Deriválás alkalmazásai

Érintő egyenes egyenlete

Lépések	Példa
Adott egy függvény: $f(x) = \cdots$ Szeretnénk felírni a függvény érintő egyenesének egyenletét egy x_0 pontban.	$f(x) = x^2 + 4x$ $x_0 = 3$
<u>1. lépés</u>: Számítsuk ki a függvény értékét x_0 helyen.	
$f(x_0) = \cdots$	$\boldsymbol{f(3)} = 3^2 + 4 \cdot 3 = 9 + 12 = \mathbf{21}$
<u>2. lépés</u>: Deriváljuk le a függvényt.	
$f'(x) = \cdots$	$\boldsymbol{f'(x) = 2x + 4}$
<u>3. lépés</u>: Számítsuk ki a derivált függvény értékét x_0 helyen.	
$f'(x_0) = \cdots$	$\boldsymbol{f'(3)} = 2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4 = \mathbf{10}$
<u>4. lépés</u>: Helyettesítsük be a korábban meghatározott értékeket az alábbi képletbe.	
$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$	$\boldsymbol{y = 10 \cdot (x - 3) + 21}$
<u>5. lépés</u>: Zárójel felbontása, összevonás	
$y = ax + b$	$y = 10 \cdot (x - 3) + 21 = 10x - 30 + 21$ $\boldsymbol{y = 10x - 9}$

Taylor polinom

Lépések	Példa
Adott egy függvény: $f(x) = \cdots$ Szeretnénk felírni a függvény n-ed rendű Taylor polinomját egy x_0 szám körül.	Határozzuk meg az $f(x) = cos\, x$ függvény megadott $x_0 = 0$ pont körüli 4-edrendű Taylor-polinomját.
<u>1. lépés</u>: Deriváljuk le a függvényt n-szer.	
$f'(x) = \cdots$ $f''(x) = \cdots$ $f^{(3)}(x) = \cdots$ $f^{(n)}(x) = \cdots$	$f'(x) = -sin\, x$ $f''(x) = -cos\, x$ $f^{(3)}(x) = sin\, x$ $f^{(4)}(x) = cos\, x$

2. lépés: Számítsuk ki az eredeti függvény és a derivált függvények értékét x_0 helyen.	
$f(x_0)(=f^{(0)}(x_0)) = \cdots$ $f'(x_0) = \cdots$ $f''(x_0) = \cdots$ $f^{(3)}(x_0) = \cdots$ $f^{(n)}(x_0) = \cdots$	$f(x_0)\left(=f^{(0)}(0)\right) = \cos 0 = 1$ $f'(0) = -\sin 0 = 0$ $f''(0) = -\cos 0 = -1$ $f^{(3)}(0) = \sin 0 = 0$ $f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1$
3. lépés: A kiszámolt értékeket helyettesítsük be az alábbi képletbe.	
$\boldsymbol{T_n(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n =}$ $= \frac{f(x_0)}{0!} \cdot (x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0)^1 +$ $+ \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} \cdot (x-x_0)^3 + \cdots$	$T_4(x) = \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n =$ $= \frac{1}{0!} \cdot (x-0)^0 + \frac{0}{1!} \cdot (x-0)^1 +$ $+ \frac{-1}{2!} \cdot (x-0)^2 + \frac{0}{3!} \cdot (x-0)^3 + \frac{1}{4!} \cdot (x-0)^4$
4. lépés: Ha tudunk, egyszerűsítsünk.	$T_4(x) = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + \frac{-1}{2} \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4$ $T_4(x) = 1 + 0 - \frac{1}{2}x^2 + 0 + \frac{1}{24}x^4$ $\boldsymbol{T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4}$

