Komplex számok

$i = \sqrt{-1}$	$i^5 = i = \sqrt{-1}$	$i^9 = i = \sqrt{-1}$	$i^{13} = i = \sqrt{-1}$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$	$i^{14} = -1$
$i^3 = -i = -\sqrt{-1}$	$i^7 = -i = -\sqrt{-1}$	$i^{11} = -i = -\sqrt{-1}$	$i^{15} = -i = -\sqrt{-1}$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$	$i^{16} = 1$

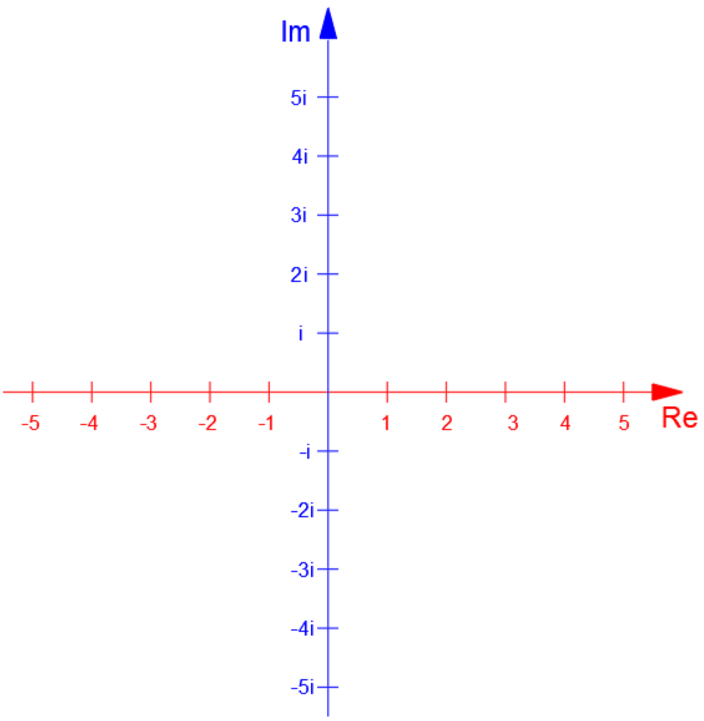
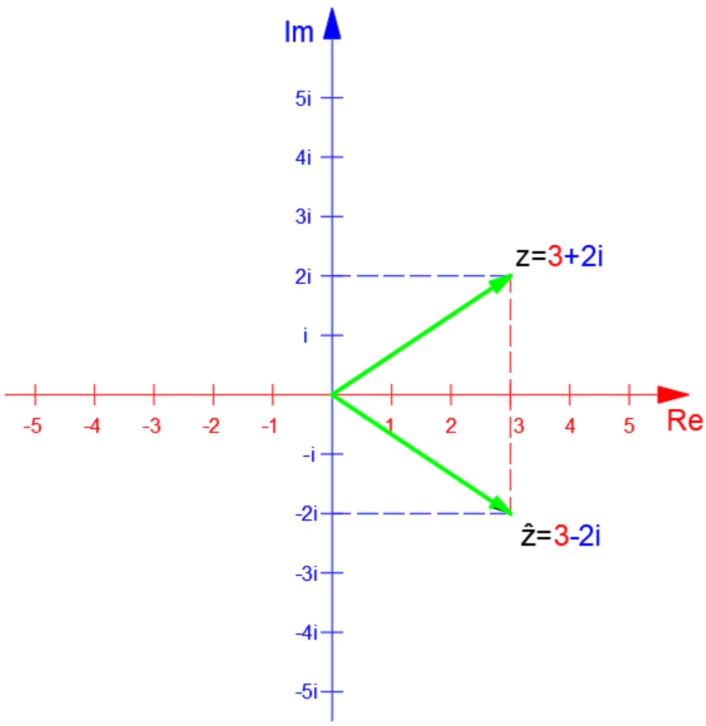
Megjegyzés: i helyett szokták j-vel is jelölni.

