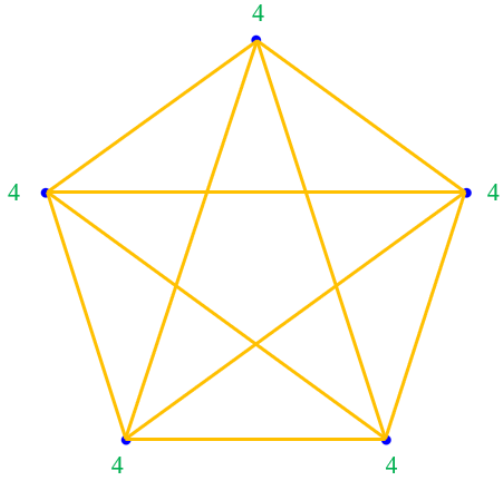


# Halmazok, Gráfok

## Gráfok részei



Csúcs (pont)

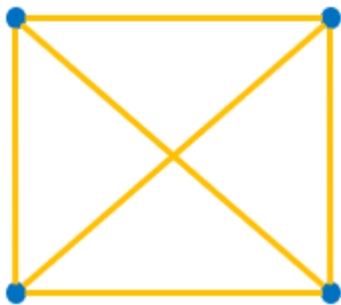
Él: A csúcsokat összekötő vonalak

Fokszám: A csúcsból kiinduló élek száma

Fokszámok összege =  $2 \cdot$  élek száma

$n$  csúcsú gráf éleinek a száma:  $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$

## Gráfok típusai

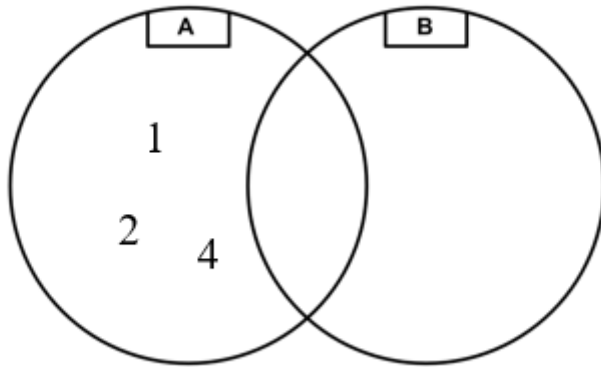


**Teljes gráf:** Ha bármely két pontja össze van kötve egy éllel.

## Számok jelölése a számegyenesen, függvények grafikonján

Algebrai jelölés	Halmaz jelölés	Jelölés a számegyenesen
$2 \leq x \leq 5$ Első elem: 2 Utolsó elem: 5	$[2; 5]$	
$2 < x < 5$ Első elem: 2,0001 Utolsó elem: 4,9999	$]2; 5[$	
$2 < x \leq 5$ Első elem: 2,0001 Utolsó elem: 5	$]2; 5]$	
$2 \leq x < 5$ Első elem: 2 Utolsó elem: 4,9999	$[2; 5[$	

## Halmazok típusai



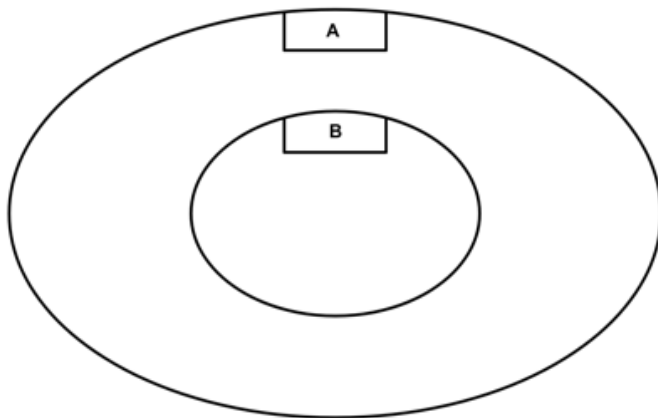
$$A = \{1; 2; 4\}$$

$$B = \{\emptyset\}$$

**B üres halmaz**

$$B = \{\emptyset\}$$

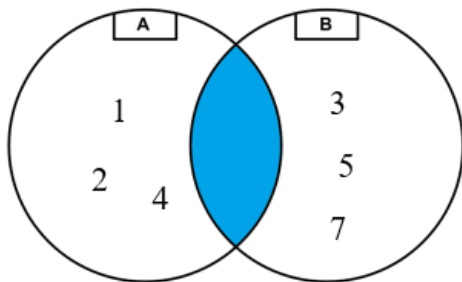
Üres halmaz jele:  $\emptyset$



**Részhalmaz**

*B halmaz A részhalmaza*

Részhalmaz jele:  $B \subseteq A$



$$A = \{1; 2; 4\}$$

$$B = \{3; 5; 7\}$$

## Részalmazok

$$A = \{1; 2; 3\}$$

A halmaz részalmazai:

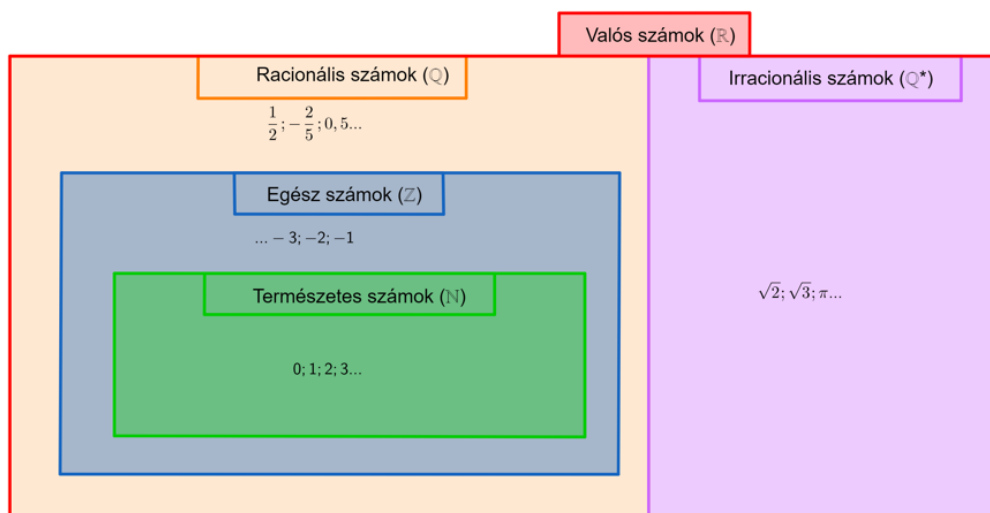
0 elemű:  $\{\emptyset\}$

1 elemű:  $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

2 elemű:  $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}$

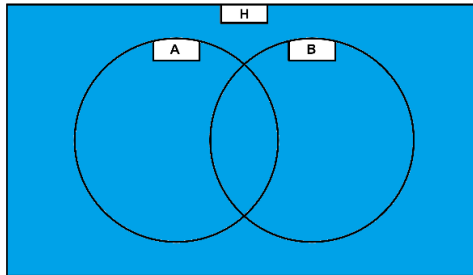
3 elemű:  $\{1; 2; 3\}$

## Számalmazok



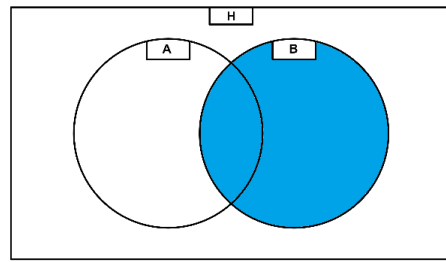
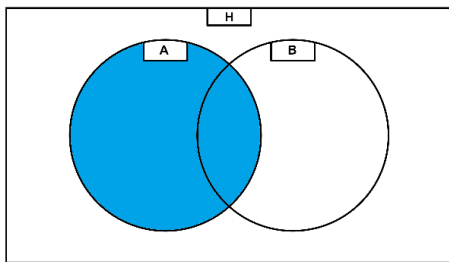
# Halmaz műveletek 2 halmaz esetén

Alaphalmaz ( $H$  vagy  $U$ )



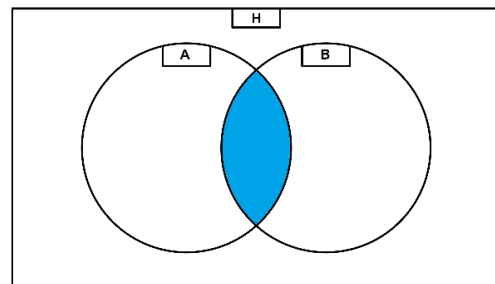
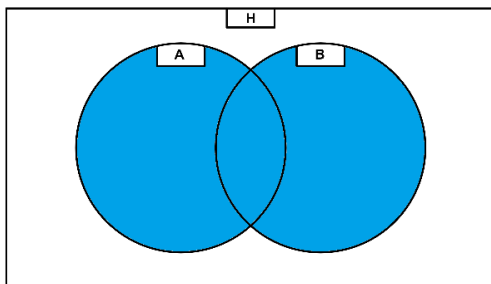
$A$

