a nevező legnagyobb kitevőjű tagja, akkor a határérték plusz vagy mínusz végtelen lehet attól függően, hogy a legnagyobb kitevőjű tagok előtti szorzó tényezők milyen előjelűek.	$lim\frac{6\boldsymbol{n}^{\mathbf{5}}-8n^3+3}{9\boldsymbol{n}^{\mathbf{4}}+4n^2-9n}=$ $=lim\frac{6\frac{n^5}{n^4}-8\frac{n^3}{n^4}+\frac{3}{n^4}}{9\frac{n^4}{n^4}+4\frac{n^2}{n^4}-9\frac{n}{n^4}}=$ $=lim\frac{6n-8\frac{1}{n}+\frac{3}{n^4}}{9+4\frac{1}{n^2}-9\frac{1}{n^3}}=$ $=lim\frac{6n-0+0}{9+0-0}=+\infty$
	3. eset Ha a számláló legnagyobb kitevőjű tagja kisebb, mint a nevező legnagyobb kitevőjű tagja, akkor a határérték 0 lesz függetlenül a szorzótényezők előjeleitől.	$lim\frac{5\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}-7n+8}{3\boldsymbol{n}^{\mathbf{3}}+5n^2-6n}=$ $=lim\frac{5\frac{n^2}{n^3}-7\frac{n}{n^3}+\frac{8}{n^3}}{3\frac{n^3}{n^3}+5\frac{n^2}{n^3}-6\frac{n}{n^3}}=$ $=lim\frac{5\frac{1}{n}-7\frac{1}{n^2}+\frac{8}{n^3}}{3+5\frac{1}{n}-6\frac{1}{n^2}}=$ $=lim\frac{0-0+0}{3+0-0}=\mathbf{0}$

<table>
<tr><td rowspan="4">$\frac{\boldsymbol{Hatv\acute{a}ny}}{\boldsymbol{Hatv\acute{a}ny}}$</td><td>Ha két hatványos kifejezés van elosztva egymással, akkor is 3-féle eredmény jöhet ki a határértékre. Ezeket ugyan úgy, mint az előzőekben akár ránézésre is megtudjuk állapítani, csak meg kell keresni a számláló legnagyobb alapú tagját, és a nevező legnagyobb alapú tagját. Mindig a nevező legnagyobb alapú tagjával osszuk el az összes többi tagot.</td><td></td></tr>
<tr><td>1. eset
Ha a számláló legnagyobb alapú tagja és a nevező legnagyobb alapú tagja megegyezik egymással, akkor a határérték a legnagyobb alapú tagok előtti szorzó tényezők hányadosa lesz.</td><td>$$lim\frac{\mathbf{3}\cdot\mathbf{8^n}-8\cdot 6^n+7\cdot 3^n}{\mathbf{5}\cdot\mathbf{8^n}+2\cdot 5^n-3\cdot 2^n}=$$ $$=lim\frac{\mathbf{3}\cdot\frac{8^n}{8^n}-8\cdot\frac{6^n}{8^n}+7\cdot\frac{3^n}{8^n}}{\mathbf{5}\cdot\frac{8^n}{8^n}+2\cdot\frac{5^n}{8^n}-3\cdot\frac{2^n}{8^n}}=$$ $$=lim\frac{\mathbf{3}-8\cdot\left(\frac{6}{8}\right)^n+7\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^n}{\mathbf{5}+2\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^n-3\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^n}=$$ $$=\frac{\mathbf{3}-0+0}{\mathbf{5}+0-0}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$$</td></tr>
<tr><td>2. eset
Ha a számláló legnagyobb alapú tagja nagyobb, mint a nevező legnagyobb alapú tagja, akkor a határérték plusz vagy mínusz végtelen lehet attól függően, hogy a legnagyobb alapú tagok előtti szorzó tényezők milyen előjelűek.</td><td>$$lim\frac{3\cdot\mathbf{9^n}+8\cdot 5^n-2\cdot 4^n}{11\cdot\mathbf{7^n}+7\cdot 6^n-5\cdot 2^n}=$$ $$=lim\frac{3\cdot\frac{9^n}{7^n}+8\cdot\frac{5^n}{7^n}-2\cdot\frac{4^n}{7^n}}{11\cdot\frac{7^n}{7^n}+7\cdot\frac{6^n}{7^n}-5\cdot\frac{2^n}{7^n}}=$$ $$=lim\frac{3\cdot\left(\frac{9}{7}\right)^n+8\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^n-2\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^n}{11+7\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n-5\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^n}=$$ $$lim\frac{3\cdot\left(\frac{9}{7}\right)^n+0-0}{11+0-0}=\infty$$</td></tr>
<tr><td>3. eset
Ha a számláló legnagyobb alapú tagja kisebb, mint a nevező legnagyobb alapú tagja, akkor a határérték 0 lesz, függetlenül a szorzótényezők előjeleitől.</td><td>$$lim\frac{5\cdot\mathbf{4^n}+7\cdot 3^n-9\cdot 2^n}{2\cdot\mathbf{6^n}+3\cdot 5^n-6\cdot 3^n}=$$ $$=lim\frac{5\cdot\frac{4^n}{6^n}+7\cdot\frac{3^n}{6^n}-9\cdot\frac{2^n}{6^n}}{2\cdot\frac{6^n}{6^n}+3\cdot\frac{5^n}{6^n}-6\cdot\frac{3^n}{6^n}}=$$ $$=lim\frac{5\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^n+7\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^n-9\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^n}{2+3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n-6\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^n}=$$ $$=\frac{0+0-0}{2+0-0}=\frac{0}{2}=\mathbf{0}$$</td></tr>
</table>

e-hez tartó sorozatok	$lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{szám}=1$	$lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3}=1$
	$lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$	$lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$
	$lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}=e^{k}$	$lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=e^{2}$
	$lim\left(a+\frac{k}{n}\right)^{n}=\infty \quad (a>1)$	$lim\left(3+\frac{1}{n}\right)^{n}=\infty$
	$lim\left(a+\frac{k}{n}\right)^{n}=0 \quad (a<1)$	$lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^{n}=0$

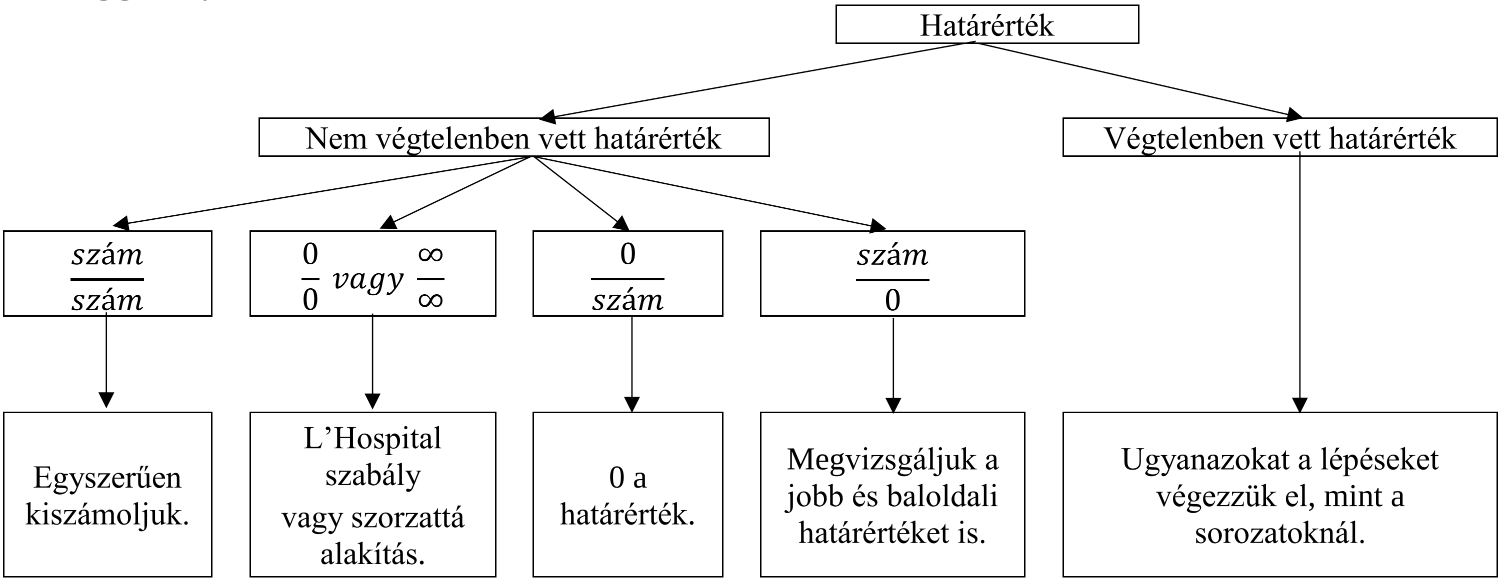
Monotonitás

Lépések	Példa
Adott egy sorozat: $a_n=\cdots$	$a_n=\frac{2n-5}{6n+3}$
Szeretnénk megtudni, hogy szigorúan monoton nő, vagy csökken.	
1. lépés: Határozzuk meg a_{n+1}-et.	$a_{n+1}=\frac{2\cdot(n+1)-5}{6\cdot(n+1)+3}=\frac{2n+2-5}{6n+6+3}=\frac{2n-3}{6n+9}$
2. lépés: Írjuk fel az alábbi különbséget: $a_{n+1}-a_n$	$a_{n+1}-a_n=\frac{2n-3}{6n+9}-\frac{2n-5}{6n+3}$
3. lépés: A különbség közös nevezőre hozása, zárójelek felbontása, egynemű tagok összevonása.	$\frac{(2n-3)\cdot(6n+3)}{(6n+9)\cdot(6n+3)}-\frac{(2n-5)\cdot(6n+9)}{(6n+3)\cdot(6n+9)}=$ $=\frac{12n^2+6n-18n-9}{36n^2+18n+54n+27}-\frac{12n^2+18n-30n-45}{36n^2+18n+54n+27}=$ $=\frac{12n^2+6n-18n-9-(12n^2+18n-30n-45)}{36n^2+18n+54n+27}=$ $=\frac{12n^2+6n-18n-9-(12n^2+18n-30n-45)}{36n^2+18n+54n+27}=$ $=\frac{12n^2+6n-18n-9-12n^2-18n+30n+45}{36n^2+18n+54n+27}=$ $=\frac{36}{36n^2+72n+27}$
4. lépés: Nézzük meg, hogy az így kapott tört pozitív vagy negatív-e. Ha pozitív: $a_{n+1}-a_n>0\rightarrow Szig.mon.nő$ Ha negatív: $a_{n+1}-a_n<0\rightarrow Szig.mon.csökk.$	$\frac{36}{36n^2+72n+27}\rightarrow\frac{\oplus}{\oplus}=\oplus$ $a_{n+1}-a_n>0\rightarrow \boldsymbol{Szig.mon.nő}$

Küszöbindex számítás

Lépések	Példa
Adott egy sorozat és egy ε sugarú környezet: $a_n = \cdots$ $\varepsilon = \cdots$	$a_n = \frac{2n-3}{4n+5}$ $\varepsilon = 10^{-3}$
1. lépés: Számítsuk ki a sorozat határértékét.	
$A = lim\, a_n$	$\boldsymbol{A} = lim \frac{2n-3}{4n+5} = lim \frac{2\frac{n}{n} - \frac{3}{n}}{4\frac{n}{n} + \frac{5}{n}} = lim \frac{2 - \frac{3}{n}}{4 + \frac{5}{n}} = \frac{2}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$
2. lépés: Írjuk fel az alábbi egyenlőtlenséget.	
$\lvert a_n - A \rvert < \varepsilon$	$\left\lvert \frac{2n-3}{4n+5} - \frac{1}{2} \right\rvert < 10^{-3}$
3. lépés: Az abszolútérték jelen belüli különbség közös nevezőre hozása, zárójelek felbontása, egynemű tagok összevonása.	$\left\lvert \frac{2n-3}{4n+5} - \frac{1}{2} \right\rvert < 10^{-3}$ $\left\lvert \frac{(2n-3)\cdot 2}{(4n+5)\cdot 2} - \frac{4n+5}{2\cdot(4n+5)} \right\rvert < \frac{1}{1000}$ $\left\lvert \frac{4n-6}{8n+10} - \frac{4n+5}{8n+10} \right\rvert < \frac{1}{1000}$ $\left\lvert \frac{4n-6-(4n+5)}{8n+10} \right\rvert < \frac{1}{1000}$ $\left\lvert \frac{4n-6-4n-5}{8n+10} \right\rvert < \frac{1}{1000}$ $\left\lvert \frac{-11}{8n+10} \right\rvert < \frac{1}{1000}$
4. lépés: A kapott hányadosnak vegyük az abszolútértékét.	$\left\lvert \frac{-11}{8n+10} \right\rvert < \frac{1}{1000}$ $\frac{11}{8n+10} < \frac{1}{1000}$
5. lépés: Rendezzük át az egyenlőtlenséget úgy, hogy n legyen a jobb oldalon.	$\frac{11}{8n+10} < \frac{1}{1000}$ $\quad /\cdot (8n+10)$ $11 < \frac{8n+10}{1000}$ $\quad /\cdot 1000$ $11000 < 8n+10$ $\quad /-10$ $10990 < 8n$ $\quad /:8$ $\boldsymbol{1373{,}75 < n}$
6. lépés: Ha nem egész számot kaptunk eredményül, akkor lefelé kerekítsük, függetlenül a kerekítés szabályaitól.	$\boldsymbol{n_0 = 1373}$

3. Függvények határértéke



L'Hospital szabály

Lépések	Példa
Akkor alkalmazzuk, ha egy függvény határértékére $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ eredmény jön ki. Az is elképzelhető, hogy a L'Hospital szabály alkalmazása után megint egy $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték jön ki, ilyenkor még egyszer alkalmazzuk a szabályt.	
$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f}{g}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'H}\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'}{g'}}$ $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f}{g}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{L'H}\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'}{g'}}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{2^3-2^2-8\cdot 2+12}{2^3-5\cdot 2^2+8\cdot 2-4}=$ $=\frac{8-4-16+12}{8-20+16-4}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'H}$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-8}{3x^2-10x+8}=\frac{3\cdot 2^2-2\cdot 2-8}{3\cdot 2^2-10\cdot 2+8}=$ $=\frac{12-4-8}{12-20+8}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'H}$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{6x-2}{6x-10}=\frac{6\cdot 2-2}{6\cdot 2-10}=\frac{12-2}{12-10}=\frac{10}{2}=\mathbf{5}$

Jobb és bal oldali határérték

Lépések	Példa	
Akkor alkalmazzuk, ha egy függvény határértékére $\frac{szám}{0}$ eredmény jön ki. Jobb oldalinál a számtól picit nagyobb számot helyettesítünk be, bal oldalinál, pedig picit kisebbet.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}$	Jobb oldali: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=\infty$ Bal oldali: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

4. Komplex számok

$i=\sqrt{-1}$	$i^5=i=\sqrt{-1}$	$i^9=i=\sqrt{-1}$	$i^{13}=i=\sqrt{-1}$
$i^2=-1$	$i^6=-1$	$i^{10}=-1$	$i^{14}=-1$
$i^3=-i=-\sqrt{-1}$	$i^7=-i=-\sqrt{-1}$	$i^{11}=-i=-\sqrt{-1}$	$i^{15}=-i=-\sqrt{-1}$
$i^4=1$	$i^8=1$	$i^{12}=1$	$i^{16}=1$

