Egyetemi alapok

Inverz függvény

Lépések	Példa
Ha egy függvény inverz függvényét keressük, nincs más dolgunk, mint átrendezni az egyenletet úgy, hogy az egyik oldalon csak x szerepeljen, ez lesz az inverz függvény.	$\boldsymbol{y = f(x)}$ $\boldsymbol{y^{-1} = f^{-1}(x)}$
<u>Lineáris függvény inverze</u> is egy **<u>lineáris függvény</u>** lesz.	$y = 2x + 3 \qquad /-3$ $y - 3 = 2x \qquad /:2$ $\frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = x$ $\boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}$
<u>Másodfokú függvény inverze</u> egy **<u>gyökös függvény</u>** lesz. Gyökvonásnál két részre ágazik a feladat lesz egy pluszos, és egy mínuszos megoldás is.	$y = x^2 - 6x + 3 \qquad /Teljes\ négyzet\ alak$ $y = (x-3)^2 - 6 \qquad /+6$ $y + 6 = (x-3)^2 \qquad /\sqrt{\ }$ $\sqrt{y+6} = x - 3 \qquad /+3$ $\sqrt{y+6} + 3 = x$ $\boldsymbol{f^{-1}(x) = \sqrt{x+6} + 3} \qquad \boldsymbol{f^{-1}(x) = -\sqrt{x+6} + 3}$
<u>Gyökös függvény inverze</u> egy **<u>másodfokú függvény</u>** lesz.	$y = \sqrt{x+5} \qquad /\ \ ^2$ $y^2 = x + 5 \qquad /-5$ $y^2 - 5 = x$ $\boldsymbol{f^{-1}(x) = x^2 - 5}$
<u>Exponenciális függvény inverze</u> egy **<u>logaritmus függvény</u>** lesz.	$y = 2^x + 6 \qquad /-6$ $y - 6 = 2^x \qquad /\ log_2$ $log_2(y-6) = log_2 2^x \qquad /Azonosság$ $log_2(y-6) = x\, log_2 2 \qquad /\ log_2 2 = 1$ $log_2(y-6) = x$ $\boldsymbol{f^{-1}(x) = log_2(x-6)}$
<u>Logaritmus függvény inverze</u> egy **<u>exponenciális függvény</u>** lesz.	$y = lg(x+1) \qquad /Azonosság$ $lg\, 10^y = lg(x+1) \qquad /Sz.m.n.$ $10^y = x + 1 \qquad /-1$ $10^y - 1 = x$ $\boldsymbol{f^{-1}(x) = 10^x - 1}$

Vektorok által bezárt szög

Lépések	Példa
Adott két vektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$
Szeretnénk kiszámolni a két vektor által bezárt szöget.	
<u>1. lépés</u>: Kiszámoljuk a két vektor skaláris szorzatát.	
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$	$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b}} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) = 0 + 12 + 2 = \mathbf{14}$
<u>2. lépés</u>: Kiszámoljuk a két vektor nagyságát (hosszúságát).	
$\|a\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$ $\|b\| = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}$	$\boldsymbol{\|a\|} = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{\mathbf{14}}$ $\boldsymbol{\|b\|} = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{0 + 16 + 1} = \sqrt{\mathbf{17}}$
<u>3. lépés</u>: Felírjuk az alábbi képletet, és behelyettesítjük a korábban kiszámolt értékeket. α a két vektor által bezárt szög lesz.	
$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\alpha}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\alpha$ $14 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{17} \cos\alpha$
<u>4. lépés</u>: Leosztjuk az egyenletet $\|a\| \cdot \|b\|$-vel.	
$\boldsymbol{\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|a\| \cdot \|b\|} = \cos\alpha}$	$\dfrac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} = \cos\alpha$ $0{,}907 = \cos\alpha$
<u>5. lépés</u>: Visszakeressük a szöget.	
$\boldsymbol{\cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|a\| \cdot \|b\|}\right) = \alpha}$	$\boldsymbol{\alpha = 24{,}84°}$