$B$

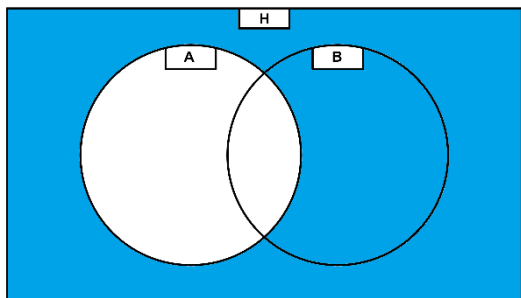


Unió ( $A \cup B$ )

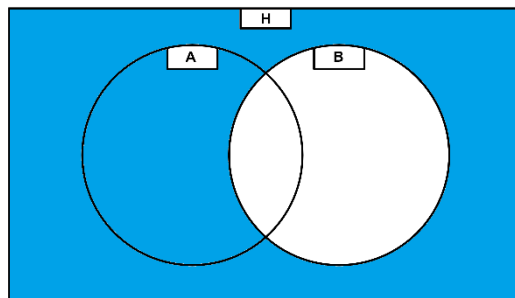
Metszet ( $A \cap B$ )



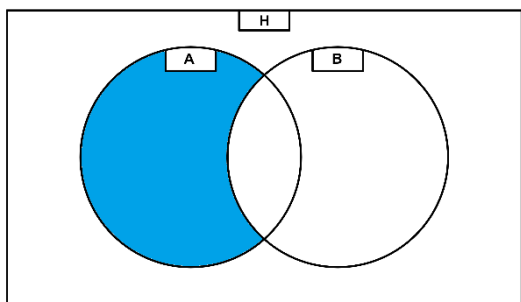
**A komplementer ( $\bar{A}$ )**



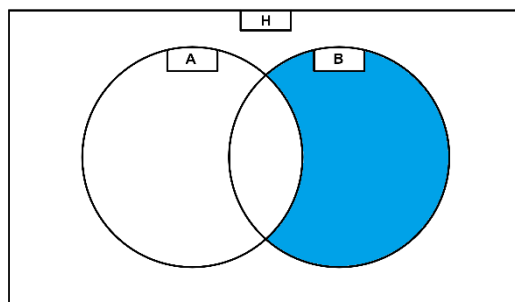
**B komplementer ( $\bar{B}$ )**



**A különbség B ( $A \setminus B$ )**

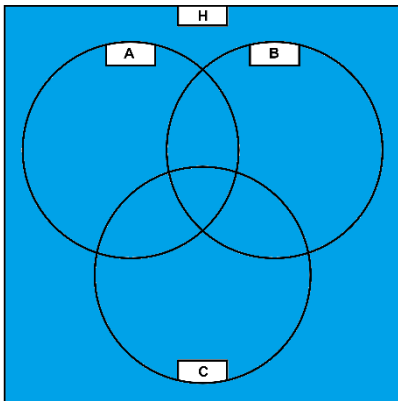


**B különbség A ( $B \setminus A$ )**

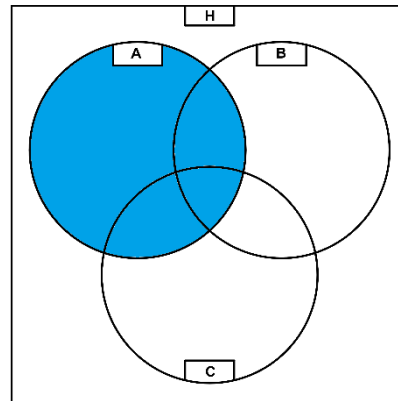


# Halmaz műveletek 3 halmaz esetén

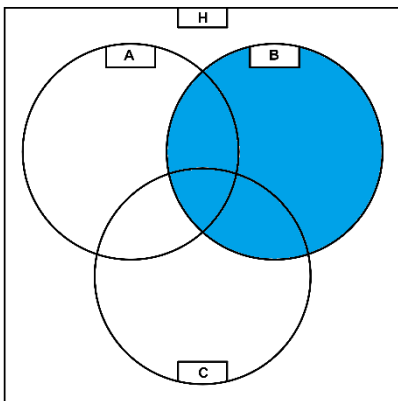
***H***



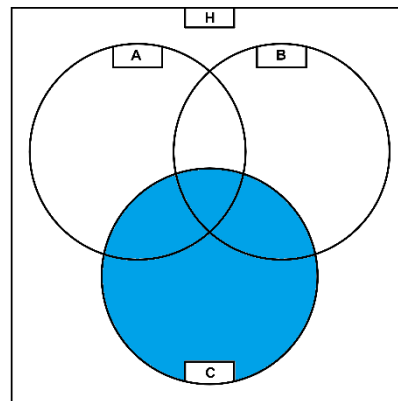
***A***



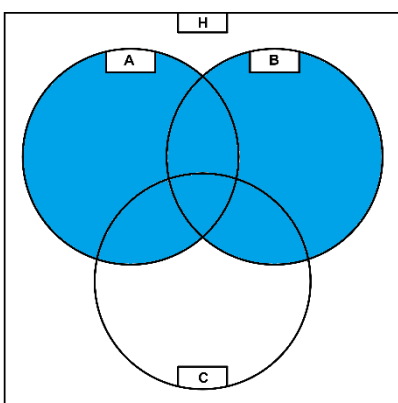
***B***



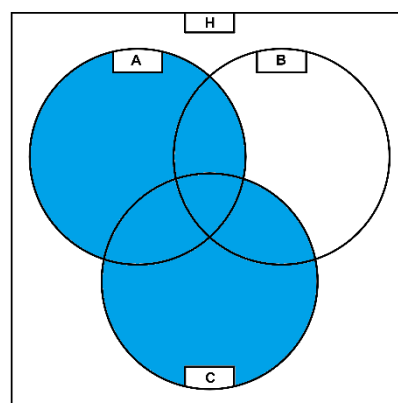
***C***



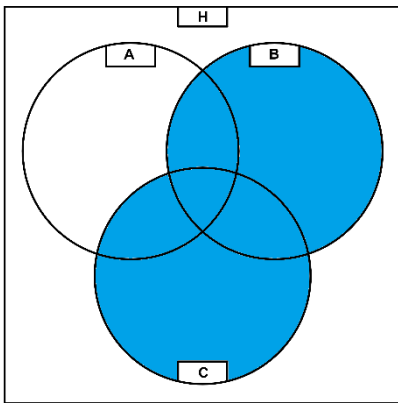
***A* unió *B* ( $A \cup B$ )**



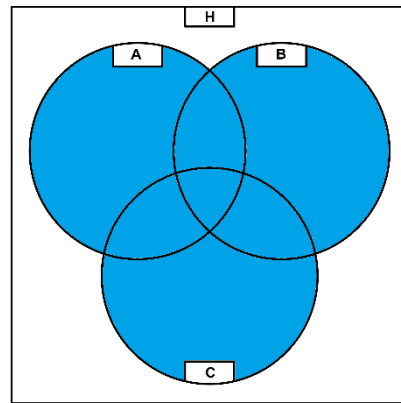
***A* unió *C* ( $A \cup C$ )**



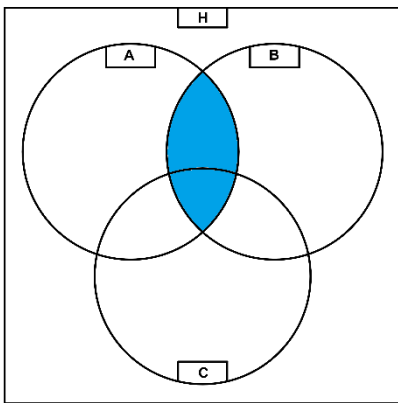
***B* unió *C* ( $B \cup C$ )**



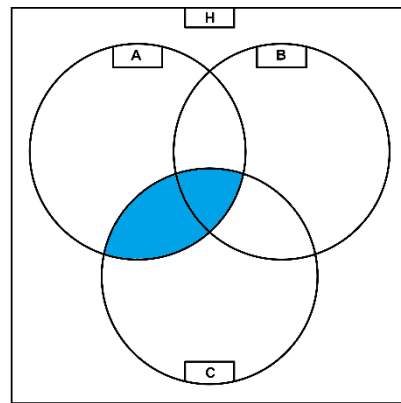
***A* unió *B* unió *C* ( $A \cup B \cup C$ )**