Algebrai alak

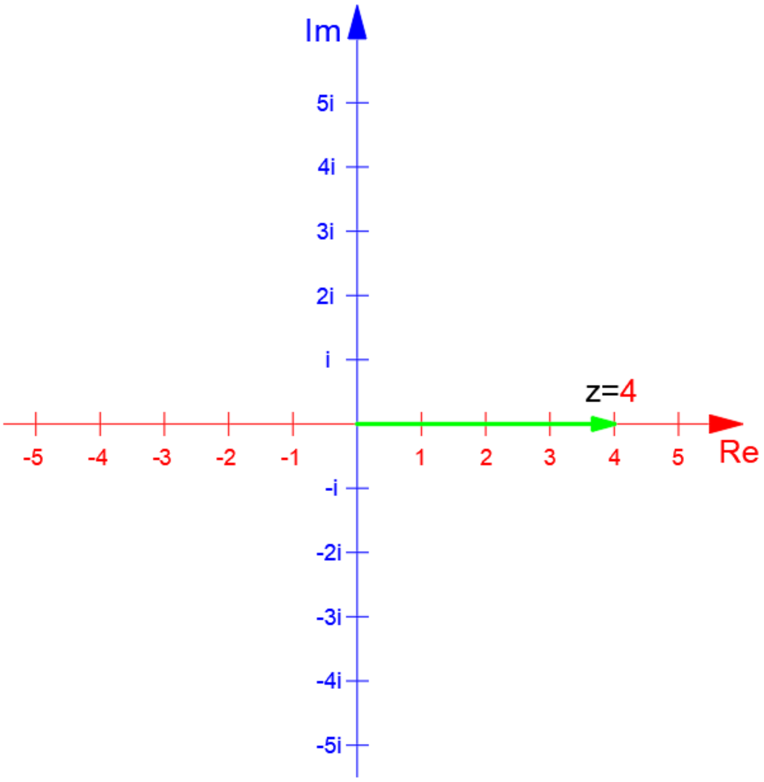
$$\boldsymbol{z = a + bi}$$

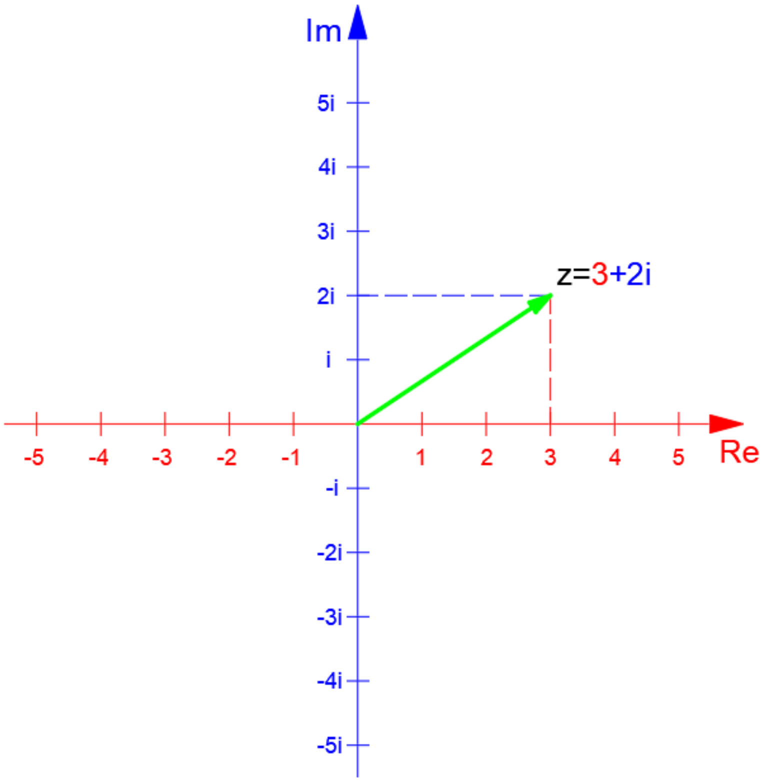
Valós rész (Re)

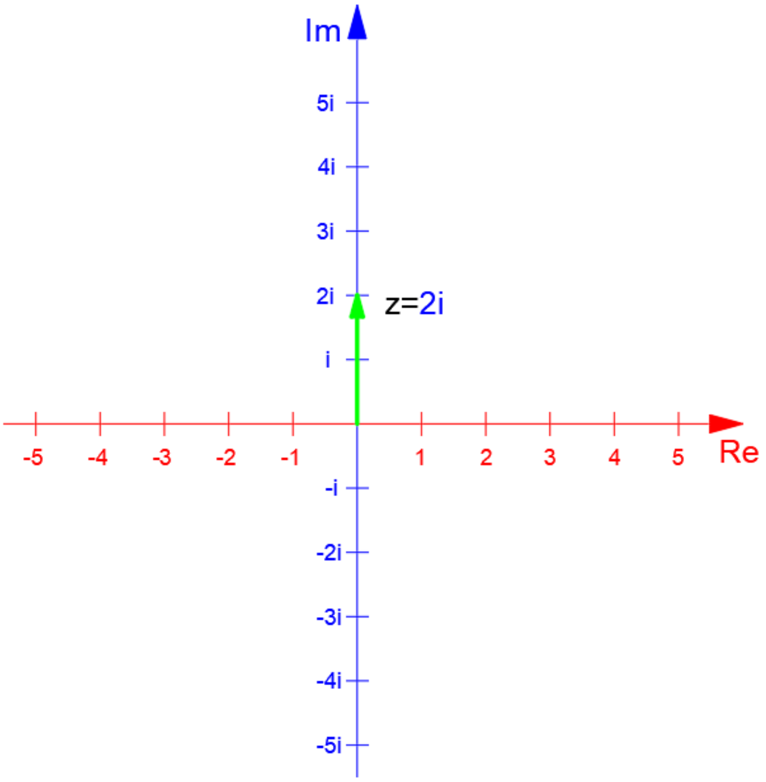
Képzetes rész (Im)

