Függvényvizsgálat

Lépések	Példa
$f(x) = \cdots$	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
1) Értelmezési tartomány	
<u>1. lépés</u>: Megvizsgáljuk a függvény értelmezési tartományát. 3 fajta típus van, ahol nem a valós számok az értelmezési tartomány: • $\sqrt{x} \to D_f: x \geq 0$ • $log\, x \to D_f: x > 0$ • $\frac{1}{x} \to D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Mivel egyikbe sem tartozik bele ezért: $D_f: x \in \mathbb{R}$
2) Zérushely	
<u>1. lépés</u>: A függvényt egyenlővé tesszük 0-val, majd megoldjuk az egyenletet. Az egyenlet megoldásai lesznek a függvény zérushelyei (ahol a függvény metszi az x tengelyt).	
$f(x) = 0$	$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ $x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0$ Egy szorzat akkor 0, ha vagy egyik, vagy másik tagja 0: $\boldsymbol{x_1 = 0}$ $x^2 - 6x + 9 = 0$ $\boldsymbol{x_2 = 3}$ A függvény a 0 és 3 pontokban metszi az x tengelyt.
3) Tengelypont (Tengelymetszet)	
<u>1. lépés</u>: A függvénybe minden x helyére 0-t helyettesítünk be, így megfogjuk kapni, hogy hol metszi a függvény az y tengelyt.	
$f(0) = \cdots$	$\boldsymbol{f(0)} = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = \boldsymbol{0}$ A függvény a 0 pontban metszi az y tengelyt.
4) Határértékek	
<u>1. lépés</u>: Megnézzük, hogy a függvény hova tart a végtelenben.	
$\lim\limits_{x \to \infty} f$	$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \infty} x^3 - 6x^2 + 9x = \infty}$
<u>2. lépés</u>: Megnézzük, hogy a függvény hova tart a mínusz végtelenben.	
$\lim\limits_{x \to -\infty} f$	$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - 6x^2 + 9x = -\infty}$

3. lépés: Csak akkor végezzük el ezt a lépést, ha a függvény nem a valós számok halmazán van értelmezve, hanem vannak szakadási helyei is. Megnézzük a függvény hova tart a szakadási hely jobb és bal oldalán.	Mivel a függvénynek nem volt szakadási helye, ezért ezeket nem kell elvégeznünk.
$\lim\limits_{x \to Szakadási\ hely^{+}} f$ $\lim\limits_{x \to Szakadási\ hely^{-}} f$	
5) Monotonitás, szélső értékek	
1. lépés: Lederiváljuk a függvényt.	
$f'(x)$	$f'(x) = 3x^2 - 6 \cdot 2x + 9 = 3x^2 - 12x + 9$
2. lépés: Az így kapott derivált függvényt egyenlővé tesszük 0-val.	
$f'(x) = 0$	$3x^2 - 12x + 9 = 0$ Egyszerűsíthetünk 3-mal. $x^2 - 4x + 3 = 0$
3. lépés: Megoldjuk az egyenletet.	
$f'(x) = 0$ $x_1 = \cdots$ $x_2 = \cdots$	$x^2 - 4x + 3 = 0$ $\boldsymbol{x_1 = 1}$ $\boldsymbol{x_2 = 3}$
4. lépés: Megrajzoljuk a táblázatot, ha volt az elején szakadási hely, akkor az is kapni fog egy oszlopot.	

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x$
$f'(x)$					
$f(x)$					

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$f'(x)$					
$f(x)$					

5. lépés: Kitöltjük a táblázat első sorát. Az első sorba $x = x_1$ és $x = x_2$ oszlopba 0-t írunk. A többibe pedig $\oplus$ és $\ominus$, annak megfelelően, hogy az adott tartományon a derivált értéke pozitív vagy negatív értéket vesz fel. Legyen $\oplus$ $\ominus$ $\oplus$ a maradék 3 cella a példa kedvedért.

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x$
$f'(x)$	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$					

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$f'(x)$	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$					

6. lépés: Kitöltjük a táblázat második sorát. Először az első sor ⊕ és ⊖ alatti celláit. Ha ⊕ volt akkor azon a részen szigorúan monoton növekvő lesz a függvény (↗), ha pedig ⊖ volt, akkor azon a részen szigorúan monoton csökkenő lesz a függvény (↘).

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x$
$f'(x)$	⊕	0	⊖	0	⊕
$f(x)$	↗		↘		↗

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$f'(x)$	⊕	0	⊖	0	⊕
$f(x)$	↗		↘		↗

7. lépés: Kitöltjük a táblázat második sorának hiányzó celláit (a 0-k alattiakat):

- Ha előtte lévő cella ↗, az utána lévő ↘, akkor a függvénynek maximuma van.
- Ha előtte lévő cella ↘, az utána lévő ↗, akkor a függvénynek minimuma van.
- Ha előtte lévő cella ↘, az utána lévő ↘, vagy az előtte lévő cella ↗, az utána lévő ↗, akkor a függvénynek ebben a pontban nincs szélsőértéke.