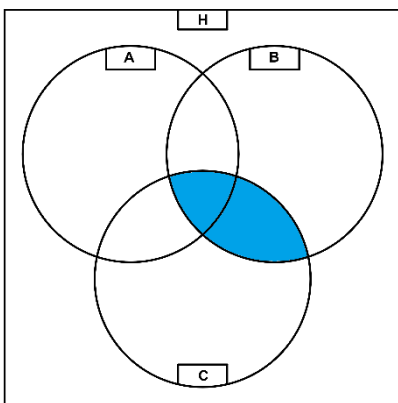
***A* metszet *B* ( $A \cap B$ )**



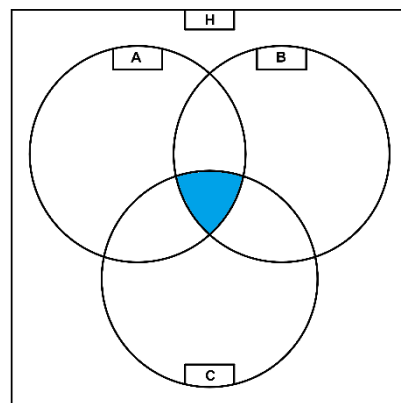
***A* metszet *C* ( $A \cap C$ )**



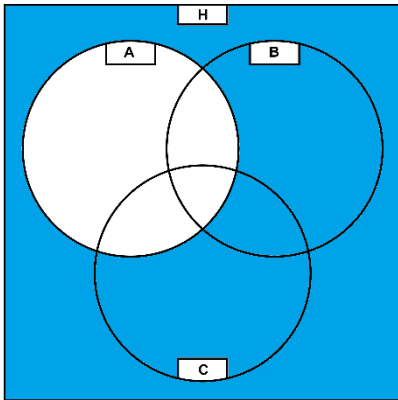
***B* metszet *C* ( $B \cap C$ )**



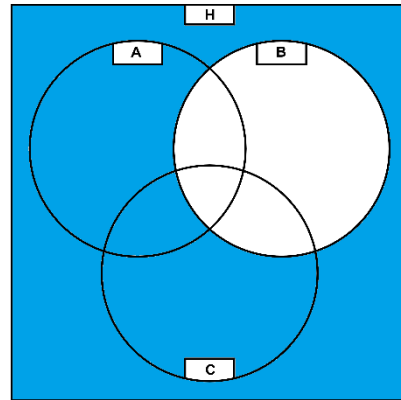
***A* metszet *B* metszet *C* ( $A \cap B \cap C$ )**



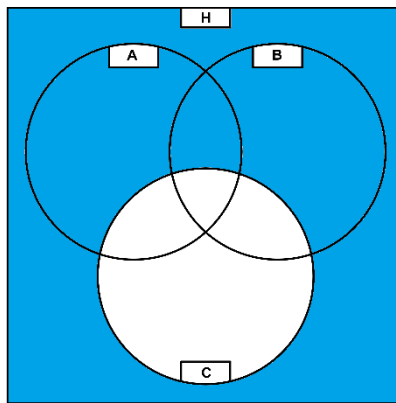
**A komplementer ( $\bar{A}$ )**



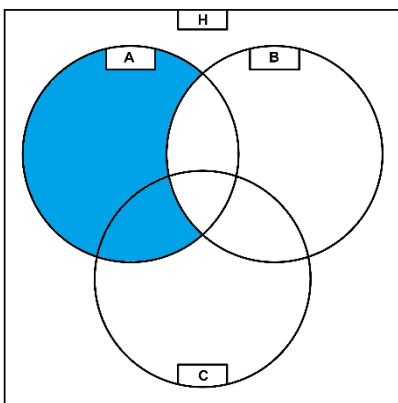
**B komplementer ( $\bar{B}$ )**



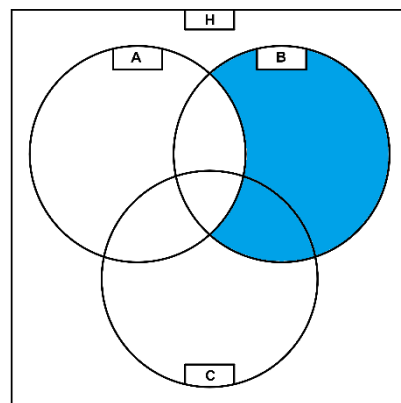
**C komplementer ( $\bar{C}$ )**



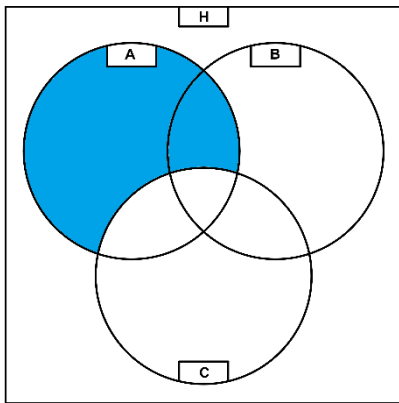
**A különbség B ( $A \setminus B$ )**



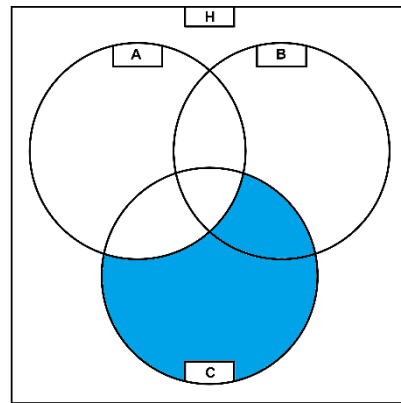
**B különbség A ( $B \setminus A$ )**



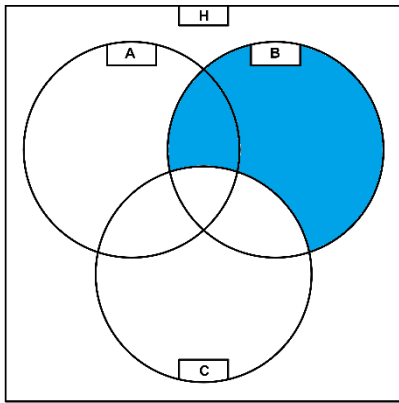
**A különbség C ( $A \setminus C$ )**



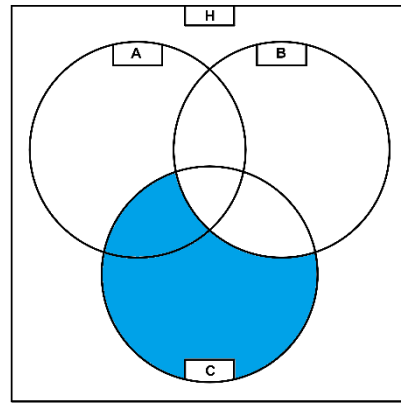
**C különbség A ( $C \setminus A$ )**



**B különbség C ( $B \setminus C$ )**



**C különbség B ( $C \setminus B$ )**



# Arányosság, százalékszámítás

## Racionális számok

Tört alak	Tizedes tört alak
$\frac{1}{2}$	0,5
$\frac{1}{3}$	$0,\dot{3} = 0,333333$
$\frac{1}{4}$	0,25
$\frac{1}{5}$	0,2
$\frac{1}{6}$	$0,1\dot{6} = 0,166666$
$\frac{1}{8}$	0,125
$\frac{1}{9}$	$0,\dot{1} = 0,111111$
$\frac{1}{10}$	0,1
$\frac{1}{100}$	0,01

## Arányosságok

Egyenes arányosság	Fordított arányosság
<p>Ha az egyik oszlopot <b>szorozzuk</b> egy számmal a másikat is ugyanazzal a számmal <b>szorozzuk</b></p> <p>Ha az egyik oszlopot <b>osztjuk</b> egy számmal a másikat is ugyanazzal a számmal <b>osztjuk</b></p> <p>Esetek nagy részében</p> <p>Példák: Bolt, vásárlás</p>	<p>Ha az egyik oszlopot <b>szorozzuk</b> egy számmal a másikat ugyanazzal a számmal <b>osztjuk</b></p> <p>Ha az egyik oszlopot <b>osztjuk</b> egy számmal a másikat ugyanazzal a számmal <b>szorozzuk</b></p> <p>Esetek kis részében</p> <p>Példák: munka, takarítás, díszítés, kert ásás</p>

## Százalékszámítás

$x$  szám  $y$  % –  $a$   $z$  lesz:

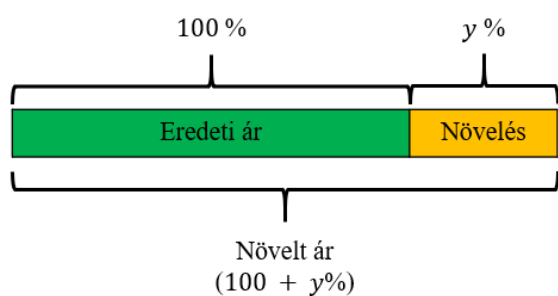
$$x \cdot \frac{y}{100} = z$$

Fajtái	Egy szám valahány %-a	Egy számnak a másik szám hány %-a	Egy szám melyik számnak a valahány %-a
Példa szövege	Pl.: Mennyi 120-nak a 25%-a?	Pl.: Hány százaléka 120-nak a 36?	Pl.: Melyik szám 40%-a 12?
Példa megoldása	$120 \cdot 0,25 = z$ <b>30 = z</b>	$120 \cdot y = 36$ $/: 120$ <b>y = 0,3 → 30%</b>	$x \cdot 0,4 = 12$ $/: 0,4$ <b>x = 30</b>

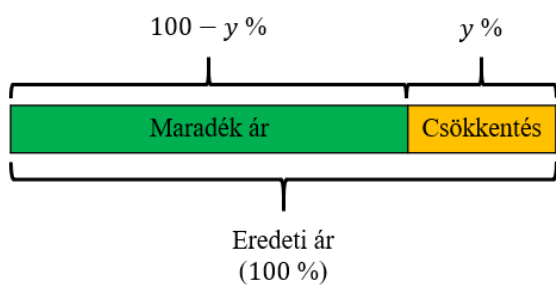
## Nevezetes százalékok

Százalék	Osztás / Szorzás
10 %	: 10
20 %	: 5
25 %	: 4
50 %	: 2
100%	· 1
200%	· 2
300%	· 3

Egy termék árát megnöveltük  $y$  százalékkal. Mennyi lesz az új ára?



