Integrálás alkalmazásai

Területszámítás

Lépések	Példák
$\boldsymbol{T = \left\| \int_a^b f(x) - g(x)\, dx \right\|}$	
Adott $f(x)$ és $g(x)$ függvények, szeretnénk meghatározni az általuk bezárt terület nagyságát.	$f(x) = x^2 - 4x + 8$ $g(x) = x + 4$
<u>1. lépés</u>: A két függvényt egyenlővé tesszük egymással és megoldjuk az egyenletet, ez az esetek 90%-ban egy másodfokú egyenlet lesz, amiből két megoldást fogunk kapni. A kapott két megoldás lesz az integrálási tartomány (a, b).	
$f(x) = g(x)$ $x_1 = \cdots (= a)$ $x_2 = \cdots (= b)$	$x^2 - 4x + 8 = x + 4$ $x^2 - 4x + 8 = x + 4 \quad /-x$ $x^2 - 5x + 8 = 4 \quad /-4$ $x^2 - 5x + 4 = 0 \quad /Másodfokú\ megoldók.$ $\boldsymbol{x_1 = 1 (= a)}$ $\boldsymbol{x_2 = 4 (= b)}$
<u>2. lépés</u>: Alkalmazzuk a korábban felírt képletet: $T = \left\| \int_a^b f(x) - g(x)\, dx \right\|$ ”a” mindig a két megoldás közül a kisebb, ”b” pedig a nagyobb lesz.	$T = \left\| \int_1^4 x^2 - 4x + 8 - (x + 4)\, dx \right\|$
<u>3. lépés</u>: Elvégezzük a kivonást $(f(x) - g(x))$, legtöbbször itt is egy másodfokú kifejezést fogunk kapni, Jelöljük ezt $h(x)$-el. $(h(x) = f(x) - g(x))$	
$T = \left\| \int_a^b h(x)\, dx \right\|$	$T = \left\| \int_1^4 x^2 - 5x + 4\, dx \right\|$

4. lépés: Integráljuk $h(x)$-et az $[a, b]$ tartományon, a kapott végeredmény lesz a két függvény által bezárt terület.	
$T = \left\lvert \int_a^b h(x)\,dx \right\rvert = \lvert [H(x)]_a^b \rvert = \lvert H(b) - H(a) \rvert$	$T = \left\lvert \left[\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 4x \right]_1^4 \right\rvert =$ $= \left\lvert \frac{4^3}{3} - 5 \cdot \frac{4^2}{2} + 44 - \left(\frac{1^3}{3} - 5 \cdot \frac{1^2}{2} + 41 \right) \right\rvert =$ $= \left\lvert \frac{64}{3} - 5 \cdot \frac{16}{2} + 16 - \left(\frac{1}{3} - 5 \cdot \frac{1}{2} + 4 \right) \right\rvert =$ $= \left\lvert \frac{64}{3} - 5 \cdot 8 + 16 - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 \right) \right\rvert =$ $= \left\lvert \frac{64}{3} - 40 + 16 - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 \right) \right\rvert =$ $= \left\lvert \frac{64}{3} - 40 + 16 - \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4 \right\rvert =$ $= \left\lvert \frac{63}{3} + \frac{5}{2} - 28 \right\rvert = \left\lvert 21 + \frac{5}{2} - 28 \right\rvert =$ $= \left\lvert \frac{5}{2} - 7 \right\rvert = \left\lvert \frac{5}{2} - \frac{14}{2} \right\rvert = \left\lvert -\frac{9}{2} \right\rvert = \boldsymbol{\frac{9}{2}}$