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x$
$f'(x)$	⊕	0	⊖	0	⊕
$f(x)$	↗	Max.	↘	Min.	↗

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$f'(x)$	⊕	0	⊖	0	⊕
$f(x)$	↗	Max.	↘	Min.	↗

8. lépés: Ha kérdezik a szélsőértékek értékeit is, akkor az eredeti függvénybe behelyettesítjük x_1 és x_2 értékeit.

$$f(x_1) = \cdots$$
$$f(x_2) = \cdots$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$
$$\boldsymbol{f}(\mathbf{1}) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 1 - 6 + 9 = \mathbf{4}$$
$$\boldsymbol{f}(\mathbf{3}) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 27 - 54 + 27 = \mathbf{0}$$

Minimum: $(\mathbf{3}; \mathbf{0})$, Maximum: $(\mathbf{1}; \mathbf{4})$

6) Konvexitás, inflexiós pontok

1. lépés: A **5.) Monotonitás, szélső értékek** **1. lépésében** kapott függvényt le deriváljuk.

$$f''(x)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$f''(x) = 6x - 12$$

2. lépés: Az így kapott derivált függvényt egyenlővé tesszük 0-val.

$$f''(x) = 0$$

$$6x - 12 = 0$$

3. lépés: Megoldjuk az egyenletet. (x_3 *és* x_4-el jelöltem az egyenlet megoldásait, hogy ne legyen összekeverve az előbb kapott x_1 *és* x_2 megoldásokkal, de van olyan is, hogy ugyanaz a megoldás jön ki itt is.)

$f''(x) = 0$

$x_3 = \cdots$

$x_4 = \cdots$

$6x - 12 = 0$

$6x = 12$

$\boldsymbol{x = 2}$

4. lépés: Megrajzoljuk a táblázatot, ha volt az elején szakadási hely, akkor az is kapni fog egy oszlopot.

	$x < x_3$	$x = x_3$	$x_3 < x < x_4$	$x = x_4$	$x_4 < x$
$f''(x)$					
$f(x)$					

	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$f''(x)$			
$f(x)$			

5. lépés: Kitöltjük a táblázat első sorát. Az első sorba $x = x_3$ és $x = x_4$ oszlopba 0-t írunk. A többibe pedig $\oplus$ és $\ominus$, annak megfelelően, hogy az adott tartományon a második derivált értéke pozitív vagy negatív értéket vesz fel. Legyen $\oplus$ $\ominus$ $\oplus$ a maradék 3 cella a példa kedvedért.

	$x < x_3$	$x = x_3$	$x_3 < x < x_4$	$x = x_4$	$x_4 < x$
$f''(x)$	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$					

	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$f''(x)$	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$			

6. lépés: Kitöltjük a táblázat második sorát. Először az első sor $\oplus$ és $\ominus$ alatti celláit. Ha $\oplus$ volt akkor azon a részen konvex lesz a függvény ($\cup$), ha pedig $\ominus$ volt, akkor azon a részen konkáv lesz a függvény ($\cap$).

	$x < x_3$	$x = x_3$	$x_3 < x < x_4$	$x = x_4$	$x_4 < x$
$f''(x)$	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$

	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$f''(x)$	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

7. lépés: Kitöltjük a táblázat második sorának hiányzó celláit (a 0-k alattiakat):

- Ha előtte lévő cella $\cup$, az utána lévő $\cap$, vagy fordítva, akkor a függvénynek inflexiós pontja van.
- Ha előtte lévő cella $\cup$, az utána lévő $\cup$, vagy mind a kettő $\cap$, akkor a függvénynek ebben a pontban nincs inflexiós pontja.

	$x < x_3$	$x = x_3$	$x_3 < x < x_4$	$x = x_4$	$x_4 < x$
$f''(x)$	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$	$\cup$	Inflexió	$\cap$	Inflexió	$\cup$

	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$f''(x)$	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$	$\cap$	Inflexió	$\cup$

8. lépés: Ha kérdezik az inflexiós pontok értékeit is, akkor az eredeti függvénybe behelyettesítjük x_3 és x_4 értékeit.

$f(x_3) = \cdots$

$f(x_4) = \cdots$

$\boldsymbol{f(2)} = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 8 - 24 + 18 = \mathbf{2}$

Inflexiós pont: $(\mathbf{2}; \mathbf{2})$