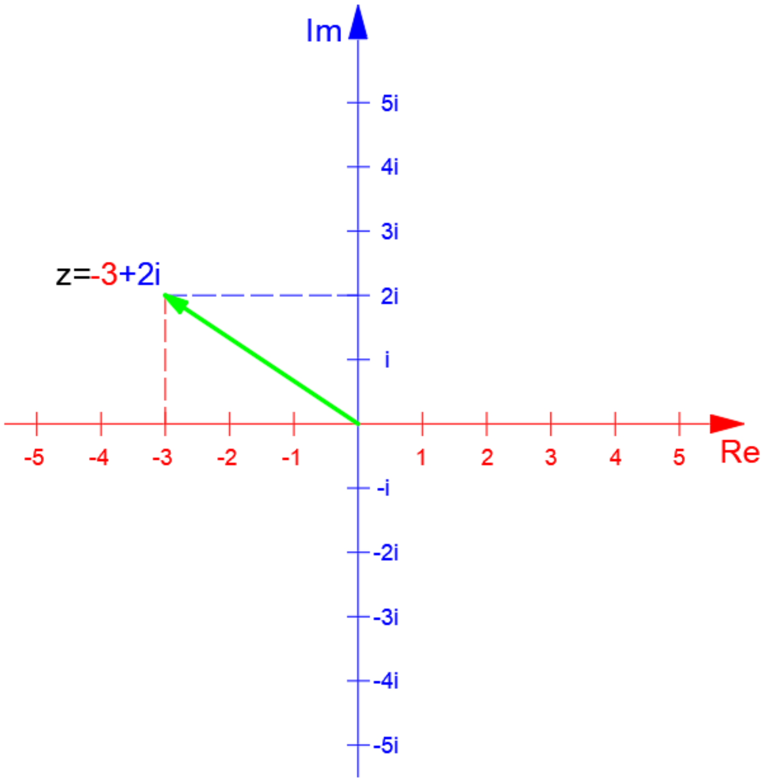
A komplex számsík:	Komplex szám, és konjugáltja ábrázolva a komplex számsíkon:
	
Az x tengelyen a komplex szám valós részét (Re), az y tengelyen, pedig a képzetes részt (Im) jelöljük.	Komplex szám konjugáltját úgy kapjuk, hogy a képzetes részének vesszük az ellentetjét. Komplex szám és a konjugáltja mindig szimmetrikusak a valós (x) tengelyre. Komplex szám: $z = a + bi$ Konjugáltja: $\bar{z} = a - bi$ Példa: Komplex szám: $z = 3 + 2i$ Konjugáltja: $\bar{z} = 3 - 2i$