Egy termék árát lecsökkentettük  $y$  százalékkal. Mennyi lesz az új ára?



# Oszthatóság, Prímtényező felbontás, LNKO, LKKT

## Oszthatósági szabályok

Egy szám osztható:

- 2-vel: Ha páros (utolsó számjegye 0 vagy 2 vagy 4 vagy 6 vagy 8).
- 3-mal: Ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.
- 4-gyel: Ha az utolsó két számjegyből képzett kétjegyű szám osztható 4-gyel.
- 5-tel: Ha az utolsó számjegye 0 vagy 5.
- 6-tal: Ha az osztható 2-vel és 3-mal is → Páros (utolsó számjegye 0 vagy 2 vagy 4 vagy 6 vagy 8) és számjegyeinek összege osztható 3-mal. Mind a két feltételnek teljesülnie kell, nem elég, ha csak 2-vel osztható, de 3-mal nem, vagy fordítva. Először mindig a 2-vel való oszthatóságot nézzük meg, mert az ránézésre látszik, ha nem páros a 3-mal való oszthatóságot felesleges megvizsgálnunk.
- 7-tel: Van rá szabály, de nagyon macerás, itt számológéppel megnézni, hogy osztható-e 7-tel.
- 8-cal: Ha az utolsó három számjegyből képzett háromjegyű szám osztható 8-cal.
- 9-cel: Ha számjegyeinek összege osztható 9-cel.
- 10-zel: Ha az utolsó számjegye 0.

## Prímtényező felbontás lépései

1. lépés: Páros? Ha igen, osszuk kettővel ameddig lehet.
2. lépés: Páratlan? Ha igen, nézzük meg osztható-e hárommal.
3. lépés: Osztható hárommal? Ha igen, osszuk ameddig lehet.
4. lépés: Ha hárommal már nem lehet osztani, próbálkozzunk öttel, és folytassuk ameddig lehet, majd így tovább a prímeikkel sorban.

## Legnagyobb közös osztó (LNKO)

- Először elvégezzük a két szám prímtényező felbontását
- Felírjuk a két számot prímtényezők szorzataként

**Legnagyobb közös osztó (LNKO):** Megkeressük azokat a számokat, amik mind a két számban megtalálhatók

## Legkisebb közös többszörös (LKKT)

- Először elvégezzük a két szám prímtényező felbontását
- Felírjuk a két számot prímtényező szorzataként

**Legkisebb közös többszörös (LKKT):** Az összes előforduló hatvány alapot összeszorozzuk, de mindegyiket a legnagyobb kitevőn

## Egyenletek

### Nevezetes szorzatok

Elnevezés	Azonosság	Példák
A1	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 9$
A2	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9$
A3	$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$	$(x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4$
		$x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$

### Egyenlet megoldásának lépései

1. lépés: Zárójel felbontása (ha van)
2. lépés: Tört nevezőjének eltüntetése (ha van)
3. lépés: Összevonás oldalanként
4. lépés:  $x$ -es tagok egy oldalra
5. lépés: Számok egy oldalra
6. lépés: Osztás  $x$  együtthatójával (ha van)
7. lépés: Ellenőrzés (ha szükséges)

## Szöveges feladat megoldásának lépései

1. lépés: Feladat szövegének elolvasása figyelmesen, szöveg értelmezése
2. lépés: Adatok kigyűjtése
3. lépés: Kérdés felírása
4. lépés: Ábra, táblázat készítése (ha szükséges)
5. lépés: Számítások felírása (egyenlet, nyitott mondat)
6. lépés: Becslés
7. lépés: Számítások elvégzése
8. lépés: A kapott eredmény összevetése a becsült értékkel
9. lépés: Szöveges válasz írása

## Egyszerűbb abszolútérték egyenletek megoldása megoldása

Pl.:  $|x + 3| = 5$

Végig gondoljuk, mi lehet az abszolútértéken belül, hogy az eredmény 5 legyen. Lehet 5 vagy  $-5$  az abszolútértéken belül. 5-nél csak annyi dolgunk van, hogy elhagyjuk az abszolútérték jelet, és megoldjuk az  $x + 3 = 5$  egyenletet,  $-5$ -nél pedig megoldjuk az  $x + 3 = -5$  egyenletet. Kilogikázni is ki lehet.

## Bonyolultabb abszolútérték egyenletek megoldása megoldása

Pl.:  $|2x + 3| = 5x - 7$

1. lépés: Az abszolútértéken belüli kifejezést egyenlővé tesszük 0-val, és megoldjuk az egyenletet
2. lépés: A kapott eredményt bejelöljük számegyenesen függőleges szaggatott vonallal, és megnézzük, hogy tőle jobbra lévő (nagyobb) és tőle balra lévő (kisebb) számok esetén milyen előjelű lesz az abszolútértéken belüli kifejezés, az esetek nagyrésztében jobbra lesznek pozitívak, balra pedig negatívak, de ez nem mindig van így (pl.:  $2 - x$ )
3. lépés: Megoldjuk az egyenletet, az első megoldásnál csak elhagyjuk az abszolútérték jelet, a második megoldásnál pedig vesszük a jobb oldali kifejezés ellentettjét (vehetjük

az abszolútértéken belüli kifejezés ellentettjét is), és megoldjuk az egyenletet, így kapunk két megoldást

4. lépés: A két megoldást bejelöljük a számegyenesen és megnézzük, hogy jók lesznek-e:
  - Akkor lesz jó az első megoldás, ha számegyenesen bejelölve a pozitív részre esik
  - Akkor lesz jó a második megoldás, ha számegyenesen bejelölve a negatív részre esik

## Függvények

### Függvények jellemzése

#### Értelmezési tartomány

- Jelölés: É.T. vagy  $D_f$
- Megadja, hogy a függvény milyen  $x$  értékek mentén van értelmezve (vízszintesen nézzük)
- Általában, minden  $x$ -re értelmezve vannak a függvények, de van pár kivétel is

#### Értékkészlet

- Jelölés: É.K vagy  $R_f$
- Megadja, hogy a függvény milyen  $y$  értékeket vehet fel (függőlegesen nézzük)
- Változó, van, ahol minden  $y$ -t felvehet a függvény, van, ahol csak nem negatív  $y$ -t vehet fel, van, ahol csak bizonyos  $y$ -t nem vehet fel

#### Zérushely

- Jelölés: Z.H.
- Megadja, hogy hol metszi a függvény az  $x$  tengelyt
- **0, 1, 2, vagy akár több zérus hely is lehet egy függvénynél**
- Ha tudjuk leolvassuk az ábrázolás után

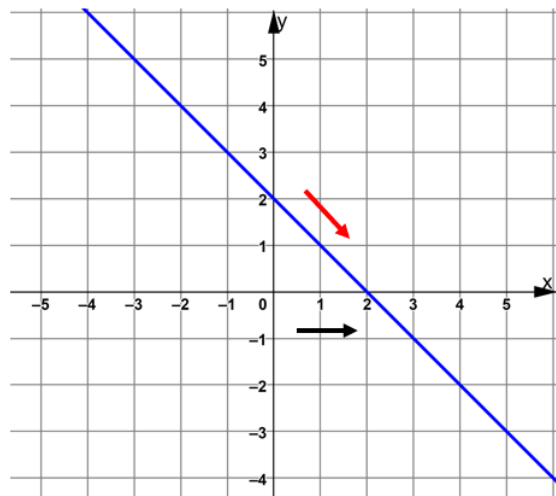
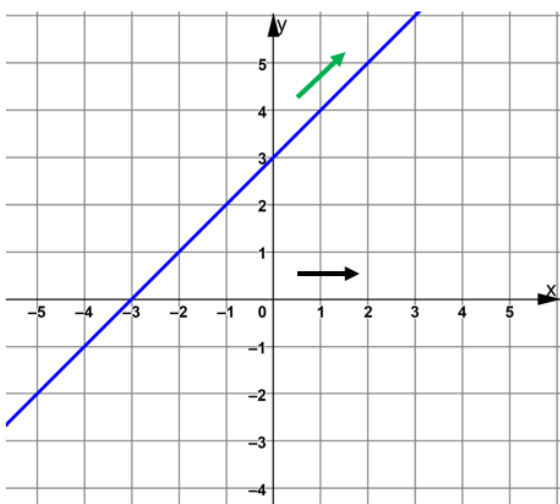
- Ha nem tudjuk leolvasni, mert nem egész számra esik, akkor kiszámítjuk
- Kiszámítása:  $f(x) = 0$  (a függvényt egyenlővé tesszük 0-val és megoldjuk  $x$ -re az egyenletet)