L'Hospital szabály

Lépések	Példa
Akkor alkalmazzuk, ha egy függvény határértékére $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ eredmény jön ki. Az is elképzelhető, hogy a L'Hospital szabály alkalmazása után megint egy $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték jön ki, ilyenkor még egyszer alkalmazzuk a szabályt.	
$\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}}$ $\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}}$	$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{2^3-2^2-8\cdot 2+12}{2^3-5\cdot 2^2+8\cdot 2-4} =$ $= \frac{8-4-16+12}{8-20+16-4} = \frac{8-4-16+12}{8-20+16-4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'H}$ $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-2x-8}{3x^2-10x+8} = \frac{3\cdot 2^2-2\cdot 2-8}{3\cdot 2^2-10\cdot 2+8} =$ $= \frac{12-4-8}{12-20+8} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'H}$ $\lim_{x\to 2} \frac{6x-2}{6x-10} = \frac{6\cdot 2-2}{6\cdot 2-10} = \frac{12-2}{12-10} = \frac{10}{2} = \mathbf{5}$

Gazdasági feladatok

Jelölések:

$Mennyiség: x,\ q$

$Egységár:\ p(x),\ p(q)$

$Bevétel\ (Revenue): B(x), B(q), R(x), R(q)$

$Költség\ (Cost): K(x), K(q), C(x), C(q)$

$Profit\ (Nyereség): P(x), P(q), Pr(x), Pr(q), Ny(x), Ny(q), \pi\ (x), \pi(q)$

$\boldsymbol{Profit = Bevétel - Költség}$

$\boldsymbol{Pr(x) = R(x) - C(x)}$

Bevétel

$$Bevétel = darab \cdot ár$$

$Mennyiség: x$

$Egységár:\ p(x)$

$$\boldsymbol{R(x) = p(x) \cdot x}$$

$Egységár: x$

$Kereslet\ (darabszám): D(x)$

$$\boldsymbol{R(x) = D(x) \cdot x}$$

Költség

$$Költség = Fix\ költség + Változó\ költség$$

Fix költség: FC

Változó költség: $VC(x)$

$$\boldsymbol{C(x) = VC(x) + FC}$$

Példa

$$p(x) = 3x + 2$$

$$\boldsymbol{R(x)} = p(x) \cdot x = (3x + 2) \cdot x = \boldsymbol{3x^2 + 2x}$$

Változó költség: 5

Fix költség: 10

$$\boldsymbol{C(x)} = VC(x) + FC = \boldsymbol{5x + 10}$$

$$\boldsymbol{Pr(x)} = R(x) - C(x) = 3x^2 + 2x - (5x + 10) = \boldsymbol{3x^2 - 3x - 10}$$

Kereslet, Kínálat

$Mennyiség: x,\ q$

$Kereslet\ (Demand): D(x),\ D(q)$

$Kínálat\ (Supply): S(x), S(q)$

Egyensúlyi ár, egyensúlyi mennyiség: Ahol a két függvény metszi egymást $(D = S)$

Határmennyiségek

Határköltség: Költség deriváltja $(C'(x), MC)$

Határbevétel: Bevétel deriváltja $(R'(x), MR)$

Határprofit: Profit deriváltja $(Pr'(x), MPr)$

Értelmezések: Ha egységnyivel növeljük a mennyiséget (árat), a kapott értékkel fog nőni/csökkenni a költség, a bevétel, vagy a profit

Lépések:

1. lépés: Függvény deriválása

2. lépés: x_0 behelyettesítése a derivált függvénybe

3. lépés: Értelmezés

Elaszticitás (Rugalmasság)

Jelölése: $E, \epsilon\ (epszilon)$

$$\boldsymbol{E(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}}$$

Értelmezés (függvények esetén): Megadja, hogy ha x 1 %-kal nő, hány %-kal fog növekedni a függvény értéke

Lehet pozitív negatív és 0 is

Lépések:

1. lépés: Függvény deriválása

2. lépés: x_0 behelyettesítése a derivált függvénybe

3. lépés: x_0 behelyettesítése az eredeti függvénybe

4. lépés: Behelyettesítés a képletbe és kiszámolás

5. lépés: Értelmezés