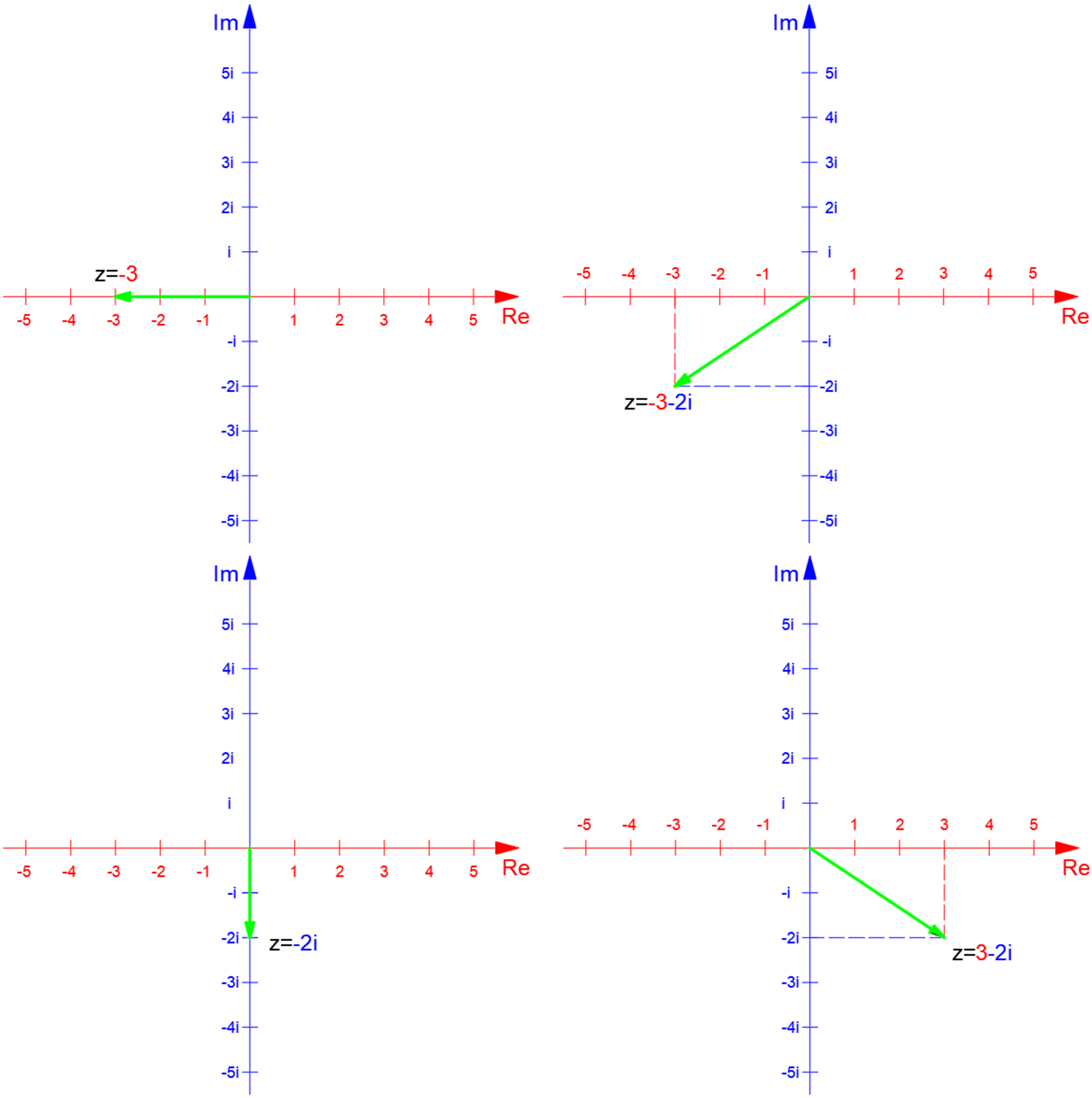
Példák a komplex számsíkon







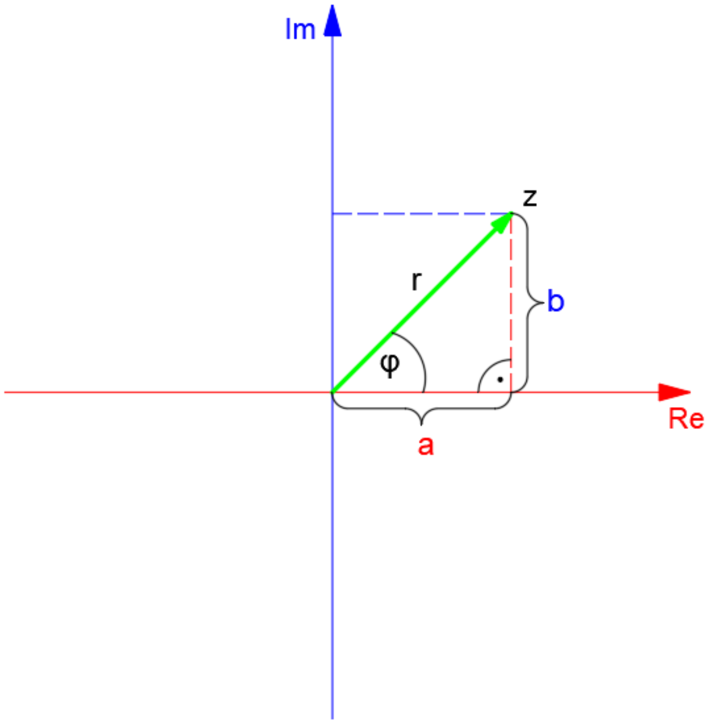
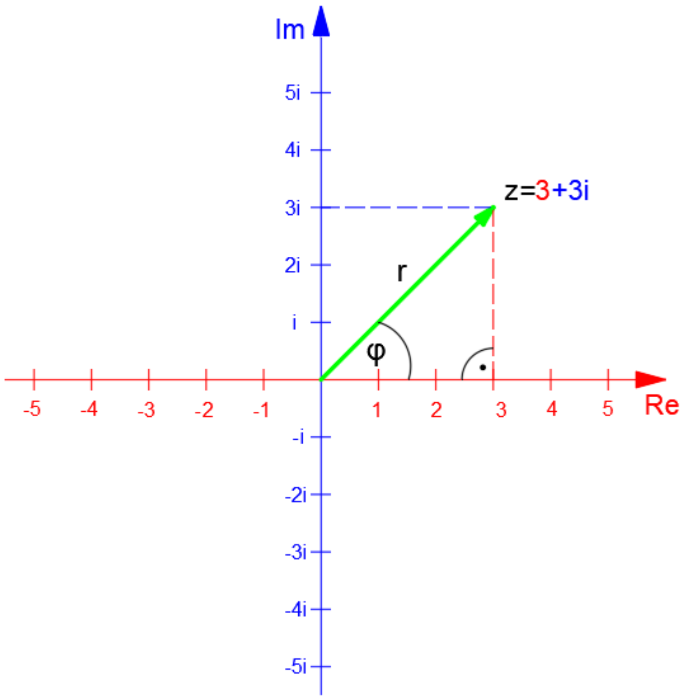




