

Egyetemi alapok

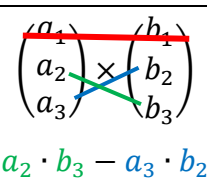
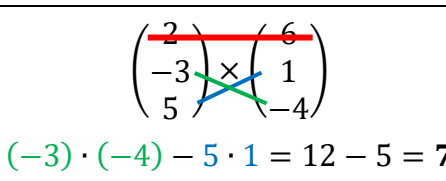
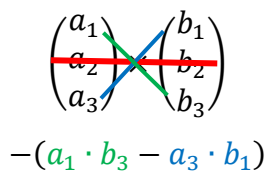
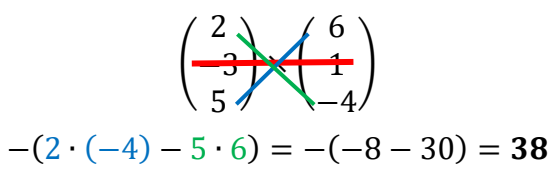
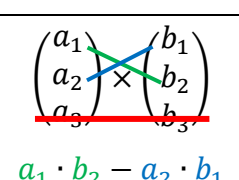
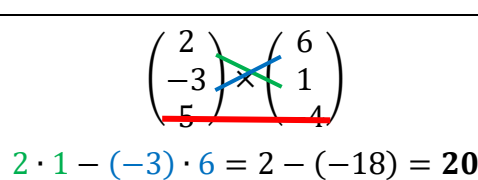
Inverz függvény

Lépések	Példa
Ha egy függvény inverz függvényét keressük, nincs más dolgunk, mint átrendezni az egyenletet úgy, hogy az egyik oldalon csak x szerepeljen, ez lesz az inverz függvény.	$y = f(x)$ $y^{-1} = f^{-1}(x)$
<u>Lineáris függvény inverze</u> is egy <u>lineáris függvény</u> lesz.	$y = 2x + 3 \quad /-3$ $y - 3 = 2x \quad /:2$ $\frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = x$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
<u>Másodfokú függvény inverze</u> egy <u>gyökös függvény</u> lesz. Gyökvonásnál két részre ágazik a feladat lesz egy pluszos, és egy mínuszos megoldás is.	$y = x^2 - 6x + 3 \quad /Teljes négyzet alak$ $y = (x - 3)^2 - 6 \quad /+6$ $y + 6 = (x - 3)^2 \quad / \sqrt{\quad}$ $\sqrt{y + 6} = x - 3 \quad /+3$ $\sqrt{y + 6} + 3 = x$ $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 6} + 3 \quad f^{-1}(x) = -\sqrt{x + 6} + 3$
<u>Gyökös függvény inverze</u> egy <u>másodfokú függvény</u> lesz.	$y = \sqrt{x + 5} \quad /^2$ $y^2 = x + 5 \quad /-5$ $y^2 - 5 = x$ $f^{-1}(x) = x^2 - 5$
<u>Exponenciális függvény inverze</u> egy <u>logaritmus függvény</u> lesz.	$y = 2^x + 6 \quad /-6$ $y - 6 = 2^x \quad / \log_2$ $\log_2(y - 6) = \log_2 2^x \quad /Azonosság$ $\log_2(y - 6) = x \log_2 2 \quad / \log_2 2 = 1$ $\log_2(y - 6) = x$ $f^{-1}(x) = \log_2(x - 6)$
<u>Logaritmus függvény inverze</u> egy <u>exponenciális függvény</u> lesz.	$y = \lg(x + 1) \quad /Azonosság$ $\lg 10^y = \lg(x + 1) \quad /Sz.m.n.$ $10^y = x + 1 \quad /-1$ $10^y - 1 = x$ $f^{-1}(x) = 10^x - 1$

Vektorok által bezárt szög

Lépések	Példa
<p>Adott két vektor:</p> $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$
Szeretnénk kiszámolni a két vektor által bezárt szöget.	
1. lépés: Kiszámoljuk a két vektor skaláris szorzatát.	
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) = 0 + 12 + 2 = \mathbf{14}$
2. lépés: Kiszámoljuk a két vektor nagyságát (hosszúságát).	
$ a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ $ b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$	$ a = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{\mathbf{14}}$ $ b = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{0 + 16 + 1} = \sqrt{\mathbf{17}}$
3. lépés: Felírjuk az alábbi képletet, és behelyettesítjük a korábban kiszámolt értékeket. α a két vektor által bezárt szög lesz.	
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$ $14 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{17} \cos \alpha$
4. lépés: Leosztjuk az egyenletet $ a \cdot b $ -vel.	
$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ a \cdot b } = \cos \alpha$	$\frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} = \cos \alpha$ $0,907 = \cos \alpha$
5. lépés: Visszakeressük a szöget.	
$\cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ a \cdot b } \right) = \alpha$	$\alpha = \mathbf{24,84^\circ}$