Térfogatszámítás

Lépések	Példák
$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$	Számítsuk ki az $f(x) = x + 3$ függvény x tengely körüli megforgatásával kapott test térfogatát az $[1; 4]$ intervallumon. $f^2(x) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ $V = \pi \cdot \int_1^4 x^2 + 6x + 9\,dx =$ $= \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} + 9x \right]_1^4 =$ $= \pi \cdot \left(\frac{4^3}{3} + 6 \cdot \frac{4^2}{2} + 9 \cdot 4 - \left(\frac{1^3}{3} + 6 \cdot \frac{1^2}{2} + 9 \cdot 1 \right) \right) =$ $= \pi \cdot \left(\frac{64}{3} + 6 \cdot \frac{16}{2} + 36 - \left(\frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 9 \right) \right) =$ $= \pi \cdot \left(\frac{64}{3} + 48 + 36 - \frac{1}{3} - 3 - 9 \right) =$ $= \pi \cdot \left(\frac{63}{3} + 72 \right) = \pi \cdot (21 + 72) = \boldsymbol{93\pi}$

Átlagszámítás

Lépések	Példák
$\overline{f}(x) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$	Számítsuk ki az $f(x) = x^3$ függvény átlagát a $[2; 4]$ intervallumon. $\overline{f}(x) = \dfrac{\int_2^4 x^3\,dx}{4-2} = \dfrac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^4}{2} = \dfrac{\frac{4^4}{4}-\frac{2^4}{4}}{2} = \dfrac{\frac{256}{4}-\frac{16}{4}}{2} =$ $= \dfrac{64-4}{2} = \dfrac{60}{2} = \mathbf{30}$

Ívhossz számítás

Lépések	Példák
$l = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$	Számítsuk ki az $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ függvény ívhosszát a $[0; 3]$ intervallumon. $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ $(f'(x))^2 = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{9}{4}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{9}{4}x$ $l = \int\limits_0^3 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \int\limits_0^3 \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx$ **ISZ5** alapján: $\int\limits_0^3 \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\dfrac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}}\right]_0^3 =$ $\left[\dfrac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{27}{8}}\right]_0^3 = \left[\frac{8}{27}\cdot\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 =$ $= \frac{8}{27}\cdot\left(1+\frac{9}{4}\cdot 3\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{8}{27}\cdot\left(1+\frac{9}{4}\cdot 0\right)^{\frac{3}{2}}\right) =$ $= \frac{8}{27}\cdot\left(1+\frac{27}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{8}{27}\cdot(1+0)^{\frac{3}{2}}\right) =$ $= \frac{8}{27}\cdot\left(\frac{4}{4}+\frac{27}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{8}{27}\cdot 1^{\frac{3}{2}}\right) =$ $= \frac{8}{27}\cdot\left(\frac{31}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{8}{27}\cdot 1\right) =$ $= \frac{8}{27}\cdot\left(\frac{31}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{8}{27}\right) = \boldsymbol{\frac{8}{27}\cdot\left(\left(\frac{31}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)}$

Lemez súlypont számítás

<table>
<tr><th>Lépések</th><th>Példák</th></tr>
<tr><td></td><td>Számítsuk ki az $f(x) = 2x - 1$ függvény és az x tengely által bezárt lemez súlypontját a $[2; 5]$ intervallumon.
Első lépésként számítsuk ki a 3 integrálást.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">

$$x_s = \frac{\int_a^b x\cdot f(x)\ dx}{\int_a^b f(x)\ dx}$$

$$y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\ dx}{\int_a^b f(x)\ dx}$$

</td><td>

$$\int_a^b x\cdot f(x)\ dx = \int_2^5 x\cdot(2x-1)\ dx =$$

$$= \int_2^5 2x^2 - x\ dx = \left[2\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_2^5 =$$

$$= 2\cdot\frac{5^3}{3}-\frac{5^2}{2}-\left(2\cdot\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{125}{3}-\frac{25}{2}-\left(2\cdot\frac{8}{3}-\frac{4}{2}\right) = \frac{250}{3}-\frac{25}{2}-\left(\frac{16}{3}-\frac{4}{2}\right) =$$

$$= \frac{250}{3}-\frac{25}{2}-\frac{16}{3}+\frac{4}{2} = \frac{234}{3}-\frac{21}{2} = 78-10{,}5 = \mathbf{67,5}$$