Im
Re
z=-3
z=-3-2i
z=-2i
z=3-2i

Műveletek algebrai alakban	Példa
Adott két komplex szám: $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$	$z_1 = 5 + 2i$ $z_2 = 1 + 3i$
Összeadás	
Valós részt a valós résszel adjuk össze, képzetes részt a képzetes résszel.	
$\boldsymbol{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i}$	$\boldsymbol{z_1 + z_2} = (5+1) + (2+3) \cdot i = \boldsymbol{6 + 5i}$
Kivonás	
Valós részből a valós részt vonjuk ki, képzetes részből a képzetes részt.	
$\boldsymbol{z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i}$	$\boldsymbol{z_1 - z_2} = (5-1) + (2-3) \cdot i = \boldsymbol{4 - i}$
Szorzás	
Minden tagot összeszorzunk minden taggal.	
$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2} = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) =$ $= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot i \cdot a_2 + b_1 \cdot i \cdot b_2 \cdot i =$ $= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot i \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 \cdot i^2 =$ $= \boldsymbol{a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot i \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2}$	$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2} = (5 + 2i) \cdot (1 + 3i) =$ $= 5 \cdot 1 + 5 \cdot 3i + 2i \cdot 1 + 2i \cdot 3i =$ $= 5 + 15i + 2i + 6i^2 =$ $= 5 + 15i + 2i - 6 = \boldsymbol{-1 + 17i}$
Osztás	
A törtet kibővítjük a nevező konjugáltjával.	
$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}} = \frac{a_1 + b_1 \cdot i}{a_2 + b_2 \cdot i} \cdot \frac{a_2 - b_2 \cdot i}{a_2 - b_2 \cdot i}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{5 + 2i}{1 + 3i} \cdot \frac{1 - 3i}{1 - 3i}$
Ezután elvégezzük a szorzást, számlálót a számlálóval nevezőt a nevezővel szorozzuk. A nevezőben való szorzásnál megjelenik egy nevezetes azonosság. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	
$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} =$ $= \frac{(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i)}{{a_2}^2 - (b_2 i)^2} =$ $= \frac{a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot i \cdot a_2 - b_1 \cdot i \cdot b_2 \cdot i}{{a_2}^2 - {b_2}^2 \cdot i^2} =$ $= \frac{a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot i \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 \cdot i^2}{{a_2}^2 - {b_2}^2 \cdot i^2} =$ $= \boldsymbol{\frac{a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot i \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2}}$	$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{5 + 2i}{1 + 3i} \cdot \frac{1 - 3i}{1 - 3i} =$ $= \frac{(5 + 2i) \cdot (1 - 3i)}{1^2 - (3i)^2} =$ $= \frac{5 - 15i + 2i - 6i^2}{1^2 - 3^2 \cdot i^2} =$ $= \frac{5 - 15i + 2i + 6}{1 + 9} =$ $= \frac{11 - 13i}{10} = \boldsymbol{\frac{11}{10} - \frac{13}{10} i}$
Hatványozást és gyökvonást sosem csinálunk algebrai alakban.	Trigonometrikus vagy exponenciális alakban végezhető csak el.