Keresztszorzás

Lépések	Példa
<p>Adott két vektor:</p> $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
Szeretnénk kiszámolni a két vektor keresztszorzatát.	
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	
<p>1. lépés: Letakarjuk az első sort és összeszorozzuk a_2-t b_3-mal, és ebből kivonjuk a_3 és b_2 szorzatát.</p>	
 $a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2$	 $(-3) \cdot (-4) - 5 \cdot 1 = 12 - 5 = 7$
<p>2. lépés: Letakarjuk a második sort és összeszorozzuk a_1-t b_3-mal, és ebből kivonjuk a_3 és b_1 szorzatát (elé \ominus).</p>	
 $-(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1)$	 $-(2 \cdot (-4) - 5 \cdot 6) = -(-8 - 30) = 38$
<p>3. lépés: Letakarjuk a harmadik sort és összeszorozzuk a_1-t b_2-vel, és ebből kivonjuk a_2 és b_1 szorzatát.</p>	
 $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$	 $2 \cdot 1 - (-3) \cdot 6 = 2 - (-18) = 20$
<p>4. lépés: Sorrendbe ezeket írjuk be egy oszlopvektorba.</p>	
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 38 \\ 20 \end{pmatrix}$

Polinomosztás

Polinomosztás	Sima osztás
<p>Polinomosztásnál is ugyanazokat a lépéseket kell elvégezni, mint egy sima írásbeli osztásnál.</p> <p>Példa:</p> $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1)$	$1944 \div 6$
<p>1. lépés: A legnagyobb kitevőjű tagot elosztjuk x-szel.</p>	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2$	$19'44 \div 6 = 3$
<p>2. lépés: A kapott taggal (x^2) visszaszorozzuk $x - 1$-et, és ezt írjuk az eredeti kifejezés alá.</p>	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2$ $-(x^3 - x^2)$	$1944 \div 6 = 3$ -18
<p>3. lépés: $x^3 - x^2$-et kivonjuk az eredeti kifejezésből.</p>	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2$ $\underline{-(x^3 - x^2)}$ $0 - x^2 - 5x + 6$	$1944 \div 6 = 3$ $\underline{-18}$ 1
<p>4. lépés: Ugyanaz, mint első lépés.</p>	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2 - x$ $\underline{-(x^3 - x^2)}$ $-x^2 - 5x + 6$	$194'4 \div 6 = 32$ $\underline{-18}$ 14
<p>5. lépés: A kapott taggal ($-x$) visszaszorozzuk $x - 1$-et, és ezt írjuk az eredeti kifejezés alá.</p>	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2 - x$ $\underline{-(x^3 - x^2)}$ $-x^2 - 5x + 6$ $\underline{-(-x^2 + x)}$	$1944 \div 6 = 32$ $\underline{-18}$ 14 -12
<p>6. lépés: $x^2 - x$-et kivonjuk $x^2 - 5x + 6$-ból.</p>	
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2 - x$ $\underline{-(x^3 - x^2)}$ $-x^2 - 5x + 6$ $\underline{-(-x^2 + x)}$ $0 - 6x + 6$	$1944 \div 6 = 32$ $\underline{-18}$ 14 $\underline{-12}$ 2

<p>7. lépés: Ugyanaz, mint első lépés.</p> $ \begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2 - x - 6 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ -x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-(-x^2 + x)} \\ -6x + 6 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1944' \div 6 = 32 \\ \underline{-18} \\ 14 \\ \underline{-12} \\ 24 \end{array} $
<p>8. lépés: A kapott taggal (-6) visszaszorozzuk $x - 1$-et, és ezt írjuk az eredeti kifejezés alá.</p>	
$ \begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2 - x - 6 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ -x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-(-x^2 + x)} \\ -6x + 6 \\ \underline{-(-6x + 6)} \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1944 \div 6 = 324 \\ \underline{-18} \\ 14 \\ \underline{-12} \\ 24 \\ \underline{-24} \end{array} $
<p>9. lépés: $-6x + 6$-et kivonjuk $-6x + 6$-ból.</p>	
$ \begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \div (x - 1) = x^2 - x - 6 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ -x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-(-x^2 + x)} \\ -6x + 6 \\ \underline{-(-6x + 6)} \\ 0 + 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1944 \div 6 = 324 \\ \underline{-18} \\ 14 \\ \underline{-12} \\ 24 \\ \underline{-24} \\ 0 \end{array} $
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1) \cdot (x^2 - x - 6)$	$1944 = 6 \cdot 324$