</td></tr>
<tr><td>

$$\int_a^b f^2(x)\ dx = \int_2^5 (2x-1)^2\ dx =$$

$$= \int_2^5 4x^2-4x+1\ dx = \left[4\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+x\right]_2^5 =$$

$$= 4\cdot\frac{5^3}{3}-4\cdot\frac{5^2}{2}+5-\left(4\cdot\frac{2^3}{3}-4\cdot\frac{2^2}{2}+2\right) =$$

$$= 4\cdot\frac{125}{3}-4\cdot\frac{25}{2}+5-\left(4\cdot\frac{8}{3}-4\cdot\frac{4}{2}+2\right) =$$

$$= \frac{500}{3}-\frac{100}{2}+5-\left(\frac{32}{3}-\frac{16}{2}+2\right) =$$

$$= \frac{500}{3}-50+5-\left(\frac{32}{3}-8+2\right) =$$

$$= \frac{500}{3}-50+5-\frac{32}{3}+8-2 = \frac{468}{3}-39 =$$

$$= 156-39 = \mathbf{117}$$

</td></tr>
<tr><td>

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_2^5 2x-1\ dx = \left[2\cdot\frac{x^2}{2}-x\right]_2^5 =$$

$$= 2\cdot\frac{5^2}{2}-5-\left(2\cdot\frac{2^2}{2}-2\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{25}{2}-5-\left(2\cdot\frac{4}{2}-2\right) =$$

$$= 25-5-(4-2) = 25-5-4+2 = \mathbf{18}$$

</td></tr>
</table>

	Ezután a kapott értékeket helyettesítsük be a képletekbe. $$\boldsymbol{x_s} = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)\ dx}{\int_a^b f(x)\ dx} = \frac{67{,}5}{18} = \mathbf{3,75}$$ $$\boldsymbol{y_s} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b f^2(x)\ dx}{\int_a^b f(x)\ dx} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 117}{18} = \frac{58{,}5}{18} = \mathbf{3,25}$$ **Súlypont:** $\boldsymbol{P}\ (\mathbf{3,75; 3,25})$

Ív súlypont számítás

Lépések	Példák
$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx}$$ $$y_s = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx}$$	Számítsuk ki az $f(x) = 3x$ függvény 1 és 3 pontok által határolt ív súlypontját. Első lépésként deriváljuk a függvényt, és emeljük négyzetre, majd számítsuk ki a 3 integrálást. $$f'(x) = 3$$ $$(f'(x))^2 = 3^2 = 9$$
	$$\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\ dx = \int_1^3 x \cdot \sqrt{1+9}\ dx =$$ $$= \int_1^3 x \cdot \sqrt{10}\ dx = \sqrt{10} \cdot \int_1^3 x\ dx =$$ $$= \sqrt{10} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \sqrt{10} \cdot \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \sqrt{10} \cdot \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$ $$= \sqrt{10} \cdot \frac{8}{2} = \mathbf{4 \cdot \sqrt{10}}$$
	$$\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\ dx = \int_1^3 f(x) \cdot \sqrt{1+9}\ dx =$$ $$= \int_1^3 3x \cdot \sqrt{10}\ dx = 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \int_1^3 x\ dx =$$ $$= 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) =$$ $$= 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$ $$= 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{8}{2} = 3 \cdot \sqrt{10} \cdot 4 = \mathbf{12 \cdot \sqrt{10}}$$

	$$\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx = \int_1^3 \sqrt{1+9}\ dx =$$ $$= \int_1^3 \sqrt{10}\ dx = \sqrt{10}\cdot\int_1^3 1\ dx = \sqrt{10}\cdot[x]_1^3 =$$ $$\sqrt{10}\cdot(3-1) = \mathbf{2\cdot\sqrt{10}}$$
	Ezután a kapott értékeket helyettesítsük be a képletekbe. $$\boldsymbol{x_s} = \frac{\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx} = \frac{4\cdot\sqrt{10}}{2\cdot\sqrt{10}} = \mathbf{2}$$ $$\boldsymbol{y_s} = \frac{\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx} = \frac{12\cdot\sqrt{10}}{2\cdot\sqrt{10}} = \mathbf{6}$$ **Súlypont:** $\boldsymbol{P\ (2;6)}$