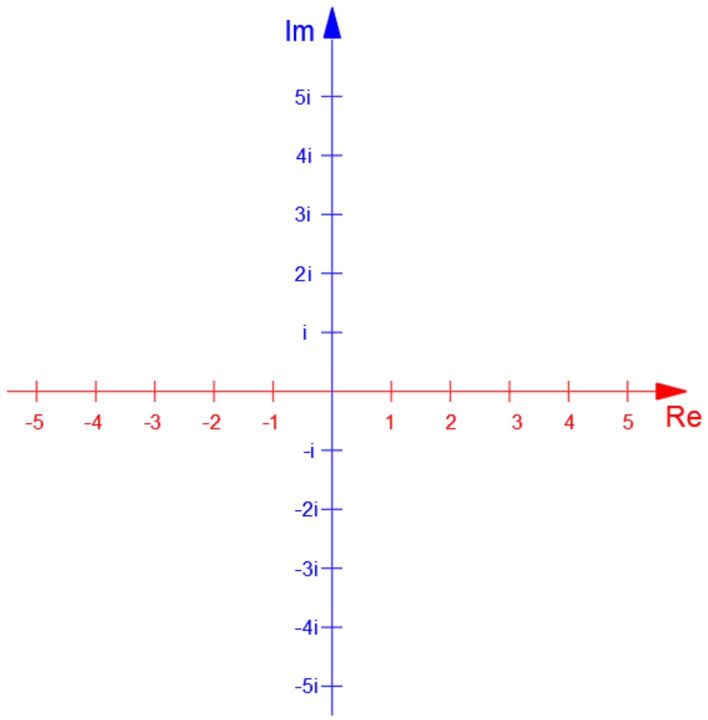
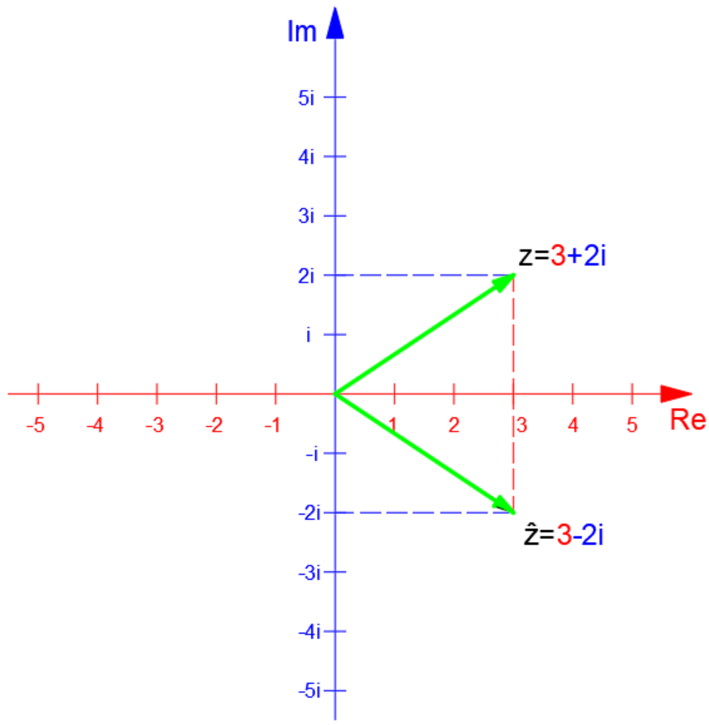
Megjegyzés: i helyett szokták j-vel is jelölni.

Algebrai alak

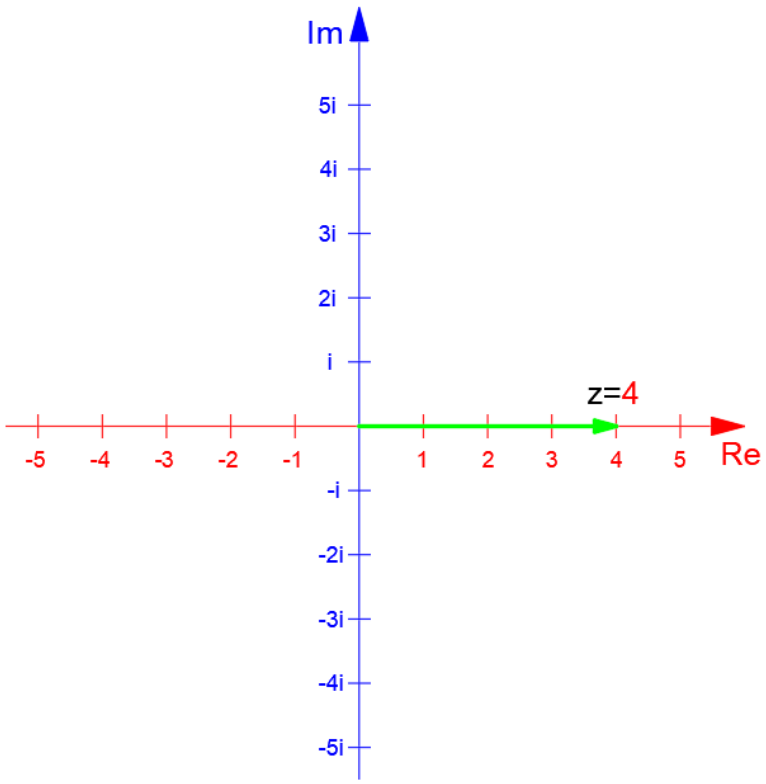
$$\boldsymbol{z = a + bi}$$

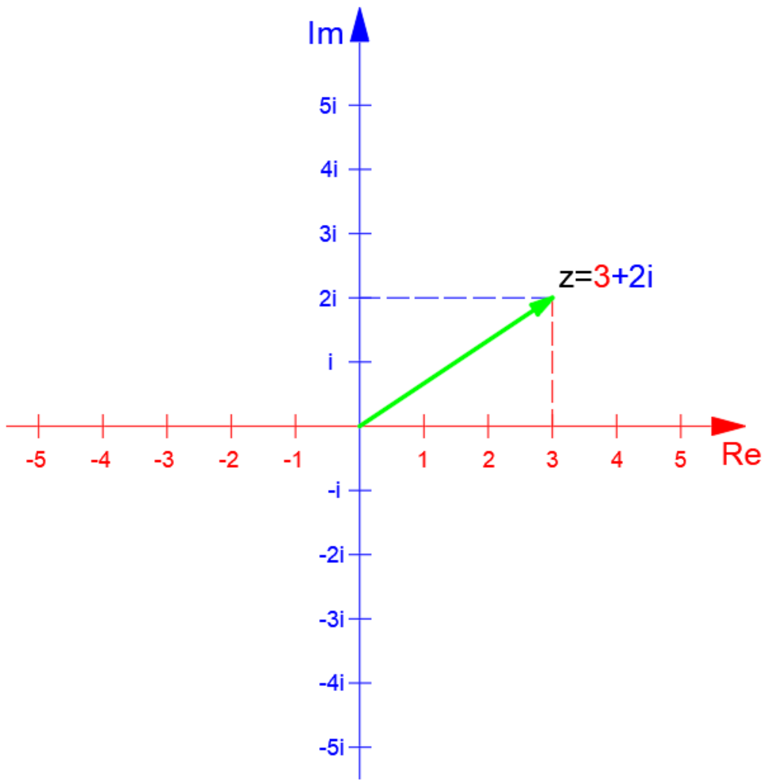
Valós rész (Re)

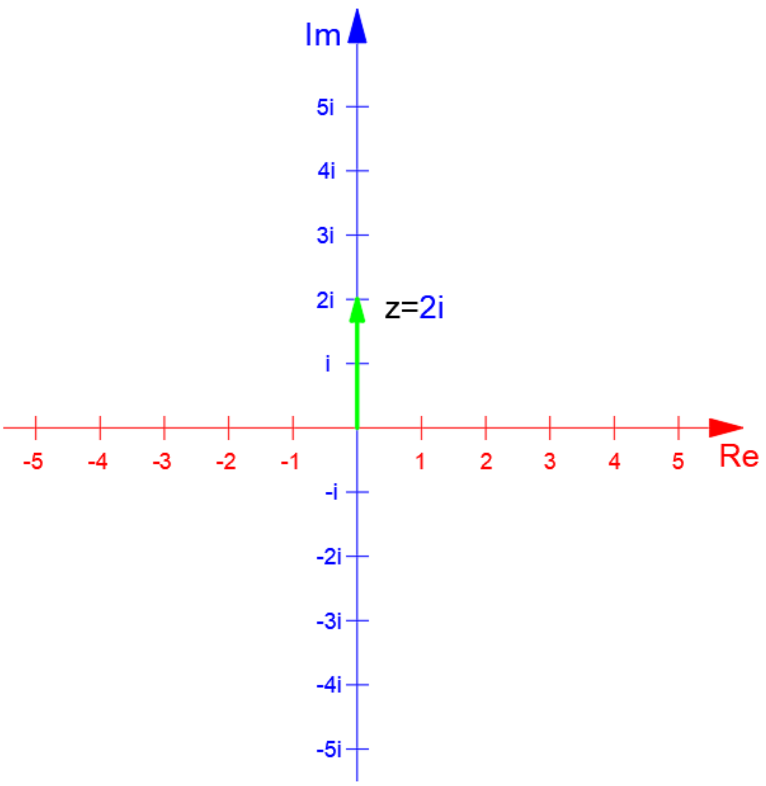
Képzetes rész (Im)

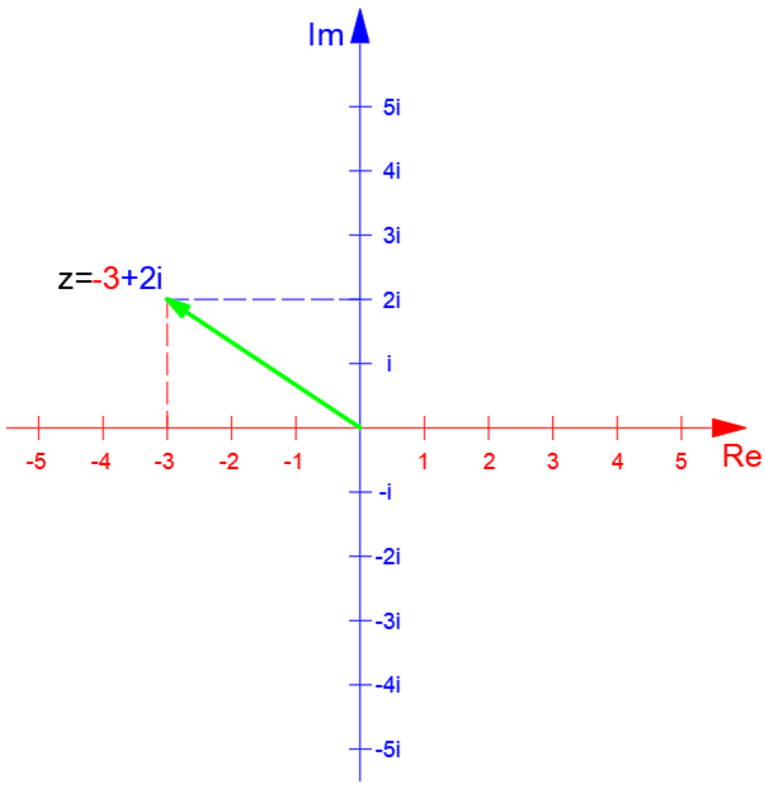
<table>
<tr><td>A komplex számsík:</td><td>Komplex szám, és konjugáltja ábrázolva a komplex számsíkon:</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Az x tengelyen a komplex szám valós részét (Re), az y tengelyen, pedig a képzetes részt (Im) jelöljük.</td><td>Komplex szám konjugáltját úgy kapjuk, hogy a képzetes részének vesszük az ellentetjét. Komplex szám és a konjugáltja mindig szimmetrikusak a valós (x) tengelyre.
Komplex szám: $z=a+bi$
Konjugáltja: $\bar{z}=a-bi$
Példa:
Komplex szám: $z=3+2i$
Konjugáltja: $\bar{z}=3-2i$</td></tr>
</table>