## Tengelymetszet, Tengelypont

- Jelölés: T.M., T.P.
- Megadja, hogy hol metszi a függvény az  $y$  tengelyt
- Vagy **0** vagy **1** tengelymetszet lehet, **több nem!**
- Leolvasással meg tudjuk állapítani, ha nem (ritka), akkor 0-t helyettesítünk a függvénybe ( $f(0) = \dots$ )

## Monotonitás

- Minden függvény, vagy Sz.m.n. vagy Sz.m.cs. Összefügg a szélső értékkel:
  - Ha nő és utána csökken, akkor ahol a váltás történik ott maximum lesz
  - Ha csökken és utána nő, akkor ahol a váltás történik ott minimum lesz
- Hogy állapítsuk meg, hogy egy függvény nő vagy csökken?
- $x$  tengely mentén mindig jobbra felé nézzük, ha  $y$  növekszik, akkor **Sz.m.n.**, ha  $y$  csökken, akkor **Sz.m.cs.**



## Szélsőérték

- Minimum
- Maximum
- Megadás: Hely ( $x$ ), Érték ( $y$ )
- Pl.:

*Minimum koordinátái (2; 3)*

***Minimum hely: 2***

***Minimum érték: 3***

*Maximum koordinátái (2; 4)*

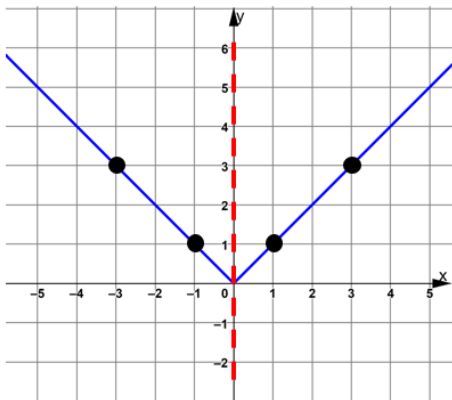
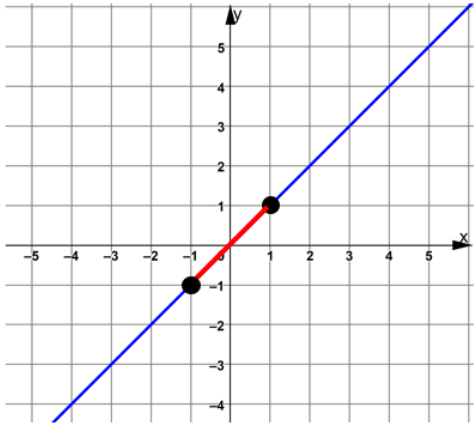
***Maximum hely: 2***

***Maximum érték: 4***

## Folytonosság

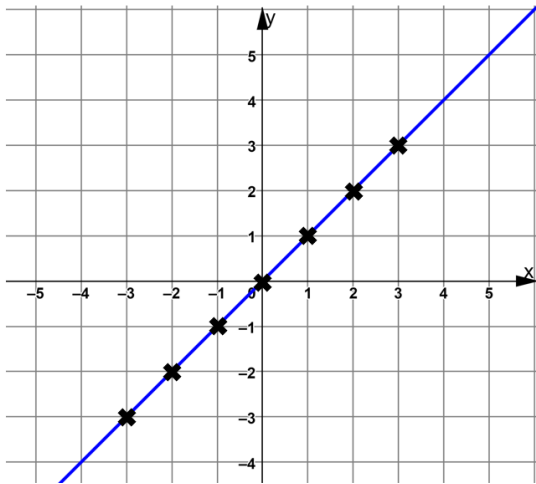
- Folytonos egy függvény, ha végig tudjuk rajta húzni a ceruzánkat úgy, hogy nem kell közben felemelnünk.
- Más szavakkal: Ha az értelmezési tartományán belül nincsen sehol szakadása.
- Az alap függvények közül csak az  $\frac{1}{x}$  függvény nem folytonos
- Ahol felemeled a ceruzát, azt szakadásnak hívjuk

## Paritás

	Páros	Páratlan
Definíció	Páros egy függvény, ha szimmetrikus az $y$ tengelyre.	Páratlan egy függvény, ha szimmetrikus az origóra.
Konyhanyelven	Ha az $y$ tengelyre teszünk egy tükröt ugyanazt látjuk mind a két felén.	Ha bármelyik pontját összekötjük az origóval, akkor ugyanazon az egyenesen ugyanolyan távolságban van egy másik pont is.
Példák	$f(x) =  x $ , $f(x) = x^2$	$f(x) = x$ , $f(x) = \frac{1}{x}$
Ábrázolás		

	<b>Sem páros sem páratlan</b>
Definíció	Sem páros sem páratlan egy függvény, ha nem szimmetrikus sem $y$ tengelyre, sem az origóra.
Konyhanyelven	Ha egy tükröt teszünk az $y$ tengelyre nem fog megjelenni a függvény tükörképe a másik oldalon, ha pedig bármelyik pontját összekötjük az origóval nem lesz egy másik pont ugyanolyan távolságban.
Példák	$f(x) = \sqrt{x}$
Ábrázolás	

## Lineáris függvény tudnivalók



- Értelmezési tartomány:  $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet:  $y \in \mathbb{R}$
- Zérushely:  $f(x) = 0$ , mindig 1 zérushely van
- Tengelymetszet: a függvényben a szám, mindig 1 tengelymetszet van
- Monotonitás:
  - Ha nincs az  $x$ -es kifejezés előtt mínusz előjel  $\rightarrow$  Sz.m.n.
  - Ha van az  $x$ -es kifejezés előtt mínusz előjel  $\rightarrow$  Sz.m.cs.
- Szélsőérték: Sosincs
- Paritás: Páratlan, ha nincs benne eltolás, sem páratlan sem páros, ha van benne eltolás
- Törtek meredeksége:

$$\frac{2}{3}x \rightarrow \frac{\text{fel}}{\text{jobbra}} \rightarrow 3 - \text{at jobbra}(\rightarrow) 2 - t \text{ fel}(\uparrow)$$

$$f(x) = \Delta \cdot x + \otimes$$

$\Delta$ : meredekség

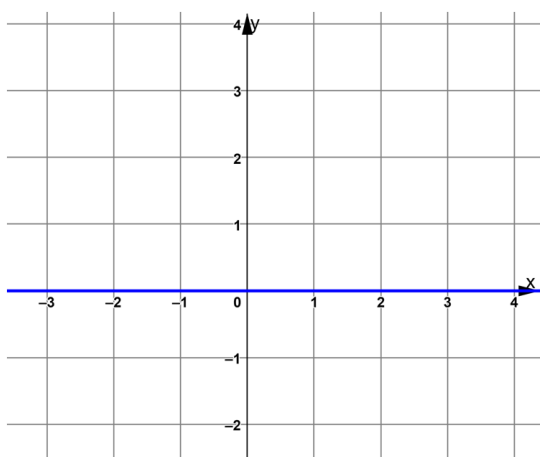
$\otimes$ :  $y$  tengely metszet

## Lineáris függvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük, hogy hol metszi az  $y$  tengelyt, azt bejelöljük**
- **Megnézzük a meredekséget, és annyit lépünk jobbra / balra és fel / le amennyi a meredekség**

## Konstans függvény tudnivalók

$$f(x) = 0$$



$$\text{É.T.: } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{É.K.: } y = 0$$

