Sorozatok

Nevezetes sorozatok

	Sorozat	Példák
0-hoz tartó sorozatok	$\frac{1}{n^k} \to 0$	$\frac{1}{n} \to 0$
		$\frac{1}{n^2} \to 0$
		$\frac{1}{n^3} \to 0$
	$\frac{1}{\sqrt[k]{n}} \to 0$	$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$
		$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \to 0$
		$\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \to 0$
∞-hez tartó sorozatok	$n^k \to \infty$	$n \to \infty$
		$n^2 \to \infty$
		$n^3 \to \infty$
	$\sqrt[k]{n} \to \infty$	$\sqrt{n} \to \infty$
		$\sqrt[3]{n} \to \infty$
		$\sqrt[4]{n} \to \infty$
	$n! \to \infty$	$n! \to \infty$
	$n^n \to \infty$	$n^n \to \infty$
1-hez tartó sorozat	$\sqrt[n]{n} \to 1$	$\sqrt[n]{n} \to 1$
Különleges sorozatok	$k^n \to \begin{cases} k^n \to \infty, & ha\ k > 1 \\ k^n \to 1, & ha\ k = 1 \\ k^n \to 0, & ha -1 < k < 1 \\ divergens, & ha\ k \leq -1 \end{cases}$	$2^n \to \infty$ $1^n \to 1$ $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ $(-2)^n \to divergens$
	$\log_k n \to \begin{cases} \log_k n \to \infty, & ha\ k > 1 \\ \log_k n \to -\infty, & ha\ 0 < k < 1 \end{cases}$	$\log_2 n \to \infty$ $\log_{\frac{1}{2}} n \to -\infty$

Sorozatok erőssége

$log_k\, n < \sqrt[k]{n} < n^k < k^n < n! < n^n$

Hányadosok határértéke

	Hányadosok határértéke	Példák
$\dfrac{\textbf{Polinom}}{\textbf{Polinom}}$	Ha két polinom van elosztva egymással, akkor 3-féle eredmény jöhet ki a határértékre. Ezeket akár ránézésre is megtudjuk állapítani, csak meg kell keresni a számláló legnagyobb kitevőjű tagját, és a nevező legnagyobb kitevőjű tagját. Mindig a nevező legnagyobb kitevőjű tagjával osszuk el az összes többi tagot.	
	1. eset Ha a számláló legnagyobb kitevőjű tagja és a nevező legnagyobb kitevőjű tagja megegyezik egymással, akkor a határérték a legnagyobb kitevőjű tagok előtti szorzó tényezők hányadosa lesz.	$lim\dfrac{2n^3-5n^2+3n}{4n^3+6n^2-9n}=$ $=lim\dfrac{2\frac{n^3}{n^3}-5\frac{n^2}{n^3}+3\frac{n}{n^3}}{4\frac{n^3}{n^3}+6\frac{n^2}{n^3}-9\frac{n}{n^3}}=$ $=lim\dfrac{2-5\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}}{4+6\frac{1}{n}-9\frac{1}{n^2}}=$ $=\dfrac{2-0+0}{4+0-0}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
	2. eset Ha a számláló legnagyobb kitevőjű tagja nagyobb, mint a nevező legnagyobb kitevőjű tagja, akkor a határérték plusz vagy mínusz végtelen lehet attól függően, hogy a legnagyobb kitevőjű tagok előtti szorzó tényezők milyen előjelűek.	$lim\dfrac{6n^5-8n^3+3}{9n^4+4n^2-9n}=$ $=lim\dfrac{6\frac{n^5}{n^4}-8\frac{n^3}{n^4}+\frac{3}{n^4}}{9\frac{n^4}{n^4}+4\frac{n^2}{n^4}-9\frac{n}{n^4}}=$ $=lim\dfrac{6n-8\frac{1}{n}+\frac{3}{n^4}}{9+4\frac{1}{n^2}-9\frac{1}{n^3}}=$ $=lim\dfrac{6n-0+0}{9+0-0}=+\infty$
	3. eset Ha a számláló legnagyobb kitevőjű tagja kisebb, mint a nevező legnagyobb kitevőjű tagja, akkor a határérték 0 lesz függetlenül a szorzótényezők előjeleitől.	$lim\dfrac{5n^2-7n+8}{3n^3+5n^2-6n}=$ $=lim\dfrac{5\frac{n^2}{n^3}-7\frac{n}{n^3}+\frac{8}{n^3}}{3\frac{n^3}{n^3}+5\frac{n^2}{n^3}-6\frac{n}{n^3}}=$ $=lim\dfrac{5\frac{1}{n}-7\frac{1}{n^2}+\frac{8}{n^3}}{3+5\frac{1}{n}-6\frac{1}{n^2}}=$