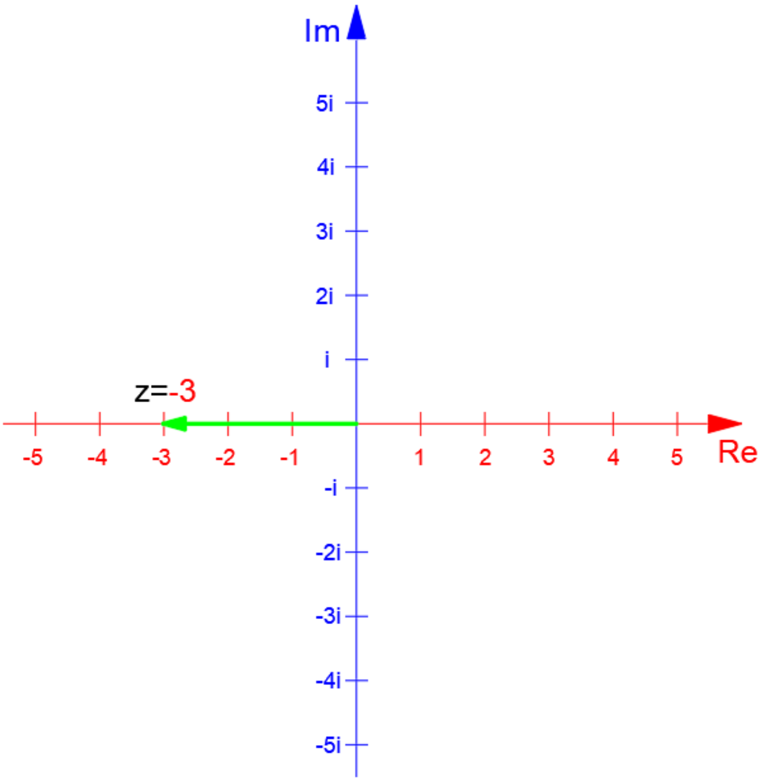
Példák a komplex számsíkon

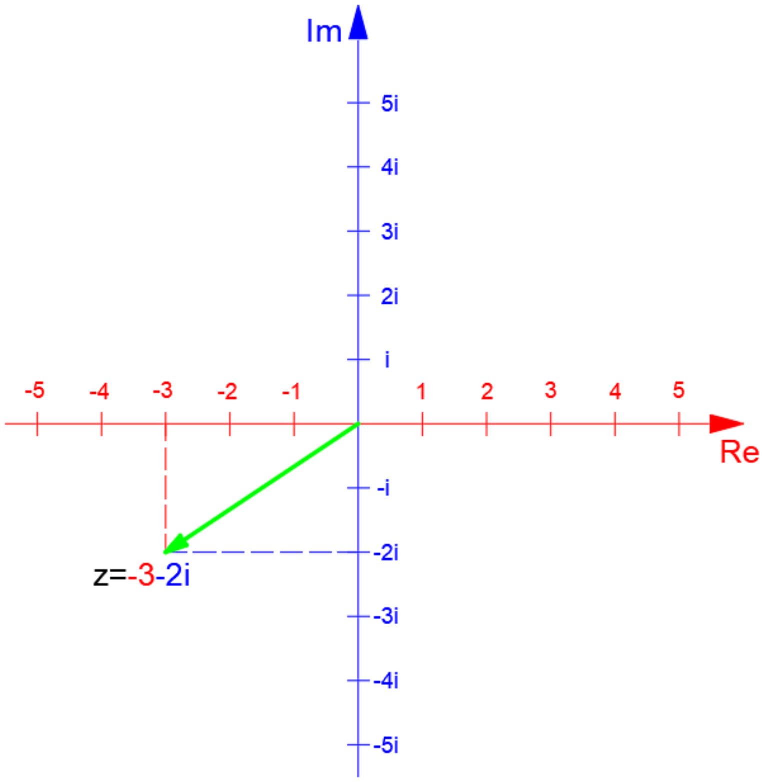


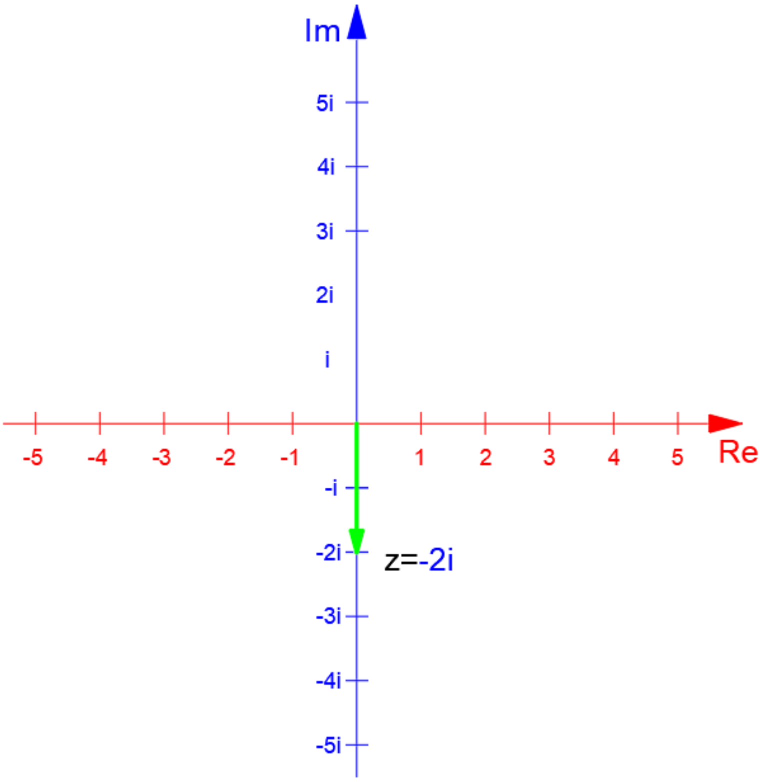


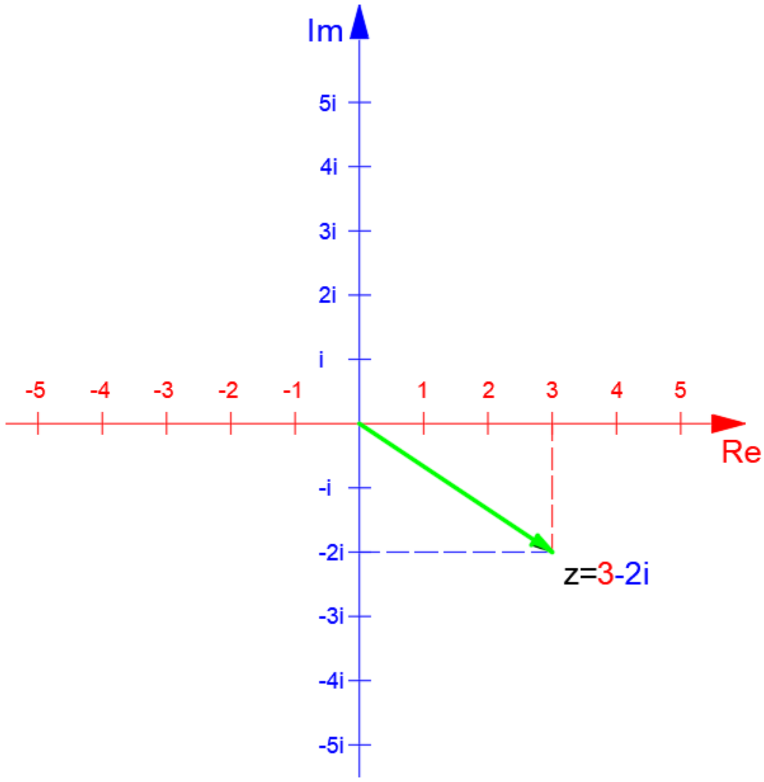





Im
5i
4i
3i
2i
i
-i
-2i
-3i
-4i
-5i
-5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5
Re
z=-3

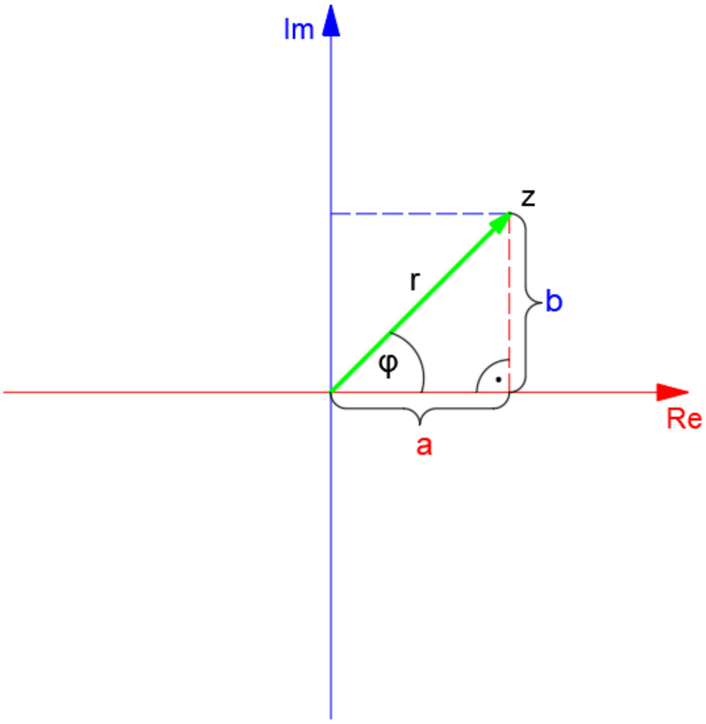
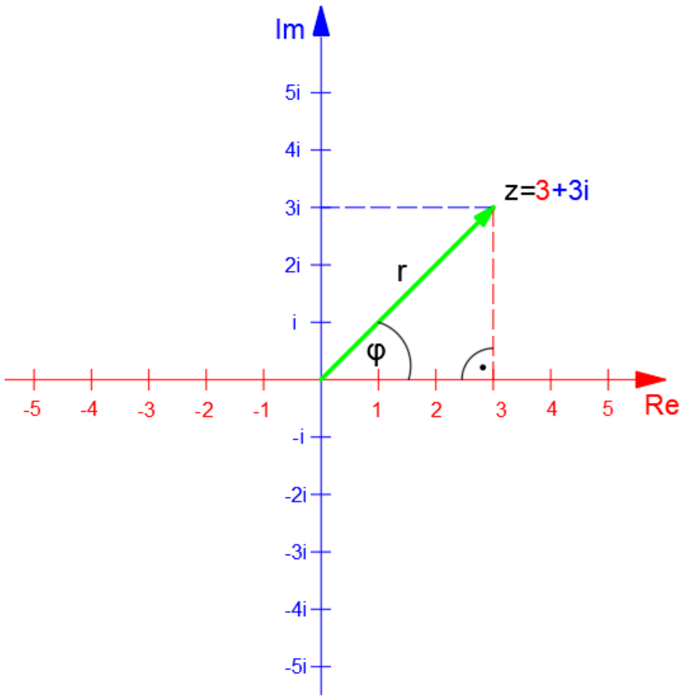

Im
5i
4i
3i
2i
i
-i
-2i
-3i
-4i
-5i
-5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5
Re
z=-3-2i


Im
5i
4i
3i
2i
i
-i
-2i
-3i
-4i
-5i
-5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5
Re
z=-2i


Im
5i
4i
3i
2i
i
-i
-2i
-3i
-4i
-5i
-5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5
Re
z=3-2i

Műveletek algebrai alakban	**Példa**
Adott két komplex szám: $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$	$z_1 = 5 + 2i$ $z_2 = 1 + 3i$
Összeadás	
Valós részt a valós résszel adjuk össze, képzetes részt a képzetes résszel.	
$\boldsymbol{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i}$	$\boldsymbol{z_1 + z_2} = (5+1) + (2+3) \cdot i = \boldsymbol{6 + 5i}$
Kivonás	
Valós részből a valós részt vonjuk ki, képzetes részből a képzetes részt.	
$\boldsymbol{z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i}$	$\boldsymbol{z_1 - z_2} = (5-1) + (2-3) \cdot i = \boldsymbol{4 - i}$
Szorzás	
Minden tagot összeszorzunk minden taggal.	
$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2} = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) =$ $= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot i \cdot a_2 + b_1 \cdot i \cdot b_2 \cdot i =$ $= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot i \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 \cdot i^2 =$ $= \boldsymbol{a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot i \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2}$	$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2} = (5 + 2i) \cdot (1 + 3i) =$ $= 5 \cdot 1 + 5 \cdot 3i + 2i \cdot 1 + 2i \cdot 3i =$ $= 5 + 15i + 2i + 6i^2 =$ $= 5 + 15i + 2i - 6 = \boldsymbol{-1 + 17i}$
Osztás	
A törtet kibővítjük a nevező konjugáltjával.	
$\frac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}} = \frac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\bar{z}_2}}{\boldsymbol{\bar{z}_2}} = \frac{a_1 + b_1 \cdot i}{a_2 + b_2 \cdot i} \cdot \frac{a_2 - b_2 \cdot i}{a_2 - b_2 \cdot i}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{5 + 2i}{1 + 3i} \cdot \frac{1 - 3i}{1 - 3i}$
Ezután elvégezzük a szorzást, számlálót a számlálóval nevezőt a nevezővel szorozzuk. A nevezőben való szorzásnál megjelenik egy nevezetes azonosság. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	
$\frac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} =$ $= \frac{(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i)}{{a_2}^2 - (b_2 i)^2} =$ $= \frac{a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot i \cdot a_2 - b_1 \cdot i \cdot b_2 \cdot i}{{a_2}^2 - {b_2}^2 \cdot i^2} =$ $= \frac{a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot i \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 \cdot i^2}{{a_2}^2 - {b_2}^2 \cdot i^2} =$ $= \frac{\boldsymbol{a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot i \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}}{\boldsymbol{{a_2}^2 + {b_2}^2}}$	$\frac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{5 + 2i}{1 + 3i} \cdot \frac{1 - 3i}{1 - 3i} =$ $= \frac{(5 + 2i) \cdot (1 - 3i)}{1^2 - (3i)^2} =$ $= \frac{5 - 15i + 2i - 6i^2}{1^2 - 3^2 \cdot i^2} =$ $= \frac{5 - 15i + 2i + 6}{1 + 9} =$ $= \frac{11 - 13i}{10} = \boldsymbol{\frac{11}{10}} - \boldsymbol{\frac{13}{10} i}$
Hatványozást és gyökvonást sosem csinálunk algebrai alakban.	Trigonometrikus vagy exponenciális alakban végezhető csak el.

Trigonometrikus alak

Áttérés algebrai alakból trigonometrikus alakba	Példa
	
Adott algebrai alakban egy komplex szám $z = a + b \cdot i$	$z = 3 + 3i$
Pitagorasz tétel segítségével számítsuk ki hosszát (r).	
$\boldsymbol{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$	$r = \sqrt{3^2 + 3^2}$ $r = \sqrt{9 + 9}$ $\boldsymbol{r} = \sqrt{18} = \boldsymbol{3 \cdot \sqrt{2}}$
Tangens szögfüggvény segítségével számítsuk ki a komplex szám és az x tengely által bezárt szög nagyságát.	
$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \to \boldsymbol{\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{3}$ $\operatorname{tg} \varphi = 1 \to \varphi = \operatorname{arctg}(1)$ $\boldsymbol{\varphi = 45° = \frac{\pi}{4}}$
Behelyettesítjük r-t és φ-t az alábbi képletbe.	
$\boldsymbol{z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)}$	Radiánban $\boldsymbol{z = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)}$ Fokban $\boldsymbol{z = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos 45° + i \sin 45°)}$

<table>
<tr><th>Műveletek trigonometrikus alakban</th><th>Példa</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Adott két komplex szám trigonometrikus alakban:
$z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$
$z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$</td><td>Radiánban
$z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right)$
$z_2 = 6 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)$</td></tr>
<tr><td>Fokban
$z_1 = 2 \cdot (\cos 90° + i \cdot \sin 90°)$
$z_2 = 6 \cdot (\cos 60° + i \cdot \sin 60°)$</td></tr>
<tr><td>Összeadás és kivonás</td><td></td></tr>
<tr><td>Nem szoktuk trigonometrikus alakban elvégezni, mindig algebrai alakban végezzük el.</td><td></td></tr>
<tr><td>Szorzás</td><td></td></tr>
<tr><td>Össze szorozzuk a hosszúságokat egymással, a szögeket pedig összeadjuk.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))}$</td><td>Radiánban
$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2} = 2 \cdot 6 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$
$= 12 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right)\right) =$
$= \boldsymbol{12 \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)}$</td></tr>
<tr><td>Fokban
$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2} = 2 \cdot 6 \cdot (\cos(90° + 60°) + i \cdot \sin(90° + 60°)) =$
$= \boldsymbol{12 \cdot (\cos(150°) + i \cdot \sin(150°))}$</td></tr>
<tr><td>Osztás</td><td></td></tr>
<tr><td>Elosszuk a hosszúságokat egymással, a szögeket pedig kivonjuk.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))}$</td><td>Radiánban
$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{2}{6} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right) =$
$= \frac{1}{3} \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6}\right)\right) =$
$= \boldsymbol{\frac{1}{3} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}$</td></tr>
<tr><td>Fokban
$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{2}{6} \cdot (\cos(90° - 60°) + i \cdot \sin(90° - 60°)) =$
$= \boldsymbol{\frac{1}{3} \cdot (\cos(30°) + i \cdot \sin(30°))}$</td></tr>
</table>

