Integrálás

Alapintegráltak

Elnevezés	Szabály	Példák
I1	$\int a\,dx = ax + c$	$\int 6\,dx = \boldsymbol{6x + c}$
		$\int \cos\pi\ dx = \boldsymbol{\cos(\pi)\,x + c}$
		$\int \ln 5\ dx = \boldsymbol{\ln(5)\,x + c}$
		$\int e^2\,dx = \boldsymbol{e^2 x + c}$
I2	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int x^8\ dx = \boldsymbol{\frac{x^9}{9} + c}$
		$\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c}$
		$\int \sqrt[6]{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{6}}\ dx \left(x^{\frac{1}{6}}\right)' = \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} = \boldsymbol{\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + c}$
		$\int \sqrt[7]{x^3}\ dx = \int x^{\frac{3}{7}}\ dx = \frac{x^{\frac{10}{7}}}{\frac{10}{7}} = \boldsymbol{\frac{7}{10}\sqrt[7]{x^{10}} + c}$
		$\int \frac{1}{x^4}\ dx = \int x^{-4}\ dx = \frac{x^{-3}}{-3} = \boldsymbol{-\frac{1}{3x^3} + c}$
		$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\ dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{2\sqrt{x} + c}$
		$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\ dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\ dx = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c}$
		$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^9}}\ dx = \int \frac{1}{x^{\frac{9}{5}}}\ dx = \int x^{-\frac{9}{5}}\ dx = \frac{x^{-\frac{4}{5}}}{-\frac{4}{5}} = \boldsymbol{-\frac{5}{4\sqrt[5]{x^4}} + c}$
I3	$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int e^x\,dx = \boldsymbol{e^x + c}$
I4	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int 3^x\,dx = \boldsymbol{\frac{3^x}{\ln 3} + c}$
I5	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \boldsymbol{\ln\lvert x\rvert + c}$
I6	$\int \sin x\ dx = -\cos x + c$	$\int \sin x\ dx = \boldsymbol{-\cos x + c}$
I7	$\int \cos x\ dx = \sin x + c$	$\int \cos x\ dx = \boldsymbol{\sin x + c}$

Elnevezés	Szabály	Példák
I8	$\int \frac{1}{cos^2 x}\, dx = tg\ x + c$	$\int \frac{1}{cos^2 x}\, dx = \boldsymbol{tg\ x + c}$
I9	$\int \frac{1}{sin^2 x}\, dx = -ctg\ x + c$	$\int \frac{1}{sin^2 x}\, dx = \boldsymbol{-ctg\ x + c}$
I10	$\int sh\, x\ dx = ch\, x + c$	$\int sh\, x\ dx = \boldsymbol{ch\, x + c}$
I11	$\int ch\, x\ dx = sh\, x + c$	$\int ch\, x\ dx = \boldsymbol{sh\, x + c}$
I12	$\int \frac{1}{ch^2 x}\, dx = th\, x + c$	$\int \frac{1}{ch^2 x}\, dx = \boldsymbol{th\, x + c}$
I13	$\int \frac{1}{sh^2 x}\, dx = -\, cth\, x + c$	$\int \frac{1}{sh^2 x}\, dx = \boldsymbol{-\, cth\, x + c}$
I14	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = arcsin\, x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \boldsymbol{arcsin\, x + c}$
I15	$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = arctg\, x + c$	$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \boldsymbol{arctg\, x + c}$
I16	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx = arsh\, x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx = \boldsymbol{arsh\, x + c}$
I17	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx = arch\, x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx = \boldsymbol{arch\, x + c}$
I18	$\int \frac{1}{1 - x^2}\, dx = arth\, x + c$	$\int \frac{1}{1 - x^2}\, dx = \boldsymbol{arth\, x + c}$

Integrálási szabályok

Elnevezés	Szabály	Példák
ISZ1	$\int f\,dx = F + c$	$\int x^{12}\,dx = \frac{x^{13}}{13} + c$
ISZ2	$\int c \cdot f\,dx = c \cdot \int f\,dx$	$\int 5 \cdot x^3\,dx = 5 \cdot \int x^3\,dx = 5 \cdot \frac{x^4}{4} + c$
ISZ3	$\int \frac{f}{c} dx = \frac{1}{c} \cdot \int f\,dx$	$\int \frac{x^6}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int x^6\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^7}{7} = \frac{x^7}{14} + c$
ISZ4	$\int f \pm g\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$	$\int x + \cos x = \int x\,dx + \int \cos x\,dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + c$
		$\int \frac{1}{x} - 6^x = \int \frac{1}{x}\,dx - \int 6^x\,dx = ln\lvert x\rvert - \frac{6^x}{ln\,6} + c$
ISZ5	$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$	$\int \sin(5x+8)\,dx = -\frac{\cos(5x+8)}{5} + c$