Zérushely: **Minden  $x$  Z.H.**

Tengelypont:  $y = 0$

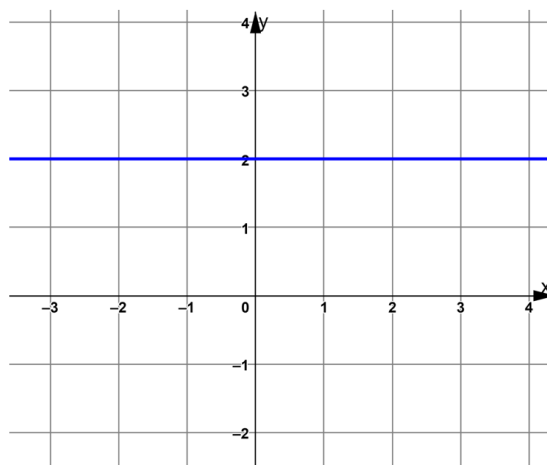
Monotonitás: *Se Sz.m.n., se Sz.m.cs.*

Szélsőérték: Nincs

Folytonosság: Folytonos

Paritás: Páros, és **páratlan** is

$$f(x) \neq 0$$



$$\text{É.T.: } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{É.K.: } y = 2 \text{ (} f(x) = 2 \text{ esetén)}$$

Zérushely: *Nincs*

Tengelypont:  $y = 2$

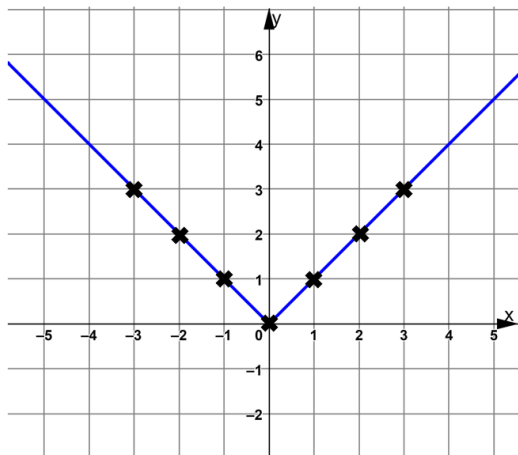
Monotonitás: *Se Sz.m.n., se Sz.m.cs.*

Szélsőérték: Nincs

Folytonosság: Folytonos

Paritás: Páros

## Abszolútérték függvény tudnivalók



- Értelmezési tartomány:  $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: Függőleges eltolástól függ pl.:  $f(x) = |x| - 2 \rightarrow R_f: [-2; \infty[$
- Zérushely:  $f(x) = 0$ , lehet 0, 1, vagy 2 zérushely is (Függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet:  $f(0) = \dots$ , mindig 1 tengelymetszet van
- Monotonitás:
  - Vízszintes eltolástól függ  $\rightarrow$  Először Sz.m.cs. minimum helyig, aztán Sz.m.n.
  - Ha az abszolútértékjel előtt van mínusz előjel  $\rightarrow$  Először Sz.m.n. maximum helyig, aztán Sz.m.cs.
- Szélsőérték: mindig van, ha nincs mínusz előjel az abszolútérték előtt, akkor minimum, ha van mínusz előjel, akkor maximum
- Paritás: Páros, ha nincs benne vízszintes eltolás, vagy csak nyújtás van benne, sem páros, sem páratlan, ha van benne vízszintes eltolás
- Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
- Vízszintes eltolás megadja a monotonitási határokat, valamint a minimum/maximum helyét

## Eltolások

$$f(x) = |x + \Delta| + \otimes$$

$\otimes$ : *y* irányú eltolás

$\Delta$ : *x* irányú eltolás

$\otimes$ : *logikusan*:

ha  $\oplus$  akkor  $\uparrow$

ha  $\ominus$  akkor  $\downarrow$

$\Delta$ : *fordítva*:

ha  $\oplus$  akkor  $\leftarrow$

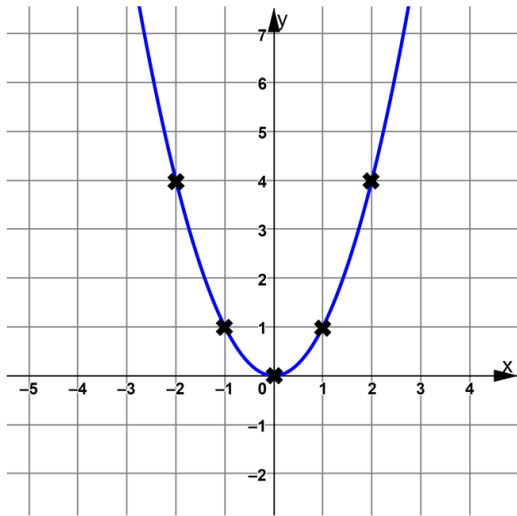
ha  $\ominus$  akkor  $\rightarrow$

$x + \Delta = 0$  egyenlet megoldása  $x = -\Delta$

### Abszolútérték függvény ábrázolásának lépései:

- Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal
- Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (Minimum, vagy maximum)
- A csúcsból kiindulva a sima abszolútérték függvényt ábrázoljuk (1-et jobbra 1-et fel, 1-et balra 1-et fel)

## Másodfokú függvény tudnivalók



- Értelmezési tartomány:  $x \in \mathbb{R}$
- Értékkészlet: Függőleges eltolástól függ pl.:  $f(x) = x^2 + 3 \rightarrow R_f: [3; \infty[$
- Zérushely:  $f(x) = 0$ , lehet 0, 1, vagy 2 zérushely is (Függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet:  $f(0) = \dots$ , mindig 1 tengelymetszet van
- Monotonitás:
  - Vízszintes eltolástól függ  $\rightarrow$  Először Sz.m.cs. minimum helyig, aztán Sz.m.n.
  - Ha a zárójel előtt van mínusz előjel  $\rightarrow$  Először Sz.m.n. maximum helyig, aztán Sz.m.cs.
- Szélsőérték: Mindig van, ha nincs mínusz előjel a zárójel előtt, akkor minimum, ha van mínusz előjel, akkor maximum
- Paritás: Páros, ha nincs benne vízszintes eltolás, vagy csak nyújtás van benne, sem páros, sem páratlan, ha van benne vízszintes eltolás
- Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
- Vízszintes eltolás megadja a monotonitási határokat, valamint a minimum/maximum helyét

## Eltolások

$$f(x) = (x + \Delta)^2 + \otimes$$

$\otimes$ : *y* irányú eltolás

$\Delta$ : *x* irányú eltolás

$\otimes$ : logikusan:

ha  $\oplus$  akkor  $\uparrow$

ha  $\ominus$  akkor  $\downarrow$

$\Delta$ : fordítva:

ha  $\oplus$  akkor  $\leftarrow$

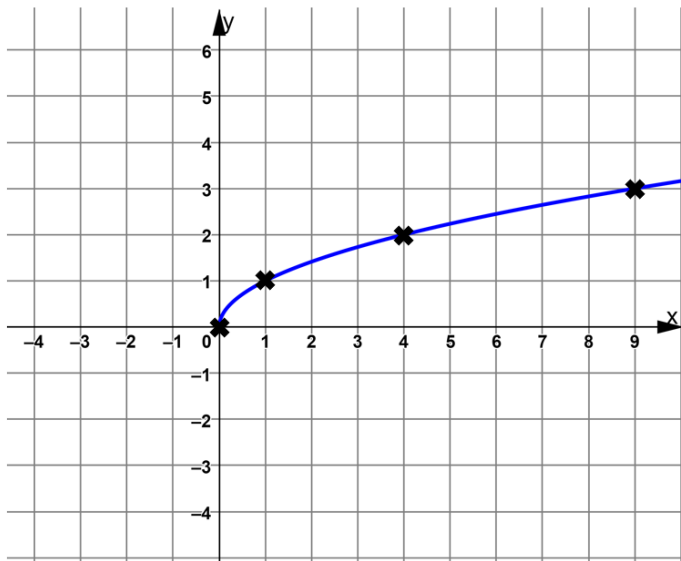
ha  $\ominus$  akkor  $\rightarrow$

$x + \Delta = 0$  egyenlet megoldása  $x - re$

## Másodfokú függvény ábrázolásának lépései:

- Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal
- Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (Minimum, vagy maximum)
- A csúcsból kiindulva a sima másodfokú függvényt ábrázoljuk

## Gyök függvény tudnivalók



- Értelmezési tartomány: Gyök alatti kifejezés  $\geq 0$
- Értékkészlet: Függőleges eltolástól függ pl.:  $f(x) = \sqrt{x} - 2 \rightarrow R_f: [-2; \infty[$
- Zérushely:  $f(x) = 0$ , 0 vagy 1 zérushely lehet (Függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet:  $f(0) = \dots$ , 0 vagy 1 tengelymetszet lehet (Vízszintes eltolástól függ)
- Monotonitás: Gyökjel előtti, valamint gyökön belüli mínusz előjelektől függ:
- $\sqrt{x}, -\sqrt{-x} \rightarrow Sz. m. n.$  ,  $\sqrt{-x}, -\sqrt{x} \rightarrow Sz. m. cs.$
- Szélsőérték: Mindig van, az eltolások metszetében lesz, az, hogy minimum vagy maximum, a gyökjel előtti, valamint gyökön belüli mínusz előjelektől függ
- Paritás: Sem páros sem páratlan
- Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
- Vízszintes eltolás megadja az értelmezési tartomány végét, valamint a minimum/maximum helyét