Hatványozás	
A hosszúságot annyiadikra emeljük, ahányadikon van a komplex kifejezés, a szöget pedig annyival szorozzuk meg.	
$\boldsymbol{z_1}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{r_1}^{\boldsymbol{n}} \cdot (\mathbf{cos}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\varphi_1}) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\varphi_1}))$	Radiánban $\boldsymbol{z_1}^{\mathbf{3}} = 2^3 \cdot \left(\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) =$ $= \mathbf{8} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)\right)$ Fokban $\boldsymbol{z_1}^{\mathbf{3}} = 2^3 \cdot (\cos(3 \cdot 90°) + i \cdot \sin(3 \cdot 90°)) =$ $= \mathbf{8} \cdot (\mathbf{cos}(\mathbf{270°}) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}(\mathbf{270°}))$
Gyökvonás	
A hosszúságból annyiadik gyököt vonunk, ahányadik gyök alá van vonva komplex kifejezés, a szöghöz pedig hozzáadunk $k \cdot 2\pi$-t, és elosztjuk annyival, ahányadik gyök alá van vonva.	
$\sqrt[n]{\boldsymbol{z_1}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{r_1}} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{n}}\right) + \boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{n}}\right)\right)$ $k = 0,1,2,3 \ldots (n-1)$ Ha fokban számolunk: $\sqrt[n]{\boldsymbol{z_1}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{r_1}} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{360°}}{\boldsymbol{n}}\right) + \boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{360°}}{\boldsymbol{n}}\right)\right)$ $k = 0,1,2,3 \ldots (n-1)$ Itt mindig több megoldásunk lesz. Annyi megoldás lesz amennyi n értéke, tehát ahányadik gyököt vonunk.	Radiánban $\sqrt[3]{\boldsymbol{z_1}} = \sqrt[3]{\mathbf{2}} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right)\right)$ $\boldsymbol{k = 0}$ $\sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \mathbf{0} \cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \mathbf{0} \cdot 2\pi}{3}\right)\right) =$ $= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right)\right) =$ $= \sqrt[3]{\mathbf{2}} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right)\right)$

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi_1 + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1 + k \cdot 2\pi}{n}\right)\right)}$$

$$k = 0,1,2,3 \ldots (n-1)$$

Ha fokban számolunk:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi_1 + k \cdot 360°}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1 + k \cdot 360°}{n}\right)\right)}$$

$$k = 0,1,2,3 \ldots (n-1)$$

Itt mindig több megoldásunk lesz. Annyi megoldás lesz amennyi n értéke, tehát ahányadik gyököt vonunk.

$$\boldsymbol{k = 1}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \mathbf{1} \cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \mathbf{1} \cdot 2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2}}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2}}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}\right)\right) =$$

$$\boldsymbol{= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)}$$

$$\boldsymbol{k = 2}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \mathbf{2} \cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \mathbf{2} \cdot 2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right)\right) =$$

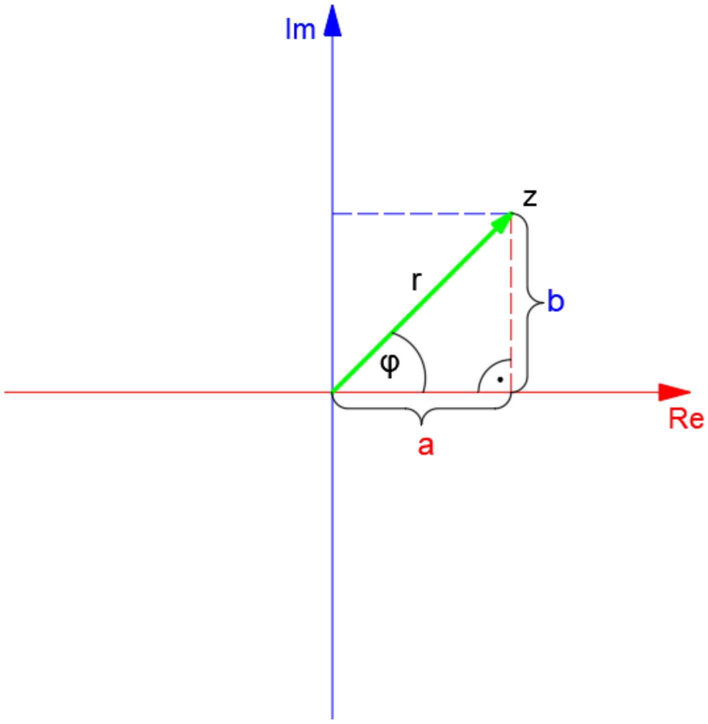
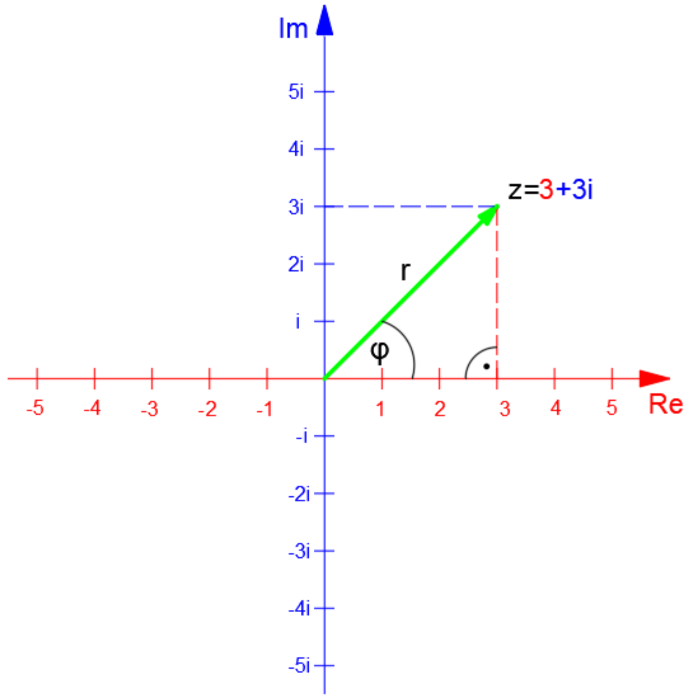
$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{2}}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{2}}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}\right)\right) =$$

$$\boldsymbol{= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right)}$$

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{z_1}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{r_1}} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{n}}\right) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{n}}\right)\right)$$ $k = 0,1,2,3 \ldots (n-1)$ Ha fokban számolunk: $$\sqrt[n]{\boldsymbol{z_1}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{r_1}} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{360°}}{\boldsymbol{n}}\right) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{360°}}{\boldsymbol{n}}\right)\right)$$ $k = 0,1,2,3 \ldots (n-1)$ Itt mindig több megoldásunk lesz. Annyi megoldás lesz amennyi n értéke, tehát ahányadik gyököt vonunk.	Fokban $$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + k \cdot 360°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90° + k \cdot 360°}{3}\right)\right)$$
	$\boldsymbol{k = 0}$ $$\sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + \mathbf{0} \cdot 360°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90° + \mathbf{0} \cdot 360°}{3}\right)\right) =$$ $$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 0°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90° + 0°}{3}\right)\right) =$$ $$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90°}{3}\right)\right) =$$ $$= \sqrt[3]{\mathbf{2}} \cdot (\mathbf{cos(30°)} + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin(30°)})$$
	$\boldsymbol{k = 1}$ $$\sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + \mathbf{1} \cdot 360°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90° + \mathbf{1} \cdot 360°}{3}\right)\right) =$$ $$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 360°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90° + 360°}{3}\right)\right) =$$ $$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{450°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{450°}{3}\right)\right) =$$ $$= \sqrt[3]{\mathbf{2}} \cdot (\mathbf{cos(150°)} + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin(150°)})$$
	$\boldsymbol{k = 2}$ $$\sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + \mathbf{2} \cdot 360°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90° + \mathbf{2} \cdot 360°}{3}\right)\right) =$$ $$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 720°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90° + 720°}{3}\right)\right) =$$ $$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{810°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{810°}{3}\right)\right) =$$ $$= \sqrt[3]{\mathbf{2}} \cdot (\mathbf{cos(270°)} + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin(270°)})$$

Exponenciális alak

Áttérés algebrai alakból exponenciális alakba	Példa
	
Ugyanazokat a lépéseket kell elvégeznünk, mint trigonometrikus alakra való áttérésnél, csak a végén más képletbe kell behelyettesíteni.	
Adott algebrai alakban egy komplex szám $z = a + b \cdot i$	$z = 3 + 3i$
Pitagorasz tétel segítségével számítsuk ki hosszát (r).	
$\boldsymbol{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$	$r = \sqrt{3^2 + 3^2}$ $r = \sqrt{9 + 9}$ $\boldsymbol{r} = \sqrt{18} = \boldsymbol{3 \cdot \sqrt{2}}$
Tangens szögfüggvény segítségével számítsuk ki a komplex szám és az x tengely által bezárt szög nagyságát.	
$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \rightarrow \boldsymbol{\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{3}$ $\operatorname{tg} \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}(1) \rightarrow \boldsymbol{\varphi = 45° = \frac{\pi}{4}}$
Behelyettesítjük r-t és φ-t az alábbi képletbe.	
$\boldsymbol{z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}}$	$\boldsymbol{z = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}}$
Fontos! **Míg trigonometrikus alaknál fokban és radiánban is beírhattuk a szögeket, addig exponenciális alakban csak radiánban lehet beírni a szögeket!**	

Műveletek exponenciális alakban	Példa
Könnyű lesz megjegyezni a műveleteket, mivel ugyanazok lesznek, mint trigonometrikus alakban voltak.	
Adott két komplex szám exponenciális alakban: $z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}$ $z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$	$z_1 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ $z_2 = 6 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$
Összeadás és kivonás	
Nem szoktuk exponenciális alakban elvégezni, mindig algebrai alakban végezzük el.	
Szorzás	
Össze szorozzuk a hosszúságokat egymással, a szögeket pedig összeadjuk.	
$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}}$	$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2} = 2 \cdot 6 \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)} = 12 \cdot e^{i \cdot \left(\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right)} = \boldsymbol{12 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}}$
Osztás	
Elosszuk a hosszúságokat egymással, a szögeket pedig kivonjuk.	
$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}}$	$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{2}{6} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{3} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6}\right)} = \boldsymbol{\frac{1}{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}}$
Hatványozás	
A hosszúságot annyiadikra emeljük, ahányadikon van a komplex kifejezés, a szöget pedig annyival szorozzuk meg.	
$\boldsymbol{{z_1}^n = {r_1}^n \cdot e^{n \cdot i \cdot \varphi_1}}$	$\boldsymbol{{z_1}^3} = 2^3 \cdot e^{3 \cdot i \cdot \frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{8 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}}}$

Gyökvonás	
A hosszúságból annyiadik gyököt vonunk, ahányadik gyök alá van vonva komplex kifejezés, a szöghöz pedig hozzáadunk $k \cdot 2\pi$-t, és elosztjuk annyival, ahányadik gyök alá van vonva.	
$\boldsymbol{\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} \cdot e^{i\frac{\varphi_1 + k\cdot 2\pi}{n}}}$ $k = 0,1,2,3 \ldots (n-1)$ Itt mindig több megoldásunk lesz. Annyi megoldás lesz amennyi n értéke, tehát ahányadik gyököt vonunk.	$\boldsymbol{\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi}{3}}}$
	$\boldsymbol{k = 0}$ $\sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+0\cdot 2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{3}} = \boldsymbol{\sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}}$
	$\boldsymbol{k = 1}$ $\sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+1\cdot 2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{2}}{3}} =$ $= \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}} = \boldsymbol{\sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{6}}}$
	$\boldsymbol{k = 2}$ $\sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{8\pi}{2}}{3}} =$ $= \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}} = \boldsymbol{\sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{9\pi}{6}}}$

5. Deriválás

Alapderiváltak

Elnevezés	Szabály	Példák
D1	$(c)' = 0$	$(5)' = 0$
		$(\cos \pi)' = 0$
		$(\ln 5)' = 0$
		$(e^2)' = 0$
D2	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(x^8)' = 8x^7$
		$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$
		$(\sqrt[6]{x})' = \left(x^{\frac{1}{6}}\right)' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6x^{\frac{5}{6}}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt[6]{x^5}}}$
		$\left(\sqrt[7]{x^3}\right)' = \left(x^{\frac{3}{7}}\right)' = \frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}} = \frac{3}{7x^{\frac{4}{7}}} = \boldsymbol{\frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}}$
		$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = \boldsymbol{-\frac{1}{x^2}}$
		$\left(\frac{1}{x^4}\right)' = (x^{-4})' = -4x^{-5} = \boldsymbol{-\frac{4}{x^5}}$
		$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = \boldsymbol{-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}$
		$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}} = \boldsymbol{-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}}$
		$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^9}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{9}{5}}}\right)' = \left(x^{-\frac{9}{5}}\right)' = -\frac{9}{5}x^{-\frac{14}{5}} = -\frac{9}{5x^{\frac{14}{5}}} = \boldsymbol{-\frac{9}{5\sqrt[5]{x^{14}}}}$
D3	$(x)' = 1$	$(x)' = 1$
D4	$(e^x)' = e^x$	$(e^x)' = e^x$
D5	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(3^x)' = 3^x \cdot \ln 3$
D6	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
D7	$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$	$(\log_6 x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 6}\left(= \frac{1}{x \cdot \ln 6}\right)$
		$(\lg x)' = (\log_{10} x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 10}\left(= \frac{1}{x \cdot \ln 10}\right)$
D8	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin x)' = \cos x$
D9	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos x)' = -\sin x$

Elnevezés	Szabály	Példák
D10	$(tg\,x)' = \frac{1}{cos^2 x}$	$(tg\,x)' = \frac{1}{cos^2 x}$
D11	$(ctg\,x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$	$(ctg\,x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$
D12	$(sh\,x)' = ch\,x$	$(sh\,x)' = ch\,x$
D13	$(ch\,x)' = sh\,x$	$(ch\,x)' = sh\,x$
D14	$(th\,x)' = \frac{1}{ch^2 x}$	$(th\,x)' = \frac{1}{ch^2 x}$
D15	$(cth\,x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$	$(cth\,x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$
D16	$(arcsin\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(arcsin\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
D17	$(arccos\,x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(arccos\,x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
D18	$(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$
D19	$(arcctg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
D20	$(arsh\,x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(arsh\,x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
D21	$(arch\,x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(arch\,x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
D22	$(arth\,x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$(arth\,x)' = \frac{1}{1-x^2}$

Deriválási szabályok

Elnevezés	Szabály	Példák
DSZ1	$(c\cdot f)'=c\cdot f'$	$(8x^6)'=\mathbf{8}\cdot \mathbf{6x^5}=\mathbf{48x^5}$
DSZ2	$\left(\frac{f}{c}\right)'=\frac{f'}{c}$	$\left(\frac{x^4}{6}\right)'=\frac{\mathbf{4x^3}}{\mathbf{6}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x^3}$
DSZ3	$(f\pm g)'=f'\pm g'$	$(x^3+7^x)'=\mathbf{3x^2}+\mathbf{7^x\cdot ln\,7}$
		$(\sin x-\ln x)'=\boldsymbol{\cos x}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$
DSZ4	$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$	$(x^4\cos x)'=\mathbf{4x^3}\cdot\boldsymbol{\cos x}+\boldsymbol{x^4}\cdot(\boldsymbol{-\sin x})$
DSZ5	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$	$\left(\frac{\sin x}{x^3}\right)'=\frac{\boldsymbol{\cos(x)\cdot x^3-\sin(x)\cdot 3x^2}}{\boldsymbol{(x^3)^2}}$
DSZ6	$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$	$(\sin(x^5))'=\boldsymbol{\cos(x^5)\cdot 5x^4}$
		$(7^{\cos x})'=\boldsymbol{7^{\cos x}\cdot \ln 7\cdot(-\sin x)}$