Keresztszorzás

Lépések	Példa
Adott két vektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
Szeretnénk kiszámolni a két vektor keresztszorzatát.	
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	
1. lépés: Letakarjuk az első sort és összeszorozzuk a_2-t b_3-mal, és ebből kivonjuk a_3 és b_2 szorzatát.	
$\begin{pmatrix} \cancel{a_1} \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{b_1} \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ $a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2$	$\begin{pmatrix} \cancel{2} \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{6} \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $(-3) \cdot (-4) - 5 \cdot 1 = 12 - 5 = \mathbf{7}$
2. lépés: Letakarjuk a második sort és összeszorozzuk a_1-t b_3-mal, és ebből kivonjuk a_3 és b_1 szorzatát (elé $\ominus$).	
$\begin{pmatrix} a_1 \\ \cancel{a_2} \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \cancel{b_2} \\ b_3 \end{pmatrix}$ $-(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1)$	$\begin{pmatrix} 2 \\ \cancel{-3} \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ \cancel{1} \\ -4 \end{pmatrix}$ $-(2 \cdot (-4) - 5 \cdot 6) = -(-8 - 30) = \mathbf{38}$
3. lépés: Letakarjuk a harmadik sort és összeszorozzuk a_1-t b_2-vel, és ebből kivonjuk a_2 és b_1 szorzatát.	
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cancel{a_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cancel{b_3} \end{pmatrix}$ $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \cancel{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ \cancel{-4} \end{pmatrix}$ $2 \cdot 1 - (-3) \cdot 6 = 2 - (-18) = \mathbf{20}$
4. lépés: Sorrendbe ezeket írjuk be egy oszlopvektorba.	
$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2} \\ \boldsymbol{a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3} \\ \boldsymbol{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{38} \\ \mathbf{20} \end{pmatrix}$

Polinomosztás

Polinomosztás	Sima osztás
Polinomosztásnál is ugyanazokat a lépéseket kell elvégezni, mint egy sima írásbeli osztásnál. Példa: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1)$	$1944 \div 6$
<u>1. lépés</u>: A legnagyobb kitevőjű tagot elosztjuk x-szel.	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2$	$19'44 \div 6 = 3$
<u>2. lépés</u>: A kapott taggal (x^2) visszaszorozzuk $x - 1$-et, és ezt írjuk az eredeti kifejezés alá.	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2$ $-(x^3 - x^2)$	$1944 \div 6 = 3$ -18
<u>3. lépés</u>: $x^3 - x^2$-et kivonjuk az eredeti kifejezésből.	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2$ $\underline{-(x^3 - x^2)}$ $0 - x^2 - 5x + 6$	$1944 \div 6 = 3$ $\underline{-18}$ 1
<u>4. lépés</u>: Ugyanaz, mint első lépés.	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2 - x$ $\underline{-(x^3 - x^2)}$ $-x^2 - 5x + 6$	$194'4 \div 6 = 32$ $\underline{-18}$ 14
<u>5. lépés</u>: A kapott taggal ($-x$) visszaszorozzuk $x - 1$-et, és ezt írjuk az eredeti kifejezés alá.	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2 - x$ $\underline{-(x^3 - x^2)}$ $-x^2 - 5x + 6$ $-(-x^2 + x)$	$1944 \div 6 = 32$ $\underline{-18}$ 14 -12
<u>6. lépés</u>: $x^2 - x$-et kivonjuk $x^2 - 5x + 6$-ból.	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2 - x$ $\underline{-(x^3 - x^2)}$ $-x^2 - 5x + 6$ $\underline{-(-x^2 + x)}$ $0 - 6x + 6$	$1944 \div 6 = 32$ $\underline{-18}$ 14 $\underline{-12}$ 2

<u>7. lépés</u>: Ugyanaz, mint első lépés.	
$x^3-2x^2-5x+6 \div (x-1) = x^2-x-6$ $\underline{-(x^3-x^2)}$ $-x^2-5x+6$ $\underline{-(-x^2+x)}$ $-6x+6$	$1944' \div 6 = 32$ $\underline{-18}$ 14 $\underline{-12}$ 24
<u>8. lépés</u>: A kapott taggal (-6) visszaszorozzuk $x-1$-et, és ezt írjuk az eredeti kifejezés alá.	
$x^3-2x^2-5x+6 \div (x-1) = x^2-x-6$ $\underline{-(x^3-x^2)}$ $-x^2-5x+6$ $\underline{-(-x^2+x)}$ $-6x+6$ $-(-6x+6)$	$1944 \div 6 = 324$ $\underline{-18}$ 14 $\underline{-12}$ 24 -24
<u>9. lépés</u>: $-6x+6$-et kivonjuk $-6x+6$-ból.	
$x^3-2x^2-5x+6 \div (\boldsymbol{x-1}) = \boldsymbol{x^2-x-6}$ $\underline{-(x^3-x^2)}$ $-x^2-5x+6$ $\underline{-(-x^2+x)}$ $-6x+6$ $\underline{-(-6x+6)}$ $0 \;+\; 0$	$1944 \div \mathbf{6} = \mathbf{324}$ $\underline{-18}$ 14 $\underline{-12}$ 24 $\underline{-24}$ 0
$\boldsymbol{x^3-2x^2-5x+6 = (x-1)\cdot(x^2-x-6)}$	$\mathbf{1944 = 6 \cdot 324}$