Trigonometrikus alak

Áttérés algebrai alakból trigonometrikus alakba	Példa
	
Adott algebrai alakban egy komplex szám $z = a + b \cdot i$	$z = 3 + 3i$
Pitagorasz tétel segítségével számítsuk ki hosszát (r).	
$\boldsymbol{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$	$r = \sqrt{3^2 + 3^2}$ $r = \sqrt{9 + 9}$ $\boldsymbol{r} = \sqrt{18} = \boldsymbol{3 \cdot \sqrt{2}}$
Tangens szögfüggvény segítségével számítsuk ki a komplex szám és az x tengely által bezárt szög nagyságát.	
$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \rightarrow \boldsymbol{\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{3}$ $\operatorname{tg} \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}(1)$ $\boldsymbol{\varphi = 45° = \frac{\pi}{4}}$
Behelyettesítjük r-t és φ-t az alábbi képletbe.	
$\boldsymbol{z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)}$	Radiánban $\boldsymbol{z = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)}$ Fokban $\boldsymbol{z = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos 45° + i \sin 45°)}$

Műveletek trigonometrikus alakban	Példa
Adott két komplex szám trigonometrikus alakban: $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$	Radiánban $z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right)$ $z_2 = 6 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)$
	Fokban $z_1 = 2 \cdot (\cos 90° + i \cdot \sin 90°)$ $z_2 = 6 \cdot (\cos 60° + i \cdot \sin 60°)$
Összeadás és kivonás	
Nem szoktuk trigonometrikus alakban elvégezni, mindig algebrai alakban végezzük el.	
Szorzás	
Össze szorozzuk a hosszúságokat egymással, a szögeket pedig összeadjuk.	
$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))}$	Radiánban $\boldsymbol{z_1 \cdot z_2} = 2 \cdot 6 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$ $= 12 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right)\right) =$ $= \boldsymbol{12 \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)}$
	Fokban $\boldsymbol{z_1 \cdot z_2} = 2 \cdot 6 \cdot (\cos(90° + 60°) + i \cdot \sin(90° + 60°)) =$ $= \boldsymbol{12 \cdot (\cos(150°) + i \cdot \sin(150°))}$
Osztás	
Elosszuk a hosszúságokat egymással, a szögeket pedig kivonjuk.	
$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))}$	Radiánban $\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{2}{6} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right) =$ $= \frac{1}{3} \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6}\right)\right) =$ $= \boldsymbol{\frac{1}{3} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}$
	Fokban $\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{2}{6} \cdot (\cos(90° - 60°) + i \cdot \sin(90° - 60°)) =$ $= \boldsymbol{\frac{1}{3} \cdot (\cos(30°) + i \cdot \sin(30°))}$

Hatványozás	
A hosszúságot annyiadikra emeljük, ahányadikon van a komplex kifejezés, a szöget pedig annyival szorozzuk meg.	
$\boldsymbol{z_1}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{r_1}^{\boldsymbol{n}} \cdot (\mathbf{cos}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\varphi_1}) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\varphi_1}))$	Radiánban $\boldsymbol{z_1}^{\mathbf{3}} = 2^3 \cdot \left(\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) =$ $= \mathbf{8} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)\right)$
	Fokban $\boldsymbol{z_1}^{\mathbf{3}} = 2^3 \cdot (\cos(3 \cdot 90°) + i \cdot \sin(3 \cdot 90°)) =$ $= \mathbf{8} \cdot (\mathbf{cos}(\mathbf{270°}) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}(\mathbf{270°}))$
Gyökvonás	
A hosszúságból annyiadik gyököt vonunk, ahányadik gyök alá van vonva komplex kifejezés, a szöghöz pedig hozzáadunk $k \cdot 2\pi$-t, és elosztjuk annyival, ahányadik gyök alá van vonva.	
$\sqrt[n]{\boldsymbol{z_1}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{r_1}} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{n}}\right) + \boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{n}}\right)\right)$ $k = 0,1,2,3 \ldots (n-1)$ Ha fokban számolunk: $\sqrt[n]{\boldsymbol{z_1}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{r_1}} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{360°}}{\boldsymbol{n}}\right) + \boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{360°}}{\boldsymbol{n}}\right)\right)$ $k = 0,1,2,3 \ldots (n-1)$ Itt mindig több megoldásunk lesz. Annyi megoldás lesz amennyi n értéke, tehát ahányadik gyököt vonunk.	Radiánban $\sqrt[3]{\boldsymbol{z_1}} = \sqrt[3]{\mathbf{2}} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right)\right)$
	$\boldsymbol{k = 0}$ $\sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \mathbf{0} \cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \mathbf{0} \cdot 2\pi}{3}\right)\right) =$ $= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right)\right) =$ $= \sqrt[3]{\mathbf{2}} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right)\right)$

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{z_1}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{r_1}} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{n}}\right) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{n}}\right)\right)$$

$$k = 0,1,2,3 \ldots (n-1)$$

Ha fokban számolunk:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{z_1}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{r_1}} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{360^\circ}}{\boldsymbol{n}}\right) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{360^\circ}}{\boldsymbol{n}}\right)\right)$$

$$k = 0,1,2,3 \ldots (n-1)$$

Itt mindig több megoldásunk lesz. Annyi megoldás lesz amennyi n értéke, tehát ahányadik gyököt vonunk.