## Eltolások

$$f(x) = \sqrt{x + \Delta} + \otimes$$

$\otimes$ : *y* irányú eltolás

$\Delta$ : *x* irányú eltolás

$\otimes$ : logikusan:

ha  $\oplus$  akkor  $\uparrow$

ha  $\ominus$  akkor  $\downarrow$

$\Delta$ : fordítva:

ha  $\oplus$  akkor  $\leftarrow$

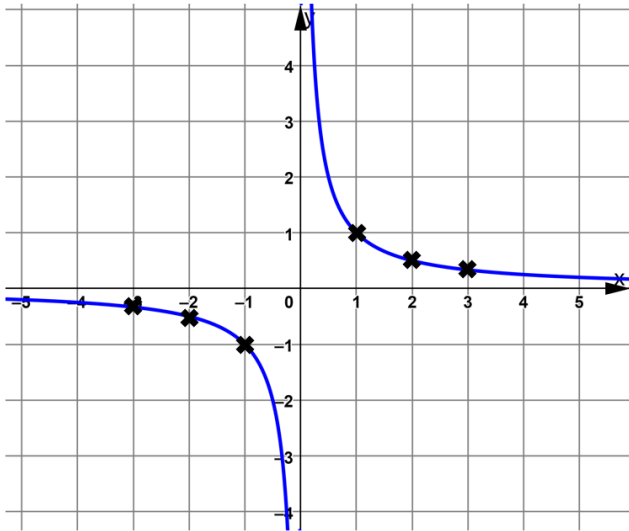
ha  $\ominus$  akkor  $\rightarrow$

$x + \Delta = 0$  egyenlet megoldása  $x - re$

## Gyökfüggvény ábrázolásának lépései:

- Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal
- Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (Minimum, vagy maximum)
- A csúcsból kiindulva a sima gyökfüggvényt ábrázoljuk

## Tört függvény $\left(\frac{1}{x}\right)$ tudnivalók



- Értelmezési tartomány:  $x \in \mathbb{R}$ , kivéve ahol a nevező 0
- Értékkészlet:  $y \in \mathbb{R}$  kivéve, amennyivel el van tolva a függvény függőlegesen
- Zérushely:  $f(x) = 0$ , 0 vagy 1 zérushely lehet (Függőleges eltolástól függ)
- Tengelymetszet:  $f(0) = \dots$ , 0 vagy 1 tengelymetszet lehet (Vízszintes eltolástól függ)
- Monotonitás: Csökkenő, ha nincs előtte mínuszjel, növekvő, ha van előtte mínuszjel, két részben írjuk fel
- Szélsőérték: Nincs
- Paritás: Páratlan, ha nincs benne semmilyen eltolás, vagy ha csak nyújtás van benne
- Függőleges eltolás megadja, hogy az értékkészletben hol van szakadás
- Vízszintes eltolás megadja, hogy az értelmezési tartományban, hol van szakadás

## Eltolások

$$f(x) = \frac{1}{x + \Delta} + \otimes$$

$\otimes$ : *y* irányú eltolás

$\Delta$ : *x* irányú eltolás

$\otimes$ : *logikusan*:

ha  $\oplus$  akkor  $\uparrow$

ha  $\ominus$  akkor  $\downarrow$

$\Delta$ : *fordítva*:

ha  $\oplus$  akkor  $\leftarrow$

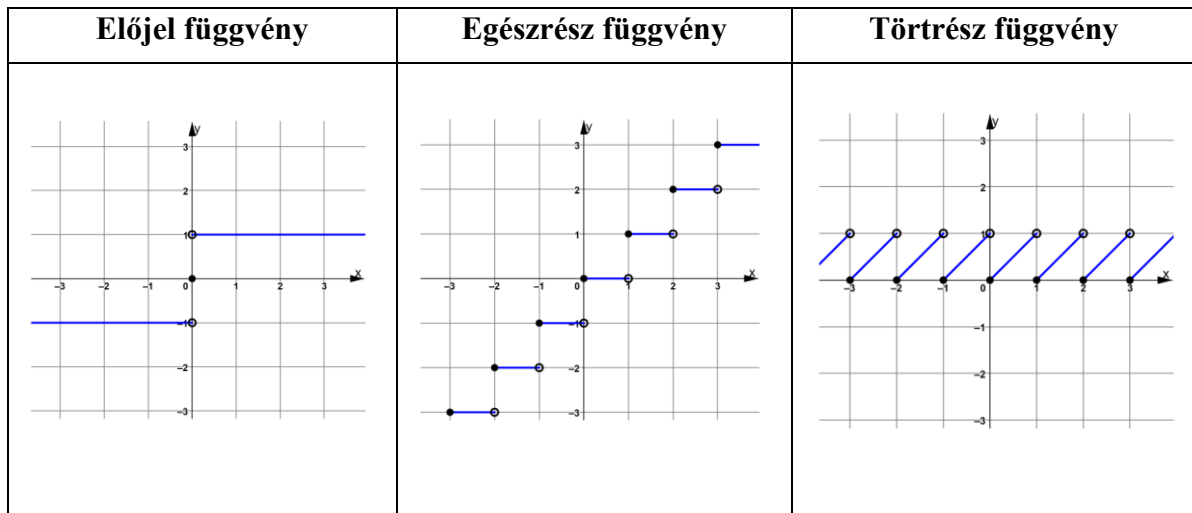
ha  $\ominus$  akkor  $\rightarrow$

$x + \Delta = 0$  egyenlet megoldása  $x - re$

## Törtfüggvény ábrázolásának lépései:

- **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
- **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, azok lesznek az új koordináta tengelyek**
- **Az új koordináta tengelyekben megrajzoljuk a függvényt**

## Előjel, egészrész, törtrész függvények



## Függvény transzformációk

### Eltolások

$$f(x) = (x + \Delta) + \otimes$$

$\otimes$ : *y* irányú eltolás

$\Delta$ : *x* irányú eltolás

$\otimes$ : logikusan:

ha  $\oplus$  akkor  $\uparrow$

ha  $\ominus$  akkor  $\downarrow$

$\Delta$ : fordítva:

ha  $\oplus$  akkor  $\leftarrow$

ha  $\ominus$  akkor  $\rightarrow$

$x + \Delta = 0$  egyenlet megoldása  $x - re$

## Tükrözések

$f(x) = (-x) \rightarrow y$  tengelyre tükrözés

$f(x) = -f(x) \rightarrow x$  tengelyre tükrözés

$f(x) = -f(-x) \rightarrow x$  és  $y$  tengelyre is tükrözés (sorrend mindegy)

**Ezek a tükrözések mindig az eltolt tengelyre vonatkoznak!**

## Nyújtások

$f(x) = 2 \cdot f(x) \rightarrow 2$  – szeres nyújtás  $y$  irányban

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) \rightarrow 2$  – szeres összenyomás  $y$  irányban

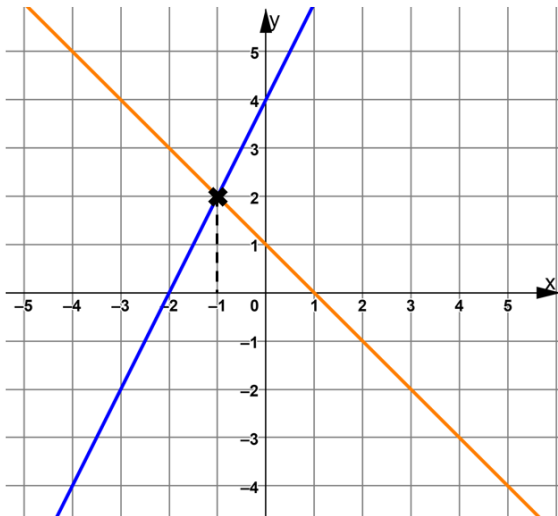
$f(x) = f(2 \cdot x) \rightarrow 2$  – szeres összenyomás  $x$  irányban

$f(x) = f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) \rightarrow 2$  – szeres nyújtás  $x$  irányban

## Paritás

- Páros függvényeknél, ha  $y$  irányban toljuk csak el (fel / le), akkor marad páros, ha  $x$  irányban is eltoljuk, vagy csak  $x$  irányban toljuk el (jobbra / balra), akkor se páros se páratlan nem lesz a függvény
- Páratlan függvényeknél bármerre is toljuk el, akár  $y$  irányban (fel / le), akár  $x$  irányban (jobbra / balra), akkor se páros se páratlan nem lesz a függvény
- Nyújtásokkal nem változik a paritás
- Tükrözésekkel nem változik a paritás

