Kétváltozós függvények

Lokális szélsőértékek meghatározása

Lépések	Példa
<u>1. lépés</u>: Az elsőrendű parciális deriváltak meghatározása:	$f(x,y) = 5 - 54y^3 + 36y^2 + x^2 - 6xy$
$\boldsymbol{f'_x(x,y)}$ $\boldsymbol{f'_y(x,y)}$	$\boldsymbol{f'_x(x,y) = 2x - 6y}$ $\boldsymbol{f'_y(x,y) = -162y^2 + 72y - 6x}$
<u>2. lépés</u>: Az elsőrendű parciális deriváltakat 0-val tesszük egyenlővé:	
$f'_x(x,y) = 0$ $f'_y(x,y) = 0$	$2x - 6y = 0$ $-162y^2 + 72y - 6x = 0$
<u>3. lépés</u>: Megoldjuk az egyenletrendszert, így megkapjuk a lehetséges szélsőértékek helyét:	
$\left.\begin{matrix} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{matrix}\right\}$ $P_1(P_{1x};P_{1y}), P_2(P_{2x};P_{2y})$ ...	$2x - 6y = 0 \rightarrow 2x = 6y \rightarrow \boldsymbol{x = 3y}$ $-162y^2 + 72y - 6x = 0$ $x = 3y\ behelyettesítése\ a\ második\ egyenletbe$: $-162y^2 + 72y - 6(3y) = 0$ $-162y^2 + 72y - 18y = 0$ $-162y^2 + 54y = 0$ $54y(-3y + 1) = 0$ $\boldsymbol{y_1 = 0} \rightarrow \boldsymbol{x_1} = 3y_1 = \boldsymbol{0} \rightarrow \boldsymbol{P_1(0;0)}$ $\boldsymbol{y_2 = \frac{1}{3}} \rightarrow \boldsymbol{x_2} = 3y_2 = \boldsymbol{1} \rightarrow \boldsymbol{P_2\left(1;\frac{1}{3}\right)}$
<u>4. lépés</u>: A másodrendű parciális deriváltak meghatározása:	
$\boldsymbol{f''_{xx}(x,y)}$ $\boldsymbol{f''_{yy}(x,y)}$ $\boldsymbol{f''_{xy}(x,y)}$ $\boldsymbol{f''_{yx}(x,y)}$	$\boldsymbol{f''_{xx}(x,y) = 2}$ $\boldsymbol{f''_{yy}(x,y) = -324y + 72}$ $\boldsymbol{f''_{xy}(x,y) = -6}$ $\boldsymbol{f''_{yx}(x,y) = -6}$
<u>5. lépés</u>: Felírjuk az alábbi képletet:	
$\boldsymbol{f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - f''_{xy}(x,y) \cdot f''_{yx}(x,y)}$	$f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - f''_{xy}(x,y) \cdot f''_{yx}(x,y) =$ $= 2 \cdot (-324y + 72) - (-6) \cdot (-6)$
<u>6. lépés</u>: A 3. lépésben kapott P_1 pont koordinátáit behelyettesítjük az előbb felírt képletbe	
$f''_{xx}(P_{1x};P_{1y}) \cdot f''_{yy}(P_{1x};P_{1y}) - f''_{xy}(P_{1x};P_{1y}) \cdot f''_{yx}(P_{1x};P_{1y})$	$P_1(0;0)$ $2 \cdot (-324 \cdot 0 + 72) - (-6) \cdot (-6) =$ $= 2 \cdot 72 - (-6) \cdot (-6) = 144 - 36 = \boldsymbol{108}$

7. lépés: Az előző lépésben kapott számérték pozitív vagy negatív lehet: • Ha negatív, akkor a P_1 pont **Nyeregpont** lesz. • Ha pozitív:	A kapott számérték pozitív, ezért megyünk a 8. lépésre.
8. lépés: Megnézzük, hogy $f''_{xx}(P_{1x};P_{1y})$ pozitív vagy negatív-e: • Ha negatív, akkor a P_1 pont **Lokális maximum** lesz. • Ha pozitív, akkor a P_1 pont **Lokális minimum** lesz.	Mivel $f''_{xx}(0;0)=2$,ezért $\boldsymbol{P_1(0;0)}$ **pont Lokális minimum lesz.**
9. lépés: Ha kaptunk P_2 pontot is, akkor a 6. lépéstől megismételjük a lépéseket P_2 pont koordinátáit behelyettesítve:	
$f''_{xx}(P_{2x};P_{2y})f''_{yy}(P_{2x};P_{2y})-f''_{xy}(P_{2x};P_{2y})f''_{yx}(P_{2x};P_{2y})$	$P_2\left(1;\frac{1}{3}\right)$ $=2\cdot\left(-324\cdot\frac{1}{3}+72\right)-(-6)\cdot(-6)=$ $=2\cdot(-108+72)-(-6)\cdot(-6)=$ $=2\cdot(-36)-(-6)(-6)=$ $=(-72)-36=\mathbf{-108}$
10. lépés: Az előző lépésben kapott számérték pozitív vagy negatív lehet: • Ha negatív, akkor a P_2 pont **Nyeregpont** lesz. • Ha pozitív:	A kapott számérték negatív, ezért $\boldsymbol{P_2\left(1;\frac{1}{3}\right)}$ **pont Nyeregpont lesz.**
11. lépés: Megnézzük, hogy $f''_{xx}(P_{2x};P_{2y})$ pozitív vagy negatív-e: • Ha negatív, akkor a P_2 pont **Lokális maximum** lesz. • Ha pozitív, akkor a P_2 pont **Lokális minimum** lesz.	Mivel negatív lett a 9. lépésben kapott érték, ezért ezt nem kell elvégezni.
12. lépés: Ha feladat kérdezi a lokális szélső értékek értékét, akkor az eredeti $f(x,y)$-ba behelyettesítjük a kapott pontok x és y koordinátáit.	$f(x,y)=5-54y^3+36y^2+x^2-6xy$ $\boldsymbol{P_1(0;0)}$**:** $\boldsymbol{f(0,0)}=5-54\cdot 0^3+36\cdot 0^2+0^2-6\cdot 0\cdot 0=\mathbf{5}$ $\boldsymbol{P_2\left(1;\frac{1}{3}\right)}$**:** $\boldsymbol{f\left(1;\frac{1}{3}\right)}=5-54\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+36\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+1^2-6\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=$ $=5-54\cdot\frac{1}{27}+36\cdot\frac{1}{9}+1-61\cdot\frac{1}{3}=$ $=5-2+4+1-2=\mathbf{6}$