$$\boldsymbol{k = 1}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \mathbf{1} \cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \mathbf{1} \cdot 2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2}}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2}}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{\mathbf{2}} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{k = 2}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \mathbf{2} \cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \mathbf{2} \cdot 2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{2}}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{2}}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{\mathbf{2}} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{9}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right) + \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{9}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right)\right)$$

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi_1 + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1 + k \cdot 2\pi}{n}\right)\right)$$

$$k = 0,1,2,3 \ldots (n-1)$$

Ha fokban számolunk:

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi_1 + k \cdot 360°}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1 + k \cdot 360°}{n}\right)\right)$$

$$k = 0,1,2,3 \ldots (n-1)$$

Itt mindig több megoldásunk lesz. Annyi megoldás lesz amennyi n értéke, tehát ahányadik gyököt vonunk.

Fokban

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + k \cdot 360°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90° + k \cdot 360°}{3}\right)\right)$$

$k = 0$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 0 \cdot 360°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90° + 0 \cdot 360°}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 0°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90° + 0°}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90°}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot (\cos(30°) + i \cdot \sin(30°))$$

$k = 1$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 1 \cdot 360°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90° + 1 \cdot 360°}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 360°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90° + 360°}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{450°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{450°}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot (\cos(150°) + i \cdot \sin(150°))$$

$k = 2$

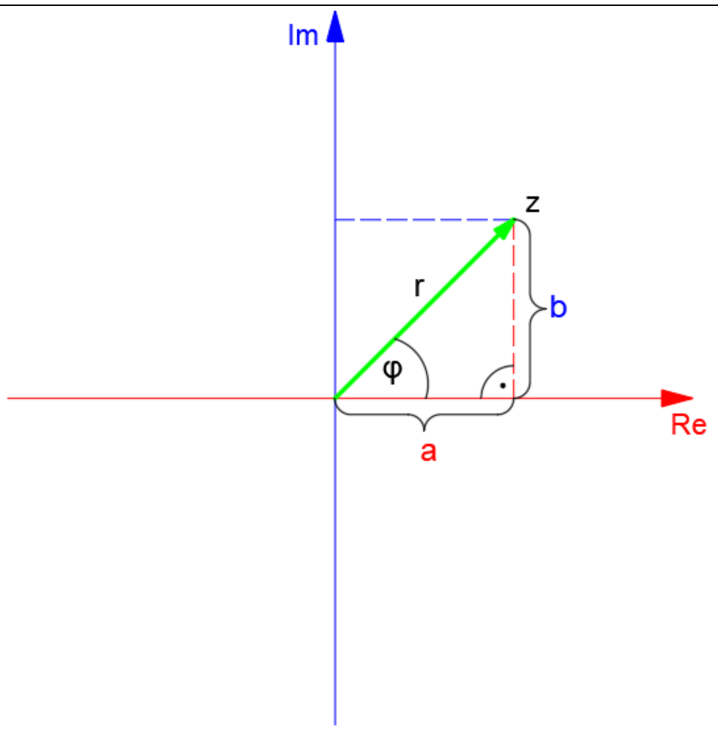
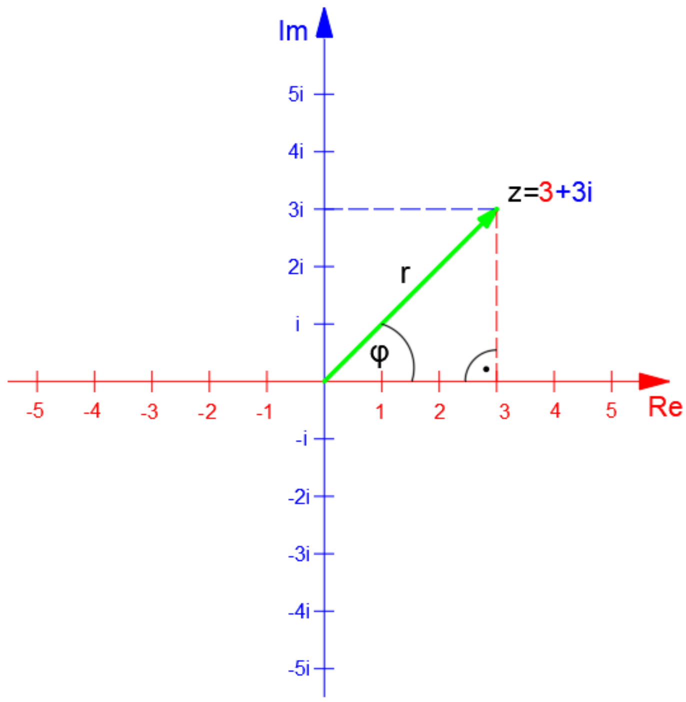
$$\sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 2 \cdot 360°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90° + 2 \cdot 360°}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 720°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{90° + 720°}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{810°}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{810°}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot (\cos(270°) + i \cdot \sin(270°))$$