		$=lim\frac{0-0+0}{3+0-0}=\mathbf{0}$
	Ha két hatványos kifejezés van elosztva egymással, akkor is 3-féle eredmény jöhet ki a határértékre. Ezeket ugyan úgy, mint az előzőekben akár ránézésre is megtudjuk állapítani, csak meg kell keresni a számláló legnagyobb alapú tagját, és a nevező legnagyobb alapú tagját. Mindig a nevező legnagyobb alapú tagjával osszuk el az összes többi tagot.	
	1. eset Ha a számláló legnagyobb alapú tagja és a nevező legnagyobb alapú tagja megegyezik egymással, akkor a határérték a legnagyobb alapú tagok előtti szorzó tényezők hányadosa lesz.	$lim\frac{\mathbf{3}\cdot\mathbf{8^n}-8\cdot 6^n+7\cdot 3^n}{\mathbf{5}\cdot\mathbf{8^n}+2\cdot 5^n-3\cdot 2^n}=$ $=lim\frac{\mathbf{3}\cdot\frac{8^n}{8^n}-8\cdot\frac{6^n}{8^n}+7\cdot\frac{3^n}{8^n}}{\mathbf{5}\cdot\frac{8^n}{8^n}+2\cdot\frac{5^n}{8^n}-3\cdot\frac{2^n}{8^n}}=$ $=lim\frac{\mathbf{3}-8\cdot\left(\frac{6}{8}\right)^n+7\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^n}{\mathbf{5}+2\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^n-3\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^n}=$ $=\frac{\mathbf{3}-0+0}{\mathbf{5}+0-0}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$
$\frac{\boldsymbol{Hatvány}}{\boldsymbol{Hatvány}}$	**2. eset** Ha a számláló legnagyobb alapú tagja nagyobb, mint a nevező legnagyobb alapú tagja, akkor a határérték plusz vagy mínusz végtelen lehet attól függően, hogy a legnagyobb alapú tagok előtti szorzó tényezők milyen előjelűek.	$lim\frac{3\cdot\mathbf{9^n}+8\cdot 5^n-2\cdot 4^n}{11\cdot\mathbf{7^n}+7\cdot 6^n-5\cdot 2^n}=$ $=lim\frac{3\cdot\frac{9^n}{7^n}+8\cdot\frac{5^n}{7^n}-2\cdot\frac{4^n}{7^n}}{11\cdot\frac{7^n}{7^n}+7\cdot\frac{6^n}{7^n}-5\cdot\frac{2^n}{7^n}}=$ $=lim\frac{3\cdot\left(\frac{9}{7}\right)^n+8\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^n-2\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^n}{11+7\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n-5\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^n}=$ $lim\frac{3\cdot\left(\frac{9}{7}\right)^n+0-0}{11+0-0}=\infty$
	3. eset Ha a számláló legnagyobb alapú tagja kisebb, mint a nevező legnagyobb alapú tagja, akkor a határérték 0 lesz, függetlenül a szorzótényezők előjeleitől.	$lim\frac{5\cdot\mathbf{4^n}+7\cdot 3^n-9\cdot 2^n}{2\cdot\mathbf{6^n}+3\cdot 5^n-6\cdot 3^n}=$ $=lim\frac{5\cdot\frac{4^n}{6^n}+7\cdot\frac{3^n}{6^n}-9\cdot\frac{2^n}{6^n}}{2\cdot\frac{6^n}{6^n}+3\cdot\frac{5^n}{6^n}-6\cdot\frac{3^n}{6^n}}=$ $=lim\frac{5\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^n+7\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^n-9\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^n}{2+3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n-6\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^n}=$ $=\frac{0+0-0}{2+0-0}=\frac{0}{2}=\mathbf{0}$

e-hez tartó sorozatok	$lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{szám}=1$	$lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3}=1$
	$lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$	$lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$
	$lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}=e^{k}$	$lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=e^{2}$
	$lim\left(a+\frac{k}{n}\right)^{n}=\infty \quad (a>1)$	$lim\left(3+\frac{1}{n}\right)^{n}=\infty$
	$lim\left(a+\frac{k}{n}\right)^{n}=0 \quad (a<1)$	$lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^{n}=0$