DSZ7	$(f^g)'=\left(e^{\ln f^g}\right)'=(e^{g\cdot\ln f})'=e^{g\cdot\ln f}(g'\cdot\ln f+g\cdot(\ln f)')=f^g\cdot(g'\cdot\ln f+g\cdot(\ln f)')$
Példa 1	$(x^x)'=\left(e^{\ln x^x}\right)'=(e^{x\cdot\ln x})'=e^{x\cdot\ln x}\cdot(1\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)')=$ $=x^x\cdot\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=\boldsymbol{x^x\cdot(\ln x+1)}$
Példa 2	$((\sin x)^{\cos x})'=\left(e^{\ln(\sin x)^{\cos x}}\right)'=\left(e^{\cos x\cdot\ln(\sin x)}\right)'=$ $=e^{\cos x\,\ln(\sin x)}\cdot(-\sin x\cdot\ln(\sin x)+\cos x\cdot(\ln(\sin x))')=$ $=(\sin x)^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\cdot\ln(\sin x)+\cos x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\right)=$ $=\boldsymbol{(\sin x)^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\cdot\ln(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)}$

6. Függvényvizsgálat

Lépések	Példa
$f(x) = \cdots$	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
1) Értelmezési tartomány	
1. lépés: Megvizsgáljuk a függvény értelmezési tartományát. 3 fajta típus van, ahol nem a valós számok az értelmezési tartomány: • $\sqrt{x} \to D_f: x \geq 0$ • $log\, x \to D_f: x > 0$ • $\frac{1}{x} \to D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Mivel egyikbe sem tartozik bele ezért: $D_f: x \in \mathbb{R}$
2) Zérushely	
1. lépés: A függvényt egyenlővé tesszük 0-val, majd megoldjuk az egyenletet. Az egyenlet megoldásai lesznek a függvény zérushelyei (ahol a függvény metszi az x tengelyt).	
$f(x) = 0$	$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ $x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0$ Egy szorzat akkor 0, ha vagy egyik, vagy másik tagja 0: $\boldsymbol{x_1 = 0}$ $x^2 - 6x + 9 = 0$ $\boldsymbol{x_2 = 3}$ A függvény a 0 és 3 pontokban metszi az x tengelyt.
3) Tengelypont (Tengelymetszet)	
1. lépés: A függvénybe minden x helyére 0-t helyettesítünk be, így megfogjuk kapni, hogy hol metszi a függvény az y tengelyt.	
$f(0) = \cdots$	$\boldsymbol{f(0)} = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = \boldsymbol{0}$ A függvény a 0 pontban metszi az y tengelyt.
4) Határértékek	
1. lépés: Megnézzük, hogy a függvény hova tart a végtelenben.	
$\lim\limits_{x \to \infty} f$	$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \infty} x^3 - 6x^2 + 9x} = \infty$
2. lépés: Megnézzük, hogy a függvény hova tart a mínusz végtelenben.	
$\lim\limits_{x \to -\infty} f$	$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - 6x^2 + 9x} = -\infty$

3. lépés: Csak akkor végezzük el ezt a lépést, ha a függvény nem a valós számok halmazán van értelmezve, hanem vannak szakadási helyei is. Megnézzük a függvény hova tart a szakadási hely jobb és bal oldalán.

$$\lim_{x \to Szakadási\ hely^+} f$$

$$\lim_{x \to Szakadási\ hely^-} f$$

Mivel a függvénynek nem volt szakadási helye, ezért ezeket nem kell elvégeznünk.

5) Monotonitás, szélső értékek

1. lépés: Lederiváljuk a függvényt.	
$f'(x)$	$f'(x) = 3x^2 - 6 \cdot 2x + 9 = 3x^2 - 12x + 9$
2. lépés: Az így kapott derivált függvényt egyenlővé tesszük 0-val.	
$f'(x) = 0$	$3x^2 - 12x + 9 = 0$ Egyszerűsíthetünk 3-mal. $x^2 - 4x + 3 = 0$
3. lépés: Megoldjuk az egyenletet.	
$f'(x) = 0$ $x_1 = \cdots$ $x_2 = \cdots$	$x^2 - 4x + 3 = 0$ $\boldsymbol{x_1 = 1}$ $\boldsymbol{x_2 = 3}$
4. lépés: Megrajzoljuk a táblázatot, ha volt az elején szakadási hely, akkor az is kapni fog egy oszlopot.	

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x$
$f'(x)$					
$f(x)$					

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$f'(x)$					
$f(x)$					

5. lépés: Kitöltjük a táblázat első sorát. Az első sorba $x = x_1$ és $x = x_2$ oszlopba 0-t írunk. A többibe pedig $\oplus$ és $\ominus$, annak megfelelően, hogy az adott tartományon a derivált értéke pozitív vagy negatív értéket vesz fel. Legyen $\oplus$ $\ominus$ $\oplus$ a maradék 3 cella a példa kedvedért.

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x$
$f'(x)$	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$					

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$f'(x)$	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$					

6. lépés: Kitöltjük a táblázat második sorát. Először az első sor ⊕ és ⊖ alatti celláit. Ha ⊕ volt akkor azon a részen szigorúan monoton növekvő lesz a függvény (↗), ha pedig ⊖ volt, akkor azon a részen szigorúan monoton csökkenő lesz a függvény (↘).

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x$
$f'(x)$	⊕	0	⊖	0	⊕
$f(x)$	↗		↘		↗

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$f'(x)$	⊕	0	⊖	0	⊕
$f(x)$	↗		↘		↗

7. lépés: Kitöltjük a táblázat második sorának hiányzó celláit (a 0-k alattiakat):

- Ha előtte lévő cella ↗, az utána lévő ↘, akkor a függvénynek maximuma van.
- Ha előtte lévő cella ↘, az utána lévő ↗, akkor a függvénynek minimuma van.
- Ha előtte lévő cella ↘, az utána lévő ↘, vagy az előtte lévő cella ↗, az utána lévő ↗, akkor a függvénynek ebben a pontban nincs szélsőértéke.

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x$
$f'(x)$	⊕	0	⊖	0	⊕
$f(x)$	↗	Max.	↘	Min.	↗

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$f'(x)$	⊕	0	⊖	0	⊕
$f(x)$	↗	Max.	↘	Min.	↗

8. lépés: Ha kérdezik a szélsőértékek értékeit is, akkor az eredeti függvénybe behelyettesítjük x_1 és x_2 értékeit.

$$f(x_1) = \cdots$$
$$f(x_2) = \cdots$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$
$$\boldsymbol{f}(\mathbf{1}) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 1 - 6 + 9 = \mathbf{4}$$
$$\boldsymbol{f}(\mathbf{3}) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 27 - 54 + 27 = \mathbf{0}$$

Minimum: $(\mathbf{3}; \mathbf{0})$, Maximum: $(\mathbf{1}; \mathbf{4})$

6) Konvexitás, inflexiós pontok

1. lépés: A **5.) Monotonitás, szélső értékek 1. lépésében** kapott függvényt le deriváljuk.

$$f''(x)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$f''(x) = 6x - 12$$

2. lépés: Az így kapott derivált függvényt egyenlővé tesszük 0-val.

$$f''(x) = 0$$

$$6x - 12 = 0$$

3. lépés: Megoldjuk az egyenletet. (x_3 *és* x_4-el jelöltem az egyenlet megoldásait, hogy ne legyen összekeverve az előbb kapott x_1 *és* x_2 megoldásokkal, de van olyan is, hogy ugyanaz a megoldás jön ki itt is.)

$$f''(x) = 0$$
$$x_3 = \cdots$$
$$x_4 = \cdots$$

$$6x - 12 = 0$$
$$6x = 12$$
$$\boldsymbol{x = 2}$$

<u>4. lépés</u>: Megrajzoljuk a táblázatot, ha volt az elején szakadási hely, akkor az is kapni fog egy oszlopot.

	$x < x_3$	$x = x_3$	$x_3 < x < x_4$	$x = x_4$	$x_4 < x$
$f''(x)$					
$f(x)$					

	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$f''(x)$			
$f(x)$			

<u>5. lépés</u>: Kitöltjük a táblázat első sorát. Az első sorba $x = x_3$ és $x = x_4$ oszlopba 0-t írunk. A többibe pedig $\oplus$ és $\ominus$, annak megfelelően, hogy az adott tartományon a második derivált értéke pozitív vagy negatív értéket vesz fel. Legyen $\oplus$ $\ominus$ $\oplus$ a maradék 3 cella a példa kedvedért.

	$x < x_3$	$x = x_3$	$x_3 < x < x_4$	$x = x_4$	$x_4 < x$
$f''(x)$	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$					

	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$f''(x)$	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$			

<u>6. lépés</u>: Kitöltjük a táblázat második sorát. Először az első sor $\oplus$ és $\ominus$ alatti celláit. Ha $\oplus$ volt akkor azon a részen konvex lesz a függvény ($\cup$), ha pedig $\ominus$ volt, akkor azon a részen konkáv lesz a függvény ($\cap$).

	$x < x_3$	$x = x_3$	$x_3 < x < x_4$	$x = x_4$	$x_4 < x$
$f''(x)$	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$

	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$f''(x)$	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

<u>7. lépés</u>: Kitöltjük a táblázat második sorának hiányzó celláit (a 0-k alattiakat):

- Ha előtte lévő cella $\cup$, az utána lévő $\cap$, vagy fordítva, akkor a függvénynek inflexiós pontja van.
- Ha előtte lévő cella $\cup$, az utána lévő $\cup$, vagy mind a kettő $\cap$, akkor a függvénynek ebben a pontban nincs inflexiós pontja.

	$x < x_3$	$x = x_3$	$x_3 < x < x_4$	$x = x_4$	$x_4 < x$
$f''(x)$	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$	$\cup$	Inflexió	$\cap$	Inflexió	$\cup$

	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$f''(x)$	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$	$\cap$	Inflexió	$\cup$

<u>8. lépés</u>: Ha kérdezik az inflexiós pontok értékeit is, akkor az eredeti függvénybe behelyettesítjük x_3 és x_4 értékeit.

$$f(x_3) = \cdots$$
$$f(x_4) = \cdots$$

$$\boldsymbol{f(2)} = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 8 - 24 + 18 = \boldsymbol{2}$$

Inflexiós pont: $(\boldsymbol{2}; \boldsymbol{2})$

7. Deriválás alkalmazásai

Érintő egyenes egyenlete

Lépések	Példa
Adott egy függvény: $f(x) = \cdots$ Szeretnénk felírni a függvény érintő egyenesének egyenletét egy x_0 pontban.	$f(x) = x^2 + 4x$ $x_0 = 3$
1. lépés: Számítsuk ki a függvény értékét x_0 helyen.	
$f(x_0) = \cdots$	$\boldsymbol{f(3)} = 3^2 + 4 \cdot 3 = 9 + 12 = \mathbf{21}$
2. lépés: Deriváljuk le a függvényt.	
$f'(x) = \cdots$	$\boldsymbol{f'(x) = 2x + 4}$
3. lépés: Számítsuk ki a derivált függvény értékét x_0 helyen.	
$f'(x_0) = \cdots$	$\boldsymbol{f'(3)} = 2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4 = \mathbf{10}$
4. lépés: Helyettesítsük be a korábban meghatározott értékeket az alábbi képletbe.	
$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$	$\boldsymbol{y = 10 \cdot (x - 3) + 21}$
5. lépés: Zárójel felbontása, összevonás	
$y = ax + b$	$y = 10 \cdot (x - 3) + 21 = 10x - 30 + 21$ $\boldsymbol{y = 10x - 9}$

Taylor polinom

Lépések	Példa
Adott egy függvény: $f(x) = \cdots$ Szeretnénk felírni a függvény n-ed rendű Taylor polinomját egy x_0 szám körül.	Határozzuk meg az $f(x) = cos\, x$ függvény megadott $x_0 = 0$ pont körüli 4-edrendű Taylor-polinomját.
1. lépés: Deriváljuk le a függvényt n-szer.	
$f'(x) = \cdots$ $f''(x) = \cdots$ $f^{(3)}(x) = \cdots$ $f^{(n)}(x) = \cdots$	$f'(x) = -sin\, x$ $f''(x) = -cos\, x$ $f^{(3)}(x) = sin\, x$ $f^{(4)}(x) = cos\, x$

2. lépés: Számítsuk ki az eredeti függvény és a derivált függvények értékét x_0 helyen.	
$f(x_0)(=f^{(0)}(x_0))=\cdots$ $f'(x_0)=\cdots$ $f''(x_0)=\cdots$ $f^{(3)}(x_0)=\cdots$ $f^{(n)}(x_0)=\cdots$	$f(x_0)\left(=f^{(0)}(0)\right)=\cos 0=1$ $f'(0)=-\sin 0=0$ $f''(0)=-\cos 0=-1$ $f^{(3)}(0)=\sin 0=0$ $f^{(4)}(0)=\cos 0=1$
3. lépés: A kiszámolt értékeket helyettesítsük be az alábbi képletbe.	
$\boldsymbol{T_n(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n=}$ $=\frac{f(x_0)}{0!}\cdot(x-x_0)^0+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1+$ $+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3+\cdots$	$T_4(x)=\sum_{n=0}^{4}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n=$ $=\frac{1}{0!}\cdot(x-0)^0+\frac{0}{1!}\cdot(x-0)^1+$ $+\frac{-1}{2!}\cdot(x-0)^2+\frac{0}{3!}\cdot(x-0)^3+\frac{1}{4!}\cdot(x-0)^4$
4. lépés: Ha tudunk, egyszerűsítsünk.	$T_4(x)=1\cdot x^0+0\cdot x^1+\frac{-1}{2}\cdot x^2+0\cdot x^3+\frac{1}{24}\cdot x^4$ $T_4(x)=1+0-\frac{1}{2}x^2+0+\frac{1}{24}x^4$ $\boldsymbol{T_4(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4}$

L’Hospital szabály

Lépések	Példa
Akkor alkalmazzuk, ha egy függvény határértékére $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ eredmény jön ki. Az is elképzelhető, hogy a L’Hospital szabály alkalmazása után megint egy $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték jön ki, ilyenkor még egyszer alkalmazzuk a szabályt.	
$\boldsymbol{\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{\longrightarrow}\lim_{x\to x_0}\frac{f'}{g'}}$ $\boldsymbol{\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{\longrightarrow}\lim_{x\to x_0}\frac{f'}{g'}}$	$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{2^3-2^2-8\cdot 2+12}{2^3-5\cdot 2^2+8\cdot 2-4}=$ $=\frac{8-4-16+12}{8-20+16-4}=\frac{8-4-16+12}{8-20+16-4}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{\longrightarrow}$ $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-8}{3x^2-10x+8}=\frac{3\cdot 2^2-2\cdot 2-8}{3\cdot 2^2-10\cdot 2+8}=$ $=\frac{12-4-8}{12-20+8}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{\longrightarrow}$ $\lim_{x\to 2}\frac{6x-2}{6x-10}=\frac{6\cdot 2-2}{6\cdot 2-10}=\frac{12-2}{12-10}=\frac{10}{2}=\mathbf{5}$

Gazdasági feladatok

Jelölések:

$Mennyiség: x,\ q$

$Egységár:\ p(x),\ p(q)$

$Bevétel\ (Revenue): B(x), B(q), R(x), R(q)$

$Költség\ (Cost): K(x), K(q), C(x), C(q)$

$Profit\ (Nyereség): P(x), P(q), Pr(x), Pr(q), Ny(x), Ny(q), \pi\ (x), \pi(q)$

$\boldsymbol{Profit = Bevétel - Költség}$

$\boldsymbol{Pr(x) = R(x) - C(x)}$

Bevétel

$$Bevétel = darab \cdot ár$$

$Mennyiség: x$
$Egységár:\ p(x)$

$$\boldsymbol{R(x) = p(x) \cdot x}$$

$Egységár: x$
$Kereslet\ (darabszám): D(x)$

$$\boldsymbol{R(x) = D(x) \cdot x}$$

Költség

$$Költség = Fix\ költség + Változó\ költség$$

Fix költség: FC
Változó költség: $VC(x)$

$$\boldsymbol{C(x) = VC(x) + FC}$$

Példa

$p(x) = 3x + 2$

$$\boldsymbol{R(x)} = p(x) \cdot x = (3x + 2) \cdot x = \boldsymbol{3x^2 + 2x}$$

Változó költség: 5
Fix költség: 10

$$\boldsymbol{C(x)} = VC(x) + FC = \boldsymbol{5x + 10}$$

$$\boldsymbol{Pr(x)} = R(x) - C(x) = 3x^2 + 2x - (5x + 10) = \boldsymbol{3x^2 - 3x - 10}$$

Kereslet, Kínálat

$Mennyiség: x,\ q$

$Kereslet\ (Demand): D(x),\ D(q)$

$Kínálat\ (Supply): S(x), S(q)$

Egyensúlyi ár, egyensúlyi mennyiség: Ahol a két függvény metszi egymást $(D = S)$

Határmennyiségek

Határköltség: Költség deriváltja $(C'(x), MC)$

Határbevétel: Bevétel deriváltja $(R'(x), MR)$

Határprofit: Profit deriváltja $(Pr'(x), MPr)$

Értelmezések: Ha egységnyivel növeljük a mennyiséget (árat), a kapott értékkel fog nőni/csökkenni a költség, a bevétel, vagy a profit

Lépések:

1. lépés: Függvény deriválása

2. lépés: x_0 behelyettesítése a derivált függvénybe

3. lépés: Értelmezés

Elaszticitás (Rugalmasság)

Jelölése: $E, \epsilon\ (epszilon)$

$$\boldsymbol{E(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}}$$

Értelmezés (függvények esetén): Megadja, hogy ha x 1 %-kal nő, hány %-kal fog növekedni a függvény értéke

Lehet pozitív negatív és 0 is

Lépések:

1. lépés: Függvény deriválása

2. lépés: x_0 behelyettesítése a derivált függvénybe

3. lépés: x_0 behelyettesítése az eredeti függvénybe

4. lépés: Behelyettesítés a képletbe és kiszámolás

5. lépés: Értelmezés

8. Integrálás

Alapintegráltak

Elnevezés	Szabály	Példák
I1	$\int a\,dx = ax + c$	$\int 6\,dx = \boldsymbol{6x + c}$
		$\int \cos\pi\ dx = \boldsymbol{\cos(\pi)\,x + c}$
		$\int \ln 5\ dx = \boldsymbol{\ln(5)\,x + c}$
		$\int e^2\,dx = \boldsymbol{e^2 x + c}$
I2	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int x^8\ dx = \boldsymbol{\frac{x^9}{9} + c}$
		$\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c}$
		$\int \sqrt[6]{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{6}}\ dx \left(x^{\frac{1}{6}}\right)' = \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} = \boldsymbol{\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + c}$
		$\int \sqrt[7]{x^3}\ dx = \int x^{\frac{3}{7}}\ dx = \frac{x^{\frac{10}{7}}}{\frac{10}{7}} = \boldsymbol{\frac{7}{10}\sqrt[7]{x^{10}} + c}$
		$\int \frac{1}{x^4}\ dx = \int x^{-4}\ dx = \frac{x^{-3}}{-3} = \boldsymbol{-\frac{1}{3x^3} + c}$
		$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\ dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{2\sqrt{x} + c}$
		$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\ dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\ dx = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c}$
		$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^9}}\ dx = \int \frac{1}{x^{\frac{9}{5}}}\ dx = \int x^{-\frac{9}{5}}\ dx = \frac{x^{-\frac{4}{5}}}{-\frac{4}{5}} = \boldsymbol{-\frac{5}{4\sqrt[5]{x^4}} + c}$
I3	$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int e^x\,dx = \boldsymbol{e^x + c}$
I4	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int 3^x\,dx = \boldsymbol{\frac{3^x}{\ln 3} + c}$
I5	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + c$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \boldsymbol{\ln\|x\| + c}$
I6	$\int \sin x\ dx = -\cos x + c$	$\int \sin x\ dx = \boldsymbol{-\cos x + c}$
I7	$\int \cos x\ dx = \sin x + c$	$\int \cos x\ dx = \boldsymbol{\sin x + c}$

Elnevezés	Szabály	Példák
I8	$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = tg\,x + c$	$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \boldsymbol{tg\,x + c}$
I9	$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -ctg\,x + c$	$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = \boldsymbol{-ctg\,x + c}$
I10	$\int sh\,x\;dx = ch\,x + c$	$\int sh\,x\;dx = \boldsymbol{ch\,x + c}$
I11	$\int ch\,x\;dx = sh\,x + c$	$\int ch\,x\;dx = \boldsymbol{sh\,x + c}$
I12	$\int \frac{1}{ch^2 x}\,dx = th\,x + c$	$\int \frac{1}{ch^2 x}\,dx = \boldsymbol{th\,x + c}$
I13	$\int \frac{1}{sh^2 x}\,dx = -\,cth\,x + c$	$\int \frac{1}{sh^2 x}\,dx = \boldsymbol{-\,cth\,x + c}$
I14	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arcsin\,x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \boldsymbol{arcsin\,x + c}$
I15	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg\,x + c$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \boldsymbol{arctg\,x + c}$
I16	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = arsh\,x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \boldsymbol{arsh\,x + c}$
I17	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = arch\,x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \boldsymbol{arch\,x + c}$
I18	$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = arth\,x + c$	$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \boldsymbol{arth\,x + c}$

Integrálási szabályok

Elnevezés	Szabály	Példák
ISZ1	$\int f\,dx = F + c$	$\int x^{12}\,dx = \frac{x^{13}}{13} + c$
ISZ2	$\int c \cdot f\,dx = c \cdot \int f\,dx$	$\int 5 \cdot x^3\,dx = 5 \cdot \int x^3\,dx = 5 \cdot \frac{x^4}{4} + c$
ISZ3	$\int \frac{f}{c} dx = \frac{1}{c} \cdot \int f\,dx$	$\int \frac{x^6}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int x^6\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^7}{7} = \frac{x^7}{14} + c$
ISZ4	$\int f \pm g\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$	$\int x + \cos x = \int x\,dx + \int \cos x\,dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + c$
		$\int \frac{1}{x} - 6^x = \int \frac{1}{x}\,dx - \int 6^x\,dx = \ln\lvert x\rvert - \frac{6^x}{\ln 6} + c$
ISZ5	$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$	$\int \sin(5x+8)\,dx = -\frac{\cos(5x+8)}{5} + c$

Integrálás szorzási szabályok

<table>
<tr><th>Elnevezés</th><th>Szabály</th><th>Példák</th></tr>
<tr>
<td>ISZSZ1</td>
<td>Ha elvégezhető a szorzás végezzük el, és utána integráljunk.</td>
<td>

$$\int (x+2)\cdot(2x^2-5x^3)\,dx =$$
$$= \int (2x^3-5x^4+4x^2-10x^3)\,dx =$$
$$= \int (-5x^4-8x^3+4x^2)dx =$$
$$= -5\cdot\int x^4dx + (-8)\cdot\int x^3\,dx + 4\cdot\int x^2\,dx =$$
$$= -5\cdot\frac{x^5}{5} + (-8)\cdot\frac{x^4}{4} + 4\cdot\frac{x^3}{3} =$$
$$= \boldsymbol{-x^5-2x^4+\frac{4}{3}x^3+c}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>ISZSZ2</td>
<td>Ha a függvény valamely hatványa meg van szorozva a függvény deriváltjával.

$$\int f^n\cdot f'\,dx = \frac{f^{n+1}}{n+1}+c$$

</td>
<td>

$$\int (x^2+5x)^4\cdot(2x+5)\,dx = \frac{\boldsymbol{(x^2+5x)^5}}{\boldsymbol{5}}+c$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>ISZSZ3</td>
<td>Parciális integrálás
Két fajta van:

<table>
<tr><th colspan="2">1. fajta</th></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$g'(x)$</td></tr>
<tr><td>x^n</td><td>$\sin x$</td></tr>
<tr><td>x^n</td><td>$\cos x$</td></tr>
<tr><td>x^n</td><td>e^x</td></tr>
<tr><td>x^n</td><td>a^x</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">2. fajta</th></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$g'(x)$</td></tr>
<tr><td>$\ln x$</td><td>x^n</td></tr>
<tr><td>$\log_a x$</td><td>x^n</td></tr>
<tr><td>$\arcsin x$</td><td>x^n</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{arctg}\, x$</td><td>x^n</td></tr>
</table>

$$\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f'\cdot g\,dx$$

<table>
<tr><td>f</td><td>g'</td></tr>
<tr><td>f'</td><td>g</td></tr>
</table>

</td>
<td>1. fajta

$$\int x\cdot\sin x\,dx = x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx =$$

<table>
<tr><td>$f = x$</td><td>$g' = \sin x$</td></tr>
<tr><td>$f' = 1$</td><td>$g = -\cos x$</td></tr>
</table>

$$= x\cdot(-\cos x) - (-1)\cdot\int \cos x\,dx =$$
$$= x\cdot(-\cos x) + \int \cos x\,dx =$$
$$= \boldsymbol{x\cdot(-\cos x) + \sin x + c}$$

<hr>
2. fajta

$$\int x^3\cdot\ln x\,dx = \ln x\cdot\frac{x^4}{4} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^4}{4}\,dx =$$

<table>
<tr><td>$f = \ln x$</td><td>$g' = x^3$</td></tr>
<tr><td>$f' = \frac{1}{x}$</td><td>$g = \frac{x^4}{4}$</td></tr>
</table>

$$= \ln x\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\cdot\int x^3\,dx =$$
$$= \ln x\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} =$$
$$= \frac{\boldsymbol{\ln(x)\cdot x^4}}{\boldsymbol{4}} - \frac{\boldsymbol{x^4}}{\boldsymbol{16}} + \boldsymbol{c}$$

</td>
</tr>
</table>

ISZSZ4	A szorzat egyik tagja összetett függvény, a másik tag pedig az összetett függvény belső függvényének deriváltja. $\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big)+c$	$\int \cos(5^x)\cdot 5^x\,ln\,5\,dx = \boldsymbol{sin}(5^x)+\boldsymbol{c}$
ISZSZ5	**Helyettesítéses integrálás** Akkor szoktuk alkalmazni, ha egy x-es kifejezés van összeszorozva egy gyökös kifejezéssel és a gyök alatt legtöbbször $ax+b$ típusú kifejezés szerepel. $\int x\cdot\sqrt{ax+b}\,dx$	$\int x\cdot\sqrt{8x+3}\,dx$
	1. lépés: Új változó (u) bevezetése.	
	$\boldsymbol{u=ax+b}$	$\boldsymbol{u=8x+3}$
	2. lépés: Új változó x szerinti deriválása.	
	$(u' =)\dfrac{du}{dx}=a$	$\dfrac{du}{dx}=8$
	3. lépés: A kapott egyenlet átrendezése dx-re.	
	$\dfrac{du}{dx}=a \quad /\cdot dx$ $du=a\cdot dx \quad /:a$ $\boldsymbol{\dfrac{du}{a}=dx}$	$\dfrac{du}{dx}=8 \quad /\cdot dx$ $du=8\cdot dx \quad /:8$ $\boldsymbol{\dfrac{du}{8}=dx}$
	4. lépés: 1. lépésben kifejezett egyenlet átrendezése x-re.	
	$u=ax+b \quad /-b$ $u-b=ax \quad /:a$ $\boldsymbol{\dfrac{u-b}{a}=x}$	$u=8x+3 \quad /-3$ $u-3=8x \quad /:8$ $\boldsymbol{\dfrac{u-3}{8}=x}$
	5. lépés: Behelyettesítés.	
	$\int x\cdot\sqrt{ax+b}\,dx=\int\dfrac{u-b}{a}\cdot\sqrt{u}\,\dfrac{du}{a}$	$\int x\cdot\sqrt{ax+b}\,dx=\int\dfrac{u-3}{8}\cdot\sqrt{u}\,\dfrac{du}{8}$

ISZSZ5	**6. lépés**: Kiemelések, szorzások elvégzése.	
	$\int \frac{u-b}{a}\cdot\sqrt{u}\,\frac{du}{a} = \int \frac{u-b}{a^2}\cdot\sqrt{u}\,du = \frac{1}{a^2}\cdot\int (u-b)\sqrt{u}\,du = \frac{1}{a^2}\cdot\int \left(u\cdot\sqrt{u}-b\cdot\sqrt{u}\right)du = \frac{1}{a^2}\cdot\int \left(u^{\frac{3}{2}}-b\cdot u^{\frac{1}{2}}\right)du$	$\int \frac{u-3}{8}\cdot\sqrt{u}\,\frac{du}{8} = \int \frac{u-3}{8^2}\cdot\sqrt{u}\,du = \frac{1}{64}\cdot\int (u-3)\cdot\sqrt{u}\,du = \frac{1}{64}\cdot\int \left(u\cdot\sqrt{u}-3\cdot\sqrt{u}\right)du = \frac{1}{64}\cdot\int \left(u^{\frac{3}{2}}-3\cdot u^{\frac{1}{2}}\right)du$
	7. lépés: Az integrálás most már elvégezhető.	
	$\frac{1}{a^2}\cdot\int\left(u^{\frac{3}{2}}-b\cdot u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-b\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2\cdot u^{\frac{5}{2}}}{5a^2}-\frac{b\cdot 2\cdot u^{\frac{3}{2}}}{3a^2}$	$\frac{1}{64}\cdot\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-3\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2\cdot u^{\frac{5}{2}}}{5\cdot 64}-\frac{3\cdot 2\cdot u^{\frac{3}{2}}}{3\cdot 64} = \frac{2\cdot u^{\frac{5}{2}}}{5\cdot 64}-\frac{2\cdot u^{\frac{3}{2}}}{64} = \frac{2\cdot u^{\frac{5}{2}}}{320}-\frac{2\cdot u^{\frac{3}{2}}}{64} = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{160}-\frac{u^{\frac{3}{2}}}{32}$
	8. lépés: Az **1. lépésben** lévő egyenlet visszahelyettesítése u helyére.	
	$\frac{2\cdot(ax+b)^{\frac{5}{2}}}{5a^2}-\frac{b\cdot 2\cdot(ax+b)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+c$	$\boldsymbol{\frac{(8x+3)^{\frac{5}{2}}}{160}-\frac{(8x+3)^{\frac{3}{2}}}{32}+c}$