Integrálás szorzási szabályok

<table>
<tr><th>Elnevezés</th><th>Szabály</th><th>Példák</th></tr>
<tr>
<td>ISZSZ1</td>
<td>Ha elvégezhető a szorzás végezzük el, és utána integráljunk.</td>
<td>

$$\int (x+2)\cdot(2x^2-5x^3)\,dx =$$
$$= \int (2x^3-5x^4+4x^2-10x^3)\,dx =$$
$$= \int (-5x^4-8x^3+4x^2)dx =$$
$$= -5\cdot\int x^4 dx + (-8)\cdot\int x^3\,dx + 4\cdot\int x^2\,dx =$$
$$= -5\cdot\frac{x^5}{5} + (-8)\cdot\frac{x^4}{4} + 4\cdot\frac{x^3}{3} =$$
$$= \boldsymbol{-x^5 - 2x^4 + \frac{4}{3}x^3 + c}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>ISZSZ2</td>
<td>Ha a függvény valamely hatványa meg van szorozva a függvény deriváltjával.

$$\int f^n \cdot f'\,dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + c$$

</td>
<td>

$$\int (x^2+5x)^4\cdot(2x+5)\,dx = \frac{\boldsymbol{(x^2+5x)^5}}{\boldsymbol{5}} + \boldsymbol{c}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">ISZSZ3</td>
<td rowspan="2">Parciális integrálás

Két fajta van:

<table>
<tr><th colspan="2">1. fajta</th></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$g'(x)$</td></tr>
<tr><td>x^n</td><td>$\sin x$</td></tr>
<tr><td>x^n</td><td>$\cos x$</td></tr>
<tr><td>x^n</td><td>e^x</td></tr>
<tr><td>x^n</td><td>a^x</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">2. fajta</th></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$g'(x)$</td></tr>
<tr><td>$\ln x$</td><td>x^n</td></tr>
<tr><td>$\log_a x$</td><td>x^n</td></tr>
<tr><td>$\arcsin x$</td><td>x^n</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{arctg}\, x$</td><td>x^n</td></tr>
</table>

$$\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f'\cdot g\,dx$$

<table>
<tr><td>f</td><td>g'</td></tr>
<tr><td>f'</td><td>g</td></tr>
</table>

</td>
<td>1. fajta

$$\int x\cdot\sin x\,dx = x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx =$$

<table>
<tr><td>$f = x$</td><td>$g' = \sin x$</td></tr>
<tr><td>$f' = 1$</td><td>$g = -\cos x$</td></tr>
</table>

$$= x\cdot(-\cos x) - (-1)\cdot\int \cos x\,dx =$$
$$= x\cdot(-\cos x) + \int \cos x\,dx =$$
$$= \boldsymbol{x\cdot(-\cos x) + \sin x + c}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>2. fajta

$$\int x^3\cdot\ln x\,dx = \ln x\cdot\frac{x^4}{4} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^4}{4}\,dx =$$

<table>
<tr><td>$f = \ln x$</td><td>$g' = x^3$</td></tr>
<tr><td>$f' = \frac{1}{x}$</td><td>$g = \frac{x^4}{4}$</td></tr>
</table>

$$= \ln x\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\cdot\int x^3\,dx =$$
$$= \ln x\,\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} =$$
$$= \frac{\boldsymbol{\ln(x)\cdot x^4}}{\boldsymbol{4}} - \frac{\boldsymbol{x^4}}{\boldsymbol{16}} + \boldsymbol{c}$$