Monotonitás

Lépések	**Példa**
Adott egy sorozat: $a_n=\cdots$	$a_n=\frac{2n-5}{6n+3}$
Szeretnénk megtudni, hogy szigorúan monoton nő, vagy csökken.	
1. lépés: Határozzuk meg a_{n+1}-et.	$a_{n+1}=\frac{2\cdot(n+1)-5}{6\cdot(n+1)+3}=\frac{2n+2-5}{6n+6+3}=\frac{2n-3}{6n+9}$
2. lépés: Írjuk fel az alábbi különbséget: $a_{n+1}-a_n$	$a_{n+1}-a_n=\frac{2n-3}{6n+9}-\frac{2n-5}{6n+3}$
3. lépés: A különbség közös nevezőre hozása, zárójelek felbontása, egynemű tagok összevonása.	$\frac{(2n-3)\cdot(6n+3)}{(6n+9)\cdot(6n+3)}-\frac{(2n-5)\cdot(6n+9)}{(6n+3)\cdot(6n+9)}=$ $=\frac{12n^2+6n-18n-9}{36n^2+18n+54n+27}-\frac{12n^2+18n-30n-45}{36n^2+18n+54n+27}=$ $=\frac{12n^2+6n-18n-9-(12n^2+18n-30n-45)}{36n^2+18n+54n+27}=$ $=\frac{12n^2+6n-18n-9-(12n^2+18n-30n-45)}{36n^2+18n+54n+27}=$ $=\frac{12n^2+6n-18n-9-12n^2-18n+30n+45}{36n^2+18n+54n+27}=$ $=\frac{36}{36n^2+72n+27}$
4. lépés: Nézzük meg, hogy az így kapott tört pozitív vagy negatív-e. Ha pozitív: $a_{n+1}-a_n>0\rightarrow Szig.mon.nő$ Ha negatív: $a_{n+1}-a_n<0\rightarrow Szig.mon.csökk.$	$\frac{36}{36n^2+72n+27}\rightarrow\frac{\oplus}{\oplus}=\oplus$ $a_{n+1}-a_n>0\rightarrow \boldsymbol{Szig.mon.nő}$

Küszöbindex számítás

Lépések	Példa
Adott egy sorozat és egy ε sugarú környezet: $a_n = \cdots$ $\varepsilon = \cdots$	$a_n = \dfrac{2n-3}{4n+5}$ $\varepsilon = 10^{-3}$
<u>1. lépés</u>: Számítsuk ki a sorozat határértékét.	
$A = lim\, a_n$	$\boldsymbol{A} = lim\dfrac{2n-3}{4n+5} = lim\dfrac{2\frac{n}{n}-\frac{3}{n}}{4\frac{n}{n}+\frac{5}{n}} = lim\dfrac{2-\frac{3}{n}}{4+\frac{5}{n}} = \dfrac{2}{4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$
<u>2. lépés</u>: Írjuk fel az alábbi egyenlőtlenséget.	
$\|a_n - A\| < \varepsilon$	$\left\|\dfrac{2n-3}{4n+5}-\dfrac{1}{2}\right\| < 10^{-3}$
<u>3. lépés</u>: Az abszolútérték jelen belüli különbség közös nevezőre hozása, zárójelek felbontása, egynemű tagok összevonása.	$\left\|\dfrac{2n-3}{4n+5}-\dfrac{1}{2}\right\| < 10^{-3}$ $\left\|\dfrac{(2n-3)\cdot 2}{(4n+5)\cdot 2}-\dfrac{4n+5}{2\cdot(4n+5)}\right\| < \dfrac{1}{1000}$ $\left\|\dfrac{4n-6}{8n+10}-\dfrac{4n+5}{8n+10}\right\| < \dfrac{1}{1000}$ $\left\|\dfrac{4n-6-(4n+5)}{8n+10}\right\| < \dfrac{1}{1000}$ $\left\|\dfrac{4n-6-4n-5}{8n+10}\right\| < \dfrac{1}{1000}$ $\left\|\dfrac{-11}{8n+10}\right\| < \dfrac{1}{1000}$
<u>4. lépés</u>: A kapott hányadosnak vegyük az abszolútértékét.	$\left\|\dfrac{-11}{8n+10}\right\| < \dfrac{1}{1000}$ $\dfrac{11}{8n+10} < \dfrac{1}{1000}$
<u>5. lépés</u>: Rendezzük át az egyenlőtlenséget úgy, hogy n legyen a jobb oldalon.	$\dfrac{11}{8n+10} < \dfrac{1}{1000} \qquad /\cdot(8n+10)$ $11 < \dfrac{8n+10}{1000} \qquad /\cdot 1000$ $11000 < 8n+10 \qquad /-10$ $10990 < 8n \qquad /:8$ $\boldsymbol{1373{,}75 < n}$
<u>6. lépés</u>: Ha nem egész számot kaptunk eredményül, akkor lefelé kerekítsük, függetlenül a kerekítés szabályaitól.	$\boldsymbol{n_0 = 1373}$