Integrálás osztási szabályok

Elnevezés	Szabály	Példák
IOSZ1	Ha elvégezhető az osztás végezzük el, és utána integráljunk.	$\int \frac{2x^3-5x^4+8x^5}{x^2}dx =$ $= \int \frac{2x^3}{x^2}-\frac{5x^4}{x^2}+\frac{8x^5}{x^2}dx =$ $= 2\cdot\int\frac{x^3}{x^2}\,dx - 5\cdot\int\frac{x^4}{x^2}\,dx + 8\cdot\int\frac{x^5}{x^2}\,dx =$ $= 2\cdot\int x\,\,dx - 5\cdot\int x^2\,\,dx + 8\cdot\int x^3\,\,dx =$ $= 2\cdot\frac{x^2}{2} - 5\cdot\frac{x^3}{3} + 8\cdot\frac{x^4}{4} =$ $= \boldsymbol{x^2 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^4 + c}$
IOSZ2	Ha a számlálóban a nevező deriváltja szerepel. $\int \frac{f'}{f}dx = ln\lvert f\rvert + c$	$\int \frac{2x-9}{x^2-9x}dx = ln\lvert x^2-9x\rvert + c$
IOSZ3	Ez a szabály már előkerült a szorzási szabályoknál (**ISZSZ2)**. Ha a tört nevezőjében hatvány szerepel és a hatvány belső függvényének a deriváltja megjelenik a számlálóban, akkor a nevezőt fel tudjuk hozni a számlálóba. $\int \frac{f'}{f^n}dx = \int f'\cdot f^{-n}\,\,dx = \frac{f^{-n+1}}{-n+1} + c$	$\int \frac{3x^2+6x}{(x^3+3x^2)^7}dx =$ $= \int (3x^2+6x)\cdot(x^3+3x^2)^{-7}\,dx =$ $= \frac{(x^3+3x^2)^{-6}}{-6} + c$
IOSZ4	Törtből szorzatot csinálunk. $\int \frac{f}{g}dx = \int f\cdot\frac{1}{g}dx$	$\int \frac{ln\,x}{x}dx = \int ln\,x\cdot\frac{1}{x}dx$ Tudjuk, hogy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Alkalmazzuk **ISZSZ2**-t: $\int f^n\cdot f'\,dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + c$ $\int (\ln x)^1\cdot\frac{1}{x}dx = \boldsymbol{\frac{(ln\,x)^2}{2} + c}$

IOSZ5	**Helyettesítéses integrálás** Ugyanazokat a lépéseket kell elvégezni, mint **ISZSZ5**-nél is. Akkor alkalmazzuk leggyakrabban, ha a számlálóban x-es kifejezés a nevezőben, pedig $\sqrt{ax+b}$ típusú kifejezés szerepel. $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx$	$\int \frac{x}{\sqrt{3x+7}}dx$
	<u>1. lépés</u>: Új változó (u) bevezetése.	
	$\boldsymbol{u = ax + b}$	$\boldsymbol{u = 3x + 7}$
	<u>2. lépés</u>: Új változó x szerinti deriválása.	
	$(u' =)\frac{du}{dx} = a$	
	<u>3. lépés</u>: A kapott egyenlet átrendezése dx-re.	
	$\frac{du}{dx} = a \quad /\cdot dx$ $du = a \cdot dx \quad /:a$ $\boldsymbol{\frac{du}{a} = dx}$	$\frac{du}{dx} = 3 \quad /\cdot dx$ $du = 3 \cdot dx \quad /:3$ $\boldsymbol{\frac{du}{3} = dx}$
	<u>4. lépés</u>: 1. lépésben kifejezett egyenlet átrendezése x-re.	
	$u = ax + b \quad /-b$ $u - b = ax \quad /:a$ $\boldsymbol{\frac{u-b}{a} = x}$	$u = 3x + 7 \quad /-7$ $u - 7 = 3x \quad /:3$ $\boldsymbol{\frac{u-7}{3} = x}$
	<u>5. lépés</u>: Behelyettesítés.	
	$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx = \int \frac{\frac{u-b}{a}}{\sqrt{u}} \frac{du}{a}$	$\int \frac{x}{\sqrt{3x+7}}dx = \int \frac{\frac{u-7}{3}}{\sqrt{u}} \frac{du}{3}$

IOSZ5	**6. lépés**: Kiemelések, szorzások elvégzése.	
	$$\int \frac{\frac{u-b}{a}}{\sqrt{u}} \frac{du}{a} = \int \frac{u-b}{a^2 \cdot \sqrt{u}} du =$$ $$\frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{u-b}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{a^2} \int \frac{u-b}{\sqrt{u}} du =$$ $$\frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{b}{\sqrt{u}} du =$$ $$= \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{u}{u^{\frac{1}{2}}} - \frac{b}{u^{\frac{1}{2}}} du =$$ $$= \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{u}{u^{\frac{1}{2}}} - \frac{b}{u^{\frac{1}{2}}} du =$$ $$\frac{1}{a^2} \cdot \int u^{\frac{1}{2}} - b \cdot u^{-\frac{1}{2}} du =$$	$$\int \frac{\frac{u-7}{3}}{\sqrt{u}} \frac{du}{3} = \int \frac{u-7}{3^2 \cdot \sqrt{u}} du =$$ $$\frac{1}{9} \cdot \int \frac{u-7}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{9} \int \frac{u-7}{\sqrt{u}} du =$$ $$\frac{1}{9} \cdot \int \frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{7}{\sqrt{u}} du =$$ $$= \frac{1}{9} \cdot \int \frac{u}{u^{\frac{1}{2}}} - \frac{7}{u^{\frac{1}{2}}} du =$$ $$\frac{1}{9} \cdot \int u^{\frac{1}{2}} - 7u^{-\frac{1}{2}} du$$
	7. lépés: Az integrálás most már elvégezhető.	
	$$\frac{1}{a^2} \cdot \int u^{\frac{1}{2}} - b \cdot u^{-\frac{1}{2}} du =$$ $$\frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - b \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2 \cdot u^{\frac{3}{2}}}{3a^2} - \frac{b \cdot 2 \cdot u^{\frac{1}{2}}}{a^2}$$	$$\frac{1}{9} \cdot \int u^{\frac{1}{2}} - 7u^{-\frac{1}{2}} du =$$ $$\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 7 \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2 \cdot u^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot 9} - \frac{7 \cdot 2 \cdot u^{\frac{1}{2}}}{9} =$$ $$= \frac{2 \cdot u^{\frac{3}{2}}}{27} - \frac{14 \cdot u^{\frac{1}{2}}}{9}$$
	8. lépés: Az **1. lépésben** lévő egyenlet visszahelyettesítése u helyére.	
	$$\frac{2 \cdot (ax+b)^{\frac{3}{2}}}{3a^2} - \frac{b \cdot 2 \cdot (ax+b)^{\frac{1}{2}}}{a^2} + c$$	$$\boldsymbol{\frac{2 \cdot (3x+7)^{\frac{3}{2}}}{27} - \frac{14 \cdot (3x+7)^{\frac{1}{2}}}{9} + c}$$

Határozott integrálás

Határozott integrálás	Példák
$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$	$\int_2^4 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{256}{4} - \frac{16}{4} = 64 - 4 = \mathbf{60}$

Impropius integrálás

<table>
<tr><th>Szabály</th><th>Példák</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$
$\boldsymbol{\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$</td>
<td>$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b x^{-2}\,dx =$
$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^b =$
$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{2}}$</td></tr>
<tr><td>$\int_{-\infty}^{-1} \frac{3}{x^3}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1} \frac{3}{x^3}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(3\cdot\int_a^{-1}\frac{1}{x^3}\,dx\right) =$
$= \lim_{a\to-\infty}\left(3\cdot\int_a^{-1} x^{-3}\,dx\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(3\cdot\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_a^{-1}\right) =$
$= \lim_{a\to-\infty}\left(3\cdot\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_a^{-1}\right) =$
$= \lim_{a\to-\infty}\left(3\cdot\left(-\frac{1}{2(-1)^2} - \left(-\frac{1}{2a^2}\right)\right)\right) =$
$= \lim_{a\to-\infty}\left(3\cdot\left(-\frac{1}{21} - \left(-\frac{1}{2a^2}\right)\right)\right) =$
$= \lim_{a\to-\infty}\left(3\cdot\left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2a^2}\right)\right)\right) =$
$= \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2a^2}\right)\right) =$
$= \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2a^2}\right) = -\mathbf{\frac{3}{2}}$</td></tr>
</table>

9. Integrálás alkalmazásai

Területszámítás

Lépések	Példák
$\boldsymbol{T = \left\lvert \int_a^b f(x) - g(x)\, dx \right\rvert}$	
Adott $f(x)$ és $g(x)$ függvények, szeretnénk meghatározni az általuk bezárt terület nagyságát.	$f(x) = x^2 - 4x + 8$ $g(x) = x + 4$
<u>1. lépés</u>: A két függvényt egyenlővé tesszük egymással és megoldjuk az egyenletet, ez az esetek 90%-ban egy másodfokú egyenlet lesz, amiből két megoldást fogunk kapni. A kapott két megoldás lesz az integrálási tartomány (a, b).	
$f(x) = g(x)$ $x_1 = \cdots (= a)$ $x_2 = \cdots (= b)$	$x^2 - 4x + 8 = x + 4$ $x^2 - 4x + 8 = x + 4 \quad /-x$ $x^2 - 5x + 8 = 4 \quad /-4$ $x^2 - 5x + 4 = 0 \quad /Másodfokú\ megoldók.$ $\boldsymbol{x_1 = 1 (= a)}$ $\boldsymbol{x_2 = 4 (= b)}$
<u>2. lépés</u>: Alkalmazzuk a korábban felírt képletet: $T = \left\lvert \int_a^b f(x) - g(x)\, dx \right\rvert$ ”a” mindig a két megoldás közül a kisebb, ”b” pedig a nagyobb lesz.	$T = \left\lvert \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{4}} x^2 - 4x + 8 - (x + 4)\, dx \right\rvert$
<u>3. lépés</u>: Elvégezzük a kivonást ($f(x) - g(x)$), legtöbbször itt is egy másodfokú kifejezést fogunk kapni, Jelöljük ezt $h(x)$-el. ($h(x) = f(x) - g(x)$)	
$T = \left\lvert \int_a^b h(x)\, dx \right\rvert$	$T = \left\lvert \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{4}} x^2 - 5x + 4\, dx \right\rvert$

4. lépés: Integráljuk $h(x)$-et az $[a, b]$ tartományon, a kapott végeredmény lesz a két függvény által bezárt terület.	
$T = \left\lvert \int_a^b h(x)\,dx \right\rvert = \lvert [H(x)]_a^b \rvert = \lvert H(b) - H(a) \rvert$	$\begin{aligned} T &= \left\lvert \left[\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 4x \right]_1^4 \right\rvert = \\ &= \left\lvert \frac{4^3}{3} - 5 \cdot \frac{4^2}{2} + 44 - \left(\frac{1^3}{3} - 5 \cdot \frac{1^2}{2} + 41 \right) \right\rvert = \\ &= \left\lvert \frac{64}{3} - 5 \cdot \frac{16}{2} + 16 - \left(\frac{1}{3} - 5 \cdot \frac{1}{2} + 4 \right) \right\rvert = \\ &= \left\lvert \frac{64}{3} - 5 \cdot 8 + 16 - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 \right) \right\rvert = \\ &= \left\lvert \frac{64}{3} - 40 + 16 - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 \right) \right\rvert = \\ &= \left\lvert \frac{64}{3} - 40 + 16 - \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4 \right\rvert = \\ &= \left\lvert \frac{63}{3} + \frac{5}{2} - 28 \right\rvert = \left\lvert 21 + \frac{5}{2} - 28 \right\rvert = \\ &= \left\lvert \frac{5}{2} - 7 \right\rvert = \left\lvert \frac{5}{2} - \frac{14}{2} \right\rvert = \left\lvert -\frac{9}{2} \right\rvert = \mathbf{\frac{9}{2}} \end{aligned}$

Térfogatszámítás

Lépések	Példák
$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$	Számítsuk ki az $f(x) = x + 3$ függvény x tengely körüli megforgatásával kapott test térfogatát az $[1; 4]$ intervallumon. $f^2(x) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ $\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_1^4 x^2 + 6x + 9\,dx = \\ &= \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} + 9x \right]_1^4 = \\ &= \pi \cdot \left(\frac{4^3}{3} + 6 \cdot \frac{4^2}{2} + 9 \cdot 4 - \left(\frac{1^3}{3} + 6 \cdot \frac{1^2}{2} + 9 \cdot 1 \right) \right) = \\ &= \pi \cdot \left(\frac{64}{3} + 6 \cdot \frac{16}{2} + 36 - \left(\frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 9 \right) \right) = \\ &= \pi \cdot \left(\frac{64}{3} + 48 + 36 - \frac{1}{3} - 3 - 9 \right) = \\ &= \pi \cdot \left(\frac{63}{3} + 72 \right) = \pi \cdot (21 + 72) = \mathbf{93\pi} \end{aligned}$

Átlagszámítás

Lépések	Példák
$\overline{f}(x)=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$	Számítsuk ki az $f(x)=x^3$ függvény átlagát a [2; 4] intervallumon. $\overline{f}(x)=\frac{\int_2^4 x^3\,dx}{4-2}=\frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^4}{2}=\frac{\frac{4^4}{4}-\frac{2^4}{4}}{2}=\frac{\frac{256}{4}-\frac{16}{4}}{2}=$ $=\frac{64-4}{2}=\frac{60}{2}=\mathbf{30}$

Ívhossz számítás

Lépések	Példák
$l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$	Számítsuk ki az $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ függvény ívhosszát a [0; 3] intervallumon. $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ $(f'(x))^2=\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{9}{4}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{9}{4}x$ $l=\int_0^3\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\int_0^3\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}dx$ **ISZ5** alapján: $\int_0^3\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}}\right]_0^3=$ $\left[\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{27}{8}}\right]_0^3=\left[\frac{8}{27}\cdot\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=$ $=\frac{8}{27}\cdot\left(1+\frac{9}{4}\cdot3\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{8}{27}\cdot\left(1+\frac{9}{4}\cdot0\right)^{\frac{3}{2}}\right)=$ $=\frac{8}{27}\cdot\left(1+\frac{27}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{8}{27}\cdot(1+0)^{\frac{3}{2}}\right)=$ $=\frac{8}{27}\cdot\left(\frac{4}{4}+\frac{27}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{8}{27}\cdot1^{\frac{3}{2}}\right)=$ $=\frac{8}{27}\cdot\left(\frac{31}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{8}{27}\cdot1\right)=$ $=\frac{8}{27}\cdot\left(\frac{31}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{8}{27}\right)=\mathbf{\frac{8}{27}\cdot\left(\left(\frac{31}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)}$