</td>
</tr>
</table>

ISZSZ4	A szorzat egyik tagja összetett függvény, a másik tag pedig az összetett függvény belső függvényének deriváltja. $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$	$\int \cos(5^x) \cdot 5^x \ln 5\,dx = \boldsymbol{sin}(5^x) + \boldsymbol{c}$
ISZSZ5	**Helyettesítéses integrálás** Akkor szoktuk alkalmazni, ha egy x-es kifejezés van összeszorozva egy gyökös kifejezéssel és a gyök alatt legtöbbször $ax + b$ típusú kifejezés szerepel. $\int x \cdot \sqrt{ax+b}\,dx$	$\int x \cdot \sqrt{8x+3}\,dx$
	<u>**1. lépés**</u>: Új változó (u) bevezetése.	
	$\boldsymbol{u = ax + b}$	$\boldsymbol{u = 8x + 3}$
	<u>**2. lépés**</u>: Új változó x szerinti deriválása.	
	$(u' =)\frac{du}{dx} = a$	$\frac{du}{dx} = 8$
	<u>**3. lépés**</u>: A kapott egyenlet átrendezése dx-re.	
	$\frac{du}{dx} = a \quad /\cdot dx$ $du = a \cdot dx \quad /:a$ $\boldsymbol{\frac{du}{a} = dx}$	$\frac{du}{dx} = 8 \quad /\cdot dx$ $du = 8 \cdot dx \quad /:8$ $\boldsymbol{\frac{du}{8} = dx}$
	<u>**4. lépés**</u>: 1. lépésben kifejezett egyenlet átrendezése x-re.	
	$u = ax + b \quad /-b$ $u - b = ax \quad /:a$ $\boldsymbol{\frac{u-b}{a} = x}$	$u = 8x + 3 \quad /-3$ $u - 3 = 8x \quad /:8$ $\boldsymbol{\frac{u-3}{8} = x}$
	<u>**5. lépés**</u>: Behelyettesítés.	
	$\int x \cdot \sqrt{ax+b}\,dx = \int \frac{u-b}{a} \cdot \sqrt{u}\,\frac{du}{a}$	$\int x \cdot \sqrt{ax+b}\,dx = \int \frac{u-3}{8} \cdot \sqrt{u}\,\frac{du}{8}$

ISZSZ5	**6. lépés**: Kiemelések, szorzások elvégzése.	
	$\int \frac{u-b}{a} \cdot \sqrt{u}\, \frac{du}{a} = \int \frac{u-b}{a^2} \cdot \sqrt{u}\, du =$ $= \frac{1}{a^2} \cdot \int (u-b)\sqrt{u}\, du =$ $= \frac{1}{a^2} \cdot \int \left(u \cdot \sqrt{u} - b \cdot \sqrt{u}\right) du =$ $= \frac{1}{a^2} \cdot \int \left(u^{\frac{3}{2}} - b \cdot u^{\frac{1}{2}}\right) du$	$\int \frac{u-3}{8} \cdot \sqrt{u}\, \frac{du}{8} = \int \frac{u-3}{8^2} \cdot \sqrt{u}\, du =$ $= \frac{1}{64} \cdot \int (u-3) \cdot \sqrt{u}\, du =$ $= \frac{1}{64} \cdot \int \left(u \cdot \sqrt{u} - 3 \cdot \sqrt{u}\right) du =$ $= \frac{1}{64} \cdot \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot u^{\frac{1}{2}}\right) du$
	7. lépés: Az integrálás most már elvégezhető.	
	$\frac{1}{a^2} \cdot \int \left(u^{\frac{3}{2}} - b \cdot u^{\frac{1}{2}}\right) du =$ $= \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - b \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2 \cdot u^{\frac{5}{2}}}{5a^2} - \frac{b \cdot 2 \cdot u^{\frac{3}{2}}}{3a^2}$	$\frac{1}{64} \cdot \left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3 \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2 \cdot u^{\frac{5}{2}}}{5 \cdot 64} - \frac{3 \cdot 2 \cdot u^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot 64} =$ $= \frac{2 \cdot u^{\frac{5}{2}}}{5 \cdot 64} - \frac{2 \cdot u^{\frac{3}{2}}}{64} = \frac{2 \cdot u^{\frac{5}{2}}}{320} - \frac{2 \cdot u^{\frac{3}{2}}}{64} = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{160} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{32}$
	8. lépés: Az **1. lépésben** lévő egyenlet visszahelyettesítése u helyére.	
	$\frac{2 \cdot (ax+b)^{\frac{5}{2}}}{5a^2} - \frac{b \cdot 2 \cdot (ax+b)^{\frac{3}{2}}}{3a^2} + c$	$\boldsymbol{\frac{(8x+3)^{\frac{5}{2}}}{160} - \frac{(8x+3)^{\frac{3}{2}}}{32} + c}$