Exponenciális alak

Áttérés algebrai alakból exponenciális alakba	**Példa**
	
Ugyanazokat a lépéseket kell elvégeznünk, mint trigonometrikus alakra való áttérésnél, csak a végén más képletbe kell behelyettesíteni.	
Adott algebrai alakban egy komplex szám $z = a + b \cdot i$	$z = 3 + 3i$
Pitagorasz tétel segítségével számítsuk ki hosszát (r).	
$\boldsymbol{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$	$r = \sqrt{3^2 + 3^2}$ $r = \sqrt{9 + 9}$ $\boldsymbol{r} = \sqrt{18} = \boldsymbol{3 \cdot \sqrt{2}}$
Tangens szögfüggvény segítségével számítsuk ki a komplex szám és az x tengely által bezárt szög nagyságát.	
$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \rightarrow \boldsymbol{\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{3}$ $\operatorname{tg} \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}(1) \rightarrow \boldsymbol{\varphi = 45° = \frac{\pi}{4}}$
Behelyettesítjük r-t és φ-t az alábbi képletbe.	
$\boldsymbol{z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}}$	$\boldsymbol{z = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}}$
Fontos! **Míg trigonometrikus alaknál fokban és radiánban is beírhattuk a szögeket, addig exponenciális alakban csak radiánban lehet beírni a szögeket!**	

Műveletek exponenciális alakban	**Példa**
Könnyű lesz megjegyezni a műveleteket, mivel ugyanazok lesznek, mint trigonometrikus alakban voltak.	
Adott két komplex szám exponenciális alakban: $z_1 = r_1 \cdot e^{i\cdot\varphi_1}$ $z_2 = r_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_2}$	$z_1 = 2 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$ $z_2 = 6 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$
Összeadás és kivonás	
Nem szoktuk exponenciális alakban elvégezni, mindig algebrai alakban végezzük el.	
Szorzás	
Össze szorozzuk a hosszúságokat egymással, a szögeket pedig összeadjuk.	
$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}}$	$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2} = 2 \cdot 6 \cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 12 \cdot e^{i\cdot\left(\frac{3\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right)} = \boldsymbol{12 \cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{6}}}$
Osztás	
Elosszuk a hosszúságokat egymással, a szögeket pedig kivonjuk.	
$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i\cdot(\varphi_1-\varphi_2)}}$	$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{2}{6} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{3} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{3\pi}{6}-\frac{2\pi}{6}\right)} = \boldsymbol{\frac{1}{3} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}}$
Hatványozás	
A hosszúságot annyiadikra emeljük, ahányadikon van a komplex kifejezés, a szöget pedig annyival szorozzuk meg.	
$\boldsymbol{{z_1}^n = {r_1}^n \cdot e^{n\cdot i\cdot\varphi_1}}$	$\boldsymbol{{z_1}^3} = 2^3 \cdot e^{3\cdot i\cdot\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{8 \cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}}}$

<table>
<tr><th>Gyökvonás</th><th></th></tr>
<tr><td>A hosszúságból annyiadik gyököt vonunk, ahányadik gyök alá van vonva komplex kifejezés, a szöghöz pedig hozzáadunk $k \cdot 2\pi$-t, és elosztjuk annyival, ahányadik gyök alá van vonva.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\sqrt[n]{\boldsymbol{z_1}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{r_1}} \cdot \boldsymbol{e}^{i\frac{\boldsymbol{\varphi_1+k\cdot 2\pi}}{\boldsymbol{n}}}$
$k = 0,1,2,3 \ldots (n-1)$
Itt mindig több megoldásunk lesz. Annyi megoldás lesz amennyi n értéke, tehát ahányadik gyököt vonunk.</td><td>$\sqrt[3]{\boldsymbol{z_1}} = \sqrt[3]{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi}{3}}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{k = 0}$
$\sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+0\cdot 2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{3}} = \sqrt[3]{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{k = 1}$
$\sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+1\cdot 2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{2}}{3}} =$
$= \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}} = \sqrt[3]{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}^{i\cdot\frac{5\pi}{6}}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{k = 2}$
$\sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{8\pi}{2}}{3}} =$
$= \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}} = \sqrt[3]{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{e}^{i\cdot\frac{9\pi}{6}}$</td></tr>
</table>