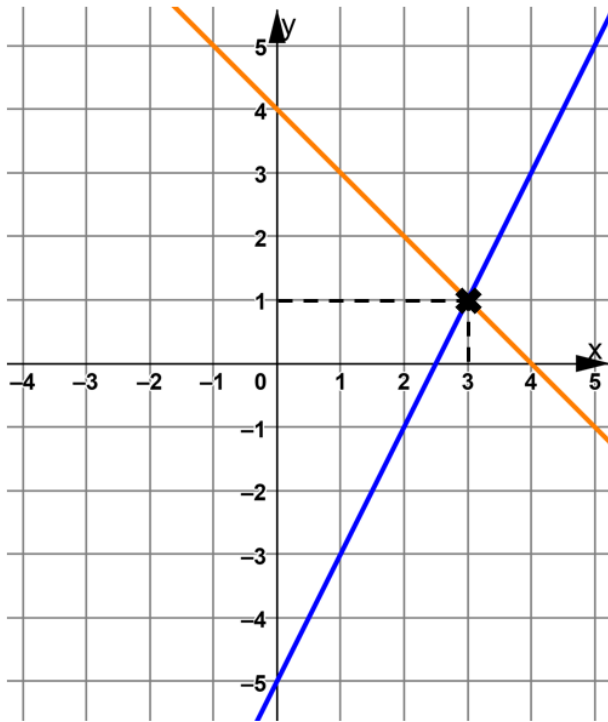
## Egyenletek grafikus megoldása



- Az egyenlet jobb oldala lesz az egyik függvény, a bal oldala pedig a másik függvény
  1. lépés: Összevonjuk az egy oldalon lévő azonos kifejezéseket (ha több is van), azért, hogy tudjuk ábrázolni függvényként
  2. lépés: Ha ezzel kész vagyunk az egyenlet bal oldala lesz az egyik függvény, a jobb oldala a másik függvény, ezeket ábrázoljuk közös koordináta rendszerben
  3. lépés: Megnézzük, hogy van-e metszéspontja a két függvénynek:
    - Ha 1 pontban metszik egymást (esetek 99%-a), akkor leolvassuk a pont  $x$  koordinátáját, ez lesz az egyenlet megoldás
    - Ha nem metszik egymást (párhuzamosak), akkor az egyenletnek nincs megoldása
    - Ha egymáson van a két függvény (ugyanaz a két függvény), akkor minden  $x$  megoldás lesz

# Egyenletrendszerek

## Grafikus megoldás



1. lépés: Az egyenletek rendezése  $y$ -ra, (1)-es egyenlet lesz az egyik függvény, (2)-es egyenlet a másik függvény

2. lépés: Ábrázoljuk a két függvényt közös koordinátarendszerben

3. lépés: Megnézzük, hogy van-e metszéspontja a két függvénynek:

- Ha 1 pontban metszik egymást (esetek 99%-a), akkor leolvassuk a metszéspont koordinátáit a pont  $x$  koordinátája lesz az  $x$  megoldás, az  $y$  koordinátája pedig az  $y$  megoldás
- Ha nem metszik egymást (párhuzamosak), akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása
- Ha egymáson van a két függvény (ugyanaz a két függvény), akkor végtelen megoldás lesz (nem bármilyen  $x$  és bármilyen  $y$ , hanem olyanok, amikre teljesülnek az egyenletek)

## Behelyettesítéssel megoldás

1. lépés: Valamelyik egyenletből kifejezzük valamelyik ismeretlent (bármelyik egyenletből kifejezhető bármelyik ismeretlen, de célszerű a törteket elkerülni, ha van rá mód, ha van olyan változó, ami előtt nincs szorzó tényező, akkor azt a legcélszerűbb kifejezni)
2. lépés: A kifejezett változót behelyettesítjük a másik egyenletbe (ha (1)-es egyenletből fejeztük ki  $y$  változót, akkor (2)-es egyenletbe helyettesítjük be  $y$  helyére)
3. lépés: Megoldjuk az egyenletet
4. lépés: A kapott eredményt visszahelyettesítjük a kifejezett egyenletbe

## Összevonással megoldás

1. lépés: Megnézzük a két egyenletet, hogy van-e olyan változó, amiből mind a két egyenletbe ugyanannyi szerepel (Pl.: Mind a két egyenletbe  $2y$  szerepel), ha van ilyen:

- Ha egyik egyenletbe plusz a másikba, pedig mínusz szerepel előtte (egyik egyenletbe  $+2y$  a másikba  $-2y$  van), akkor összeadjuk a két egyenletet és ki fog esni a változó csak a másik változó fog maradni
- Ha mind a két egyenletbe ugyanolyan előjel van előtte (vagy  $+2y$  van mind a két egyenletbe vagy  $-2y$  van mind a két egyenletbe), akkor kivonjuk egymásból a két egyenletet, mindegy hogy melyik egyenletből melyiket vonjuk ki, így is úgy is ki fog esni, célszerű úgy kivonni az egyenleteket egymásból, hogy a másik változó pozitív maradjon (ha (1)-es egyenlet bal oldala  $9x + 2y$  a (2)-es egyenlet bal oldala  $5x + 2y$ , akkor (1)-esből vonjuk ki (2)-est, hogy  $x$  pozitív maradjon)

2. lépés: Az összeadás vagy kivonás után kiesett az egyik változó, egy változónk maradt, megoldjuk az egyenletet

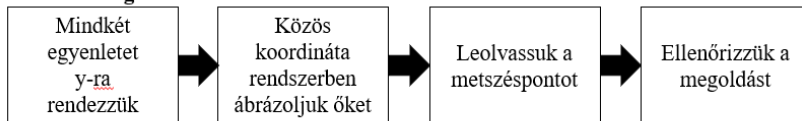
3. lépés: A kapott eredményt visszahelyettesítjük valamelyik egyenletbe és meghatározzuk a másik ismeretlent is

- Ha nincs ugyanolyan változó a két egyenletbe, akkor "közös nevezőre" hozzuk a két egyenletet (ha egyikbe  $2x$  a másikba  $3x$  van, akkor  $6x$ -et csinálunk belőlük, vagyis a  $2x$ -es egyenletet 3-mal szorozzuk, a  $3x$ -es egyenletet pedig 2-vel szorozzuk), ezután ugyanazt csináljuk, mint az előző esetben, vagy összeadjuk vagy kivonjuk egymásból a

két egyenletet attól függően, hogy milyen előjel van előtte, onnantól pedig 2-es és 3-as lépést ugyanúgy végezzük

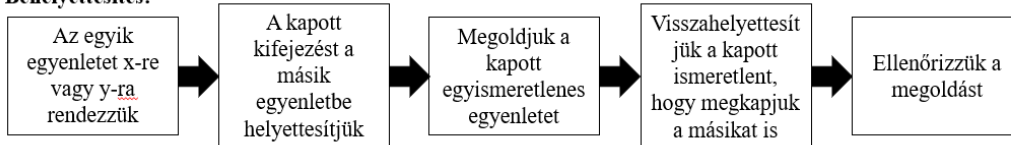
## Kétismeretlenes egyenletrendszer

### Grafikus megoldás:



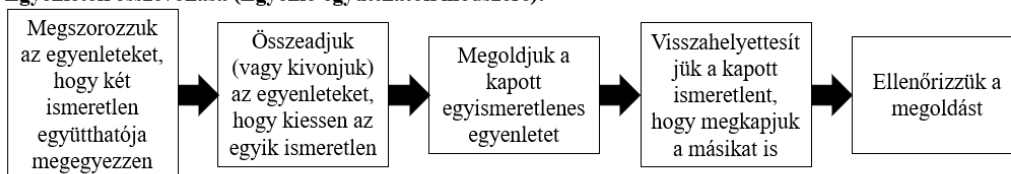
- + Szemléletes
- Ábrázolni kell
- Nagy számok esetén nehezen használható
- Tört megoldásokat nehéz leolvasni

### Behelyettesítés:



- + Nem szükséges ábrázolni
- + Törtek esetén is tudunk vele számolni
- Ha nem szépek az együtthatók, akkor törtekkel kell számolni

### Egyenletek összevonása (Egyenlő együtthatók módszere):



- + Nem szükséges ábrázolni
- + A megoldás során kisebb eséllyel találkozunk törtekkel
- Néha nagy számokkal kell szorozni az egyenlő együtthatók eléréséhez

## Több ismeretlenes egyenletrendszer

- Ahhoz, hogy megtudjuk oldani, legalább annyi egyenletnek kell lennie, mint ahány ismeretlen van
- Megoldható úgy is, ha több ismeretlen van, mint egyenlet, viszont úgy paraméteres lesz

# Másodfokú egyenletek

## Másodfokú egyenletek

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Másodfokú megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Amire figyelni kell:

- **a**, **b**, **c**-t mindig előjellel együtt nézzük
- **a** mindig  $x^2$  előtti kifejezés **b** mindig  $x$  előtti kifejezés **c** mindig a konstans
- Ha nem ilyen sorrendben vannak