Forgástest súlypont számítás

Lépések	Példák
$$x_s = \frac{\int_a^b x\cdot f^2(x)\ dx}{\int_a^b f^2(x)\ dx}$$ $$y_s = 0$$	Az $f(x) = x^2$ függvényt x tengely körül megforgatjuk. Számítsuk ki az így keletkezett forgástest súlypontját az $[1;3]$ intervallumon. Első lépésként számítsuk ki a 2 integrálást:
	$$\int_a^b x\cdot f^2(x)\ dx = \int_1^3 x\cdot(x^2)^2\ dx = \int_1^3 x\cdot x^4\ dx =$$ $$= \int_1^3 x^5\ dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_1^3 = \frac{3^6}{6} - \frac{1^6}{6} = \frac{729}{6} - \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{728}{6}}$$
	$$\int_a^b f^2(x)\ dx = \int_a^b (x^2)^2\ dx = \int_1^3 x^4\ dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^3 =$$ $$= \frac{3^5}{5} - \frac{1^5}{5} = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{242}{5}}$$
	Ezután a kapott értékeket helyettesítsük be a képletbe: $$\boldsymbol{x_s} = \frac{\int_a^b x\cdot f^2(x)\ dx}{\int_a^b f^2(x)\ dx} = \frac{\frac{728}{6}}{\frac{242}{5}} = \frac{728}{6}\cdot\frac{5}{242} = \mathbf{\frac{3640}{1452}}$$ **Súlypont:** $\boldsymbol{P\left(\frac{3640}{1452};0\right)}$

Felszín számítás

Lépések	Példák
$A = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$	Számítsuk ki az $f(x) = x^3$ függvény x tengely körüli megforgatásával kapott test felszínét a $[1; 2]$ intervallumon. Első lépésként deriváljuk a függvényt, és emeljük négyzetre. $f'(x) = 3x^2$ $(f'(x))^2 = (3x^2)^2 = 9x^4$ Ezután helyettesítsük be a képletbe. $A = 2\pi \cdot \int_1^2 x^3 \cdot \sqrt{1+9x^4}\,dx =$ $= 2\pi \cdot \int_1^2 x^3 \cdot (1+9x^4)^{\frac{1}{2}}\,dx =$ **ISZSZ2**-t alkalmazhatjuk, kis trükk segítségével. $= 2\pi \cdot \frac{1}{9\cdot 4} \cdot \int_1^2 9 \cdot 4x^3 \cdot (1+9x^4)^{\frac{1}{2}}\,dx =$ $= 2\pi \cdot \frac{1}{36} \cdot \int_1^2 36x^3 \cdot (1+9x^4)^{\frac{1}{2}}\,dx =$ $= \frac{2\pi}{36} \cdot \left[\frac{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 =$ $= \frac{\pi}{18} \cdot \left[\frac{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{\pi}{18} \cdot \left[\frac{2}{3}(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 =$ $= \frac{\pi}{18} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (1+9\cdot 2^4)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3} \cdot (1+9\cdot 1^4)^{\frac{3}{2}}\right)\right) =$ $= \frac{\pi}{18} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (1+9\cdot 16)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3} \cdot (1+9\cdot 1)^{\frac{3}{2}}\right)\right) =$ $= \frac{\pi}{18} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (1+144)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3} \cdot (1+9)^{\frac{3}{2}}\right)\right) =$ $= \frac{\pi}{18} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(145^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}}\right) = \boldsymbol{\frac{2\pi}{54} \cdot \left(145^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}}\right)}$