Integrálás osztási szabályok

Elnevezés	Szabály	Példák
IOSZ1	Ha elvégezhető az osztás végezzük el, és utána integráljunk.	$\int \frac{2x^3-5x^4+8x^5}{x^2}dx =$ $= \int \frac{2x^3}{x^2} - \frac{5x^4}{x^2} + \frac{8x^5}{x^2}dx =$ $= 2\cdot\int \frac{x^3}{x^2}\ dx - 5\cdot\int \frac{x^4}{x^2}\ dx + 8\cdot\int \frac{x^5}{x^2}\ dx =$ $= 2\cdot\int x\ \ dx - 5\cdot\int x^2\ \ dx + 8\cdot\int x^3\ \ dx =$ $= 2\cdot\frac{x^2}{2} - 5\cdot\frac{x^3}{3} + 8\cdot\frac{x^4}{4} =$ $= \boldsymbol{x^2 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^4 + c}$
IOSZ2	Ha a számlálóban a nevező deriváltja szerepel. $\int \frac{f'}{f}dx = ln\lvert f\rvert + c$	$\int \frac{2x-9}{x^2-9x}dx = ln\lvert x^2-9x\rvert + c$
IOSZ3	Ez a szabály már előkerült a szorzási szabályoknál (**ISZSZ2**). Ha a tört nevezőjében hatvány szerepel és a hatvány belső függvényének a deriváltja megjelenik a számlálóban, akkor a nevezőt fel tudjuk hozni a számlálóba. $\int \frac{f'}{f^n}dx = \int f'\cdot f^{-n}\ \ dx = \frac{f^{-n+1}}{-n+1} + c$	$\int \frac{3x^2+6x}{(x^3+3x^2)^7}dx =$ $= \int (3x^2+6x)\cdot(x^3+3x^2)^{-7}\ dx =$ $= \frac{(x^3+3x^2)^{-6}}{-6} + c$
IOSZ4	Törtből szorzatot csinálunk. $\int \frac{f}{g}dx = \int f\cdot\frac{1}{g}dx$	$\int \frac{ln\,x}{x}dx = \int ln\,x\cdot\frac{1}{x}dx$ Tudjuk, hogy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Alkalmazzuk **ISZSZ2**-t: $\int f^n\cdot f'\ dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + c$ $\int (\ln x)^1\cdot\frac{1}{x}dx = \boldsymbol{\frac{(ln\,x)^2}{2} + c}$

<table>
<tr><td rowspan="11">IOSZ5</td><td>Helyettesítéses integrálás
Ugyanazokat a lépéseket kell elvégezni, mint ISZSZ5-nél is. Akkor alkalmazzuk leggyakrabban, ha a számlálóban x-es kifejezés a nevezőben, pedig $\sqrt{ax+b}$ típusú kifejezés szerepel.
$$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\,dx$$</td><td>$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+7}}\,dx$$</td></tr>
<tr><td><u>1. lépés</u>: Új változó (u) bevezetése.</td><td></td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{u = ax + b}$</td><td>$\boldsymbol{u = 3x + 7}$</td></tr>
<tr><td><u>2. lépés</u>: Új változó x szerinti deriválása.</td><td></td></tr>
<tr><td>$(u' =)\dfrac{du}{dx} = a$</td><td></td></tr>
<tr><td><u>3. lépés</u>: A kapott egyenlet átrendezése dx-re.</td><td></td></tr>
<tr><td>$\dfrac{du}{dx} = a \qquad /\cdot dx$
$du = a \cdot dx \qquad /:a$
$\boldsymbol{\dfrac{du}{a} = dx}$</td><td>$\dfrac{du}{dx} = 3 \qquad /\cdot dx$
$du = 3 \cdot dx \qquad /:3$
$\boldsymbol{\dfrac{du}{3} = dx}$</td></tr>
<tr><td><u>4. lépés</u>: 1. lépésben kifejezett egyenlet átrendezése x-re.</td><td></td></tr>
<tr><td>$u = ax + b \qquad /-b$
$u - b = ax \qquad /:a$
$\boldsymbol{\dfrac{u-b}{a} = x}$</td><td>$u = 3x + 7 \qquad /-7$
$u - 7 = 3x \qquad /:3$
$\boldsymbol{\dfrac{u-7}{3} = x}$</td></tr>
<tr><td><u>5. lépés</u>: Behelyettesítés.</td><td></td></tr>
<tr><td>$$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \int \frac{\frac{u-b}{a}}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{a}$$</td><td>$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+7}}\,dx = \int \frac{\frac{u-7}{3}}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{3}$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="6">IOSZ5</td><td><u>6. lépés</u>: Kiemelések, szorzások elvégzése.</td><td></td></tr>
<tr><td>$$\int \frac{\frac{u-b}{a}}{\sqrt{u}} \frac{du}{a} = \int \frac{u-b}{a^2\cdot\sqrt{u}}\, du =$$ $$\frac{1}{a^2}\cdot \int \frac{u-b}{\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{a^2}\int \frac{u-b}{\sqrt{u}}\, du =$$ $$\frac{1}{a^2}\cdot \int \frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{b}{\sqrt{u}}\, du =$$ $$= \frac{1}{a^2}\cdot \int \frac{u}{u^{\frac{1}{2}}} - \frac{b}{u^{\frac{1}{2}}}\, du =$$ $$= \frac{1}{a^2}\cdot \int \frac{u}{u^{\frac{1}{2}}} - \frac{b}{u^{\frac{1}{2}}}\, du =$$ $$\frac{1}{a^2}\cdot \int u^{\frac{1}{2}} - b\cdot u^{-\frac{1}{2}}\, du =$$</td><td>$$\int \frac{\frac{u-7}{3}}{\sqrt{u}} \frac{du}{3} = \int \frac{u-7}{3^2\cdot\sqrt{u}}\, du =$$ $$\frac{1}{9}\cdot \int \frac{u-7}{\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{9}\int \frac{u-7}{\sqrt{u}}\, du =$$ $$\frac{1}{9}\cdot \int \frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{7}{\sqrt{u}}\, du =$$ $$= \frac{1}{9}\cdot \int \frac{u}{u^{\frac{1}{2}}} - \frac{7}{u^{\frac{1}{2}}}\, du =$$ $$\frac{1}{9}\cdot \int u^{\frac{1}{2}} - 7u^{-\frac{1}{2}}\, du$$</td></tr>
<tr><td><u>7. lépés</u>: Az integrálás most már elvégezhető.</td><td></td></tr>
<tr><td>$$\frac{1}{a^2}\cdot \int u^{\frac{1}{2}} - b\cdot u^{-\frac{1}{2}}\, du =$$ $$\frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - b\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2\cdot u^{\frac{3}{2}}}{3a^2} - \frac{b\cdot 2\cdot u^{\frac{1}{2}}}{a^2}$$</td><td>$$\frac{1}{9}\cdot \int u^{\frac{1}{2}} - 7u^{-\frac{1}{2}}\, du =$$ $$\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 7\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2\cdot u^{\frac{3}{2}}}{3\cdot 9} - \frac{7\cdot 2\cdot u^{\frac{1}{2}}}{9} =$$ $$= \frac{2\cdot u^{\frac{3}{2}}}{27} - \frac{14\cdot u^{\frac{1}{2}}}{9}$$</td></tr>
<tr><td><u>8. lépés</u>: Az <u>1. lépésben</u> lévő egyenlet visszahelyettesítése u helyére.</td><td></td></tr>
<tr><td>$$\frac{2\cdot(ax+b)^{\frac{3}{2}}}{3a^2} - \frac{b\cdot 2\cdot(ax+b)^{\frac{1}{2}}}{a^2} + c$$</td><td>$$\boldsymbol{\frac{2\cdot(3x+7)^{\frac{3}{2}}}{27} - \frac{14\cdot(3x+7)^{\frac{1}{2}}}{9} + c}$$</td></tr>
</table>

Határozott integrálás

Határozott integrálás	Példák
$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$	$\int_2^4 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{256}{4} - \frac{16}{4} = 64 - 4 = \mathbf{60}$

Impropius integrálás

Szabály	Példák
$\boldsymbol{\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$ $\boldsymbol{\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$	$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b x^{-2}\,dx =$ $= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^b =$ $= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{2}}$
	$\int_{-\infty}^{-1} \frac{3}{x^3}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1} \frac{3}{x^3}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(3\cdot\int_a^{-1}\frac{1}{x^3}\,dx\right) =$ $= \lim_{a\to-\infty}\left(3\cdot\int_a^{-1} x^{-3}\,dx\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(3\cdot\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_a^{-1}\right) =$ $= \lim_{a\to-\infty}\left(3\cdot\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_a^{-1}\right) =$ $= \lim_{a\to-\infty}\left(3\cdot\left(-\frac{1}{2(-1)^2} - \left(-\frac{1}{2a^2}\right)\right)\right) =$ $= \lim_{a\to-\infty}\left(3\cdot\left(-\frac{1}{21} - \left(-\frac{1}{2a^2}\right)\right)\right) =$ $= \lim_{a\to-\infty}\left(3\cdot\left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2a^2}\right)\right)\right) =$ $= \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2a^2}\right)\right) =$ $= \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2a^2}\right) = -\mathbf{\frac{3}{2}}$