Lemez súlypont számítás

Lépések	Példák
	Számítsuk ki az $f(x) = 2x - 1$ függvény és az x tengely által bezárt lemez súlypontját a $[2; 5]$ intervallumon. Első lépésként számítsuk ki a 3 integrálást.
	$\int_a^b x \cdot f(x)\ dx = \int_2^5 x \cdot (2x - 1)\ dx =$ $= \int_2^5 2x^2 - x\ dx = \left[2 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_2^5 =$ $= 2 \cdot \frac{5^3}{3} - \frac{5^2}{2} - \left(2 \cdot \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right) =$ $= 2 \cdot \frac{125}{3} - \frac{25}{2} - \left(2 \cdot \frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) = \frac{250}{3} - \frac{25}{2} - \left(\frac{16}{3} - \frac{4}{2}\right) =$ $= \frac{250}{3} - \frac{25}{2} - \frac{16}{3} + \frac{4}{2} = \frac{234}{3} - \frac{21}{2} = 78 - 10{,}5 = \mathbf{67,5}$
$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)\ dx}{\int_a^b f(x)\ dx}$ $y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\ dx}{\int_a^b f(x)\ dx}$	$\int_a^b f^2(x)\ dx = \int_2^5 (2x - 1)^2\ dx =$ $= \int_2^5 4x^2 - 4x + 1\ dx = \left[4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_2^5 =$ $= 4 \cdot \frac{5^3}{3} - 4 \cdot \frac{5^2}{2} + 5 - \left(4 \cdot \frac{2^3}{3} - 4 \cdot \frac{2^2}{2} + 2\right) =$ $= 4 \cdot \frac{125}{3} - 4 \cdot \frac{25}{2} + 5 - \left(4 \cdot \frac{8}{3} - 4 \cdot \frac{4}{2} + 2\right) =$ $= \frac{500}{3} - \frac{100}{2} + 5 - \left(\frac{32}{3} - \frac{16}{2} + 2\right) =$ $= \frac{500}{3} - 50 + 5 - \left(\frac{32}{3} - 8 + 2\right) =$ $= \frac{500}{3} - 50 + 5 - \frac{32}{3} + 8 - 2 = \frac{468}{3} - 39 =$ $= 156 - 39 = \mathbf{117}$
	$\int_a^b f(x)\ dx = \int_2^5 2x - 1\ dx = \left[2 \cdot \frac{x^2}{2} - x\right]_2^5 =$ $= 2 \cdot \frac{5^2}{2} - 5 - \left(2 \cdot \frac{2^2}{2} - 2\right) =$ $= 2 \cdot \frac{25}{2} - 5 - \left(2 \cdot \frac{4}{2} - 2\right) =$ $= 25 - 5 - (4 - 2) = 25 - 5 - 4 + 2 = \mathbf{18}$

	Ezután a kapott értékeket helyettesítsük be a képletekbe. $$\boldsymbol{x_s} = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)\ dx}{\int_a^b f(x)\ dx} = \frac{67{,}5}{18} = \mathbf{3{,}75}$$ $$\boldsymbol{y_s} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b f^2(x)\ dx}{\int_a^b f(x)\ dx} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 117}{18} = \frac{58{,}5}{18} = \mathbf{3{,}25}$$ **Súlypont:** $\boldsymbol{P}\ (\mathbf{3{,}75}; \mathbf{3{,}25})$

Ív súlypont számítás

Lépések	Példák
$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx}$$ $$y_s = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx}$$	Számítsuk ki az $f(x) = 3x$ függvény 1 és 3 pontok által határolt ív súlypontját. Első lépésként deriváljuk a függvényt, és emeljük négyzetre, majd számítsuk ki a 3 integrálást. $$f'(x) = 3$$ $$(f'(x))^2 = 3^2 = 9$$
	$$\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\ dx = \int_1^3 x \cdot \sqrt{1+9}\ dx =$$ $$= \int_1^3 x \cdot \sqrt{10}\ dx = \sqrt{10} \cdot \int_1^3 x\ dx =$$ $$= \sqrt{10} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \sqrt{10} \cdot \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \sqrt{10} \cdot \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$ $$= \sqrt{10} \cdot \frac{8}{2} = \mathbf{4 \cdot \sqrt{10}}$$
	$$\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\ dx = \int_1^3 f(x) \cdot \sqrt{1+9}\ dx =$$ $$= \int_1^3 3x \cdot \sqrt{10}\ dx = 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \int_1^3 x\ dx =$$ $$= 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) =$$ $$= 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$ $$= 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{8}{2} = 3 \cdot \sqrt{10} \cdot 4 = \mathbf{12 \cdot \sqrt{10}}$$

	$$\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx = \int_1^3 \sqrt{1+9}\ dx =$$ $$= \int_1^3 \sqrt{10}\ dx = \sqrt{10}\cdot\int_1^3 1\ dx = \sqrt{10}\cdot[x]_1^3 =$$ $$\sqrt{10}\cdot(3-1) = \mathbf{2\cdot\sqrt{10}}$$
	Ezután a kapott értékeket helyettesítsük be a képletekbe. $$\boldsymbol{x_s} = \frac{\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx} = \frac{4\cdot\sqrt{10}}{2\cdot\sqrt{10}} = \mathbf{2}$$ $$\boldsymbol{y_s} = \frac{\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx} = \frac{12\cdot\sqrt{10}}{2\cdot\sqrt{10}} = \mathbf{6}$$ **Súlypont:** $\boldsymbol{P\ (2;6)}$

Forgástest súlypont számítás

Lépések	Példák
$$x_s = \frac{\int_a^b x\cdot f^2(x)\ dx}{\int_a^b f^2(x)\ dx}$$ $$y_s = 0$$	Az $f(x) = x^2$ függvényt x tengely körül megforgatjuk. Számítsuk ki az így keletkezett forgástest súlypontját az $[1;3]$ intervallumon. Első lépésként számítsuk ki a 2 integrálást:
	$$\int_a^b x\cdot f^2(x)\ dx = \int_1^3 x\cdot(x^2)^2\ dx = \int_1^3 x\cdot x^4\ dx =$$ $$= \int_1^3 x^5\ dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_1^3 = \frac{3^6}{6} - \frac{1^6}{6} = \frac{729}{6} - \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{728}{6}}$$
	$$\int_a^b f^2(x)\ dx = \int_a^b (x^2)^2\ dx = \int_1^3 x^4\ dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^3 =$$ $$= \frac{3^5}{5} - \frac{1^5}{5} = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{242}{5}}$$
	Ezután a kapott értékeket helyettesítsük be a képletbe: $$\boldsymbol{x_s} = \frac{\int_a^b x\cdot f^2(x)\ dx}{\int_a^b f^2(x)\ dx} = \frac{\frac{728}{6}}{\frac{242}{5}} = \frac{728}{6}\cdot\frac{5}{242} = \mathbf{\frac{3640}{1452}}$$ **Súlypont:** $\boldsymbol{P\left(\frac{3640}{1452};0\right)}$

Felszín számítás

Lépések	Példák
$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$	Számítsuk ki az $f(x) = x^3$ függvény x tengely körüli megforgatásával kapott test felszínét a $[1; 2]$ intervallumon. Első lépésként deriváljuk a függvényt, és emeljük négyzetre. $f'(x) = 3x^2$ $(f'(x))^2 = (3x^2)^2 = 9x^4$ Ezután helyettesítsük be a képletbe. $A = 2\pi \cdot \int_1^2 x^3 \cdot \sqrt{1 + 9x^4}\, dx =$ $= 2\pi \cdot \int_1^2 x^3 \cdot (1 + 9x^4)^{\frac{1}{2}}\, dx =$ **ISZSZ2**-t alkalmazhatjuk, kis trükk segítségével. $= 2\pi \cdot \frac{1}{9 \cdot 4} \cdot \int_1^2 9 \cdot 4x^3 \cdot (1 + 9x^4)^{\frac{1}{2}}\, dx =$ $= 2\pi \cdot \frac{1}{36} \cdot \int_1^2 36x^3 \cdot (1 + 9x^4)^{\frac{1}{2}}\, dx =$ $= \frac{2\pi}{36} \cdot \left[\frac{(1 + 9x^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 =$ $= \frac{\pi}{18} \cdot \left[\frac{(1 + 9x^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{\pi}{18} \cdot \left[\frac{2}{3} (1 + 9x^4)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 =$ $= \frac{\pi}{18} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (1 + 9 \cdot 2^4)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3} \cdot (1 + 9 \cdot 1^4)^{\frac{3}{2}} \right) \right) =$ $= \frac{\pi}{18} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (1 + 9 \cdot 16)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3} \cdot (1 + 9 \cdot 1)^{\frac{3}{2}} \right) \right) =$ $= \frac{\pi}{18} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (1 + 144)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3} \cdot (1 + 9)^{\frac{3}{2}} \right) \right) =$ $= \frac{\pi}{18} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(145^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}} \right) = \boldsymbol{\frac{2\pi}{54} \cdot \left(145^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}} \right)}$

10. Kétváltozós függvények

Lokális szélsőértékek meghatározása

Lépések	Példa
<u>1. lépés</u>: Az elsőrendű parciális deriváltak meghatározása:	$f(x,y) = 5 - 54y^3 + 36y^2 + x^2 - 6xy$
$\boldsymbol{f'_x(x,y)}$ $\boldsymbol{f'_y(x,y)}$	$\boldsymbol{f'_x(x,y) = 2x - 6y}$ $\boldsymbol{f'_y(x,y) = -162y^2 + 72y - 6x}$
<u>2. lépés</u>: Az elsőrendű parciális deriváltakat 0-val tesszük egyenlővé:	
$f'_x(x,y) = 0$ $f'_y(x,y) = 0$	$2x - 6y = 0$ $-162y^2 + 72y - 6x = 0$
<u>3. lépés</u>: Megoldjuk az egyenletrendszert, így megkapjuk a lehetséges szélsőértékek helyét:	
$\left.\begin{matrix} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{matrix}\right\}$ $P_1(P_{1x};P_{1y}), P_2(P_{2x};P_{2y})$ ...	$2x - 6y = 0 \rightarrow 2x = 6y \rightarrow \boldsymbol{x = 3y}$ $-162y^2 + 72y - 6x = 0$ $x = 3y$ *behelyettesítése a második egyenletbe*: $-162y^2 + 72y - 6(3y) = 0$ $-162y^2 + 72y - 18y = 0$ $-162y^2 + 54y = 0$ $54y(-3y+1) = 0$ $\boldsymbol{y_1 = 0} \rightarrow \boldsymbol{x_1} = 3y_1 = \boldsymbol{0} \rightarrow \boldsymbol{P_1(0;0)}$ $\boldsymbol{y_2 = \frac{1}{3}} \rightarrow \boldsymbol{x_2} = 3y_2 = \boldsymbol{1} \rightarrow \boldsymbol{P_2\left(1;\frac{1}{3}\right)}$
<u>4. lépés</u>: A másodrendű parciális deriváltak meghatározása:	
$\boldsymbol{f''_{xx}(x,y)}$ $\boldsymbol{f''_{yy}(x,y)}$ $\boldsymbol{f''_{xy}(x,y)}$ $\boldsymbol{f''_{yx}(x,y)}$	$\boldsymbol{f''_{xx}(x,y) = 2}$ $\boldsymbol{f''_{yy}(x,y) = -324y + 72}$ $\boldsymbol{f''_{xy}(x,y) = -6}$ $\boldsymbol{f''_{yx}(x,y) = -6}$
<u>5. lépés</u>: Felírjuk az alábbi képletet:	
$\boldsymbol{f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - f''_{xy}(x,y) \cdot f''_{yx}(x,y)}$	$f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - f''_{xy}(x,y) \cdot f''_{yx}(x,y) =$ $= 2 \cdot (-324y + 72) - (-6) \cdot (-6)$
<u>6. lépés</u>: A 3. lépésben kapott P_1 pont koordinátáit behelyettesítjük az előbb felírt képletbe	
$f''_{xx}(P_{1x};P_{1y}) \cdot f''_{yy}(P_{1x};P_{1y}) - f''_{xy}(P_{1x};P_{1y}) \cdot f''_{yx}(P_{1x};P_{1y})$	$P_1(0;0)$ $2 \cdot (-324 \cdot 0 + 72) - (-6) \cdot (-6) =$ $= 2 \cdot 72 - (-6) \cdot (-6) = 144 - 36 = \boldsymbol{108}$

<u>7. lépés</u>: Az előző lépésben kapott számérték pozitív vagy negatív lehet: • Ha negatív, akkor a P_1 pont **<u>Nyeregpont</u>** lesz. • Ha pozitív:	A kapott számérték pozitív, ezért megyünk a 8. lépésre.
<u>8. lépés</u>: Megnézzük, hogy $f''_{xx}(P_{1x}; P_{1y})$ pozitív vagy negatív-e: • Ha negatív, akkor a P_1 pont **<u>Lokális maximum</u>** lesz. • Ha pozitív, akkor a P_1 pont **<u>Lokális minimum</u>** lesz.	Mivel $f''_{xx}(0;0) = 2$,ezért $\boldsymbol{P_1(0;0)}$ **pont Lokális minimum lesz.**
<u>9. lépés</u>: Ha kaptunk P_2 pontot is, akkor a 6. lépéstől megismételjük a lépéseket P_2 pont koordinátáit behelyettesítve:	
$f''_{xx}(P_{2x}; P_{2y}) f''_{yy}(P_{2x}; P_{2y}) - f''_{xy}(P_{2x}; P_{2y}) f''_{yx}(P_{2x}; P_{2y})$	$P_2\left(1; \frac{1}{3}\right)$ $= 2 \cdot \left(-324 \cdot \frac{1}{3} + 72\right) - (-6) \cdot (-6) =$ $= 2 \cdot (-108 + 72) - (-6) \cdot (-6) =$ $= 2 \cdot (-36) - (-6)(-6) =$ $= (-72) - 36 = \mathbf{-108}$
<u>10. lépés</u>: Az előző lépésben kapott számérték pozitív vagy negatív lehet: • Ha negatív, akkor a P_2 pont **<u>Nyeregpont</u>** lesz. • Ha pozitív:	A kapott számérték negatív, ezért $\boldsymbol{P_2\left(1; \frac{1}{3}\right)}$ **pont Nyeregpont lesz.**
<u>11. lépés</u>: Megnézzük, hogy $f''_{xx}(P_{2x}; P_{2y})$ pozitív vagy negatív-e: • Ha negatív, akkor a P_2 pont **<u>Lokális maximum</u>** lesz. • Ha pozitív, akkor a P_2 pont **<u>Lokális minimum</u>** lesz.	Mivel negatív lett a 9. lépésben kapott érték, ezért ezt nem kell elvégezni.
<u>12. lépés</u>: Ha feladat kérdezi a lokális szélső értékek értékét, akkor az eredeti $f(x,y)$-ba behelyettesítjük a kapott pontok x és y koordinátáit.	$f(x,y) = 5 - 54y^3 + 36y^2 + x^2 - 6xy$ $\boldsymbol{P_1(0;0)}$: $\boldsymbol{f(0,0)} = 5 - 54 \cdot 0^3 + 36 \cdot 0^2 + 0^2 - 6 \cdot 0 \cdot 0 = \mathbf{5}$ $\boldsymbol{P_2\left(1; \frac{1}{3}\right)}$: $\boldsymbol{f\left(1; \frac{1}{3}\right)} = 5 - 54 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 36 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1^2 - 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} =$ $= 5 - 54 \cdot \frac{1}{27} + 36 \cdot \frac{1}{9} + 1 - 61 \cdot \frac{1}{3} =$ $= 5 - 2 + 4 + 1 - 2 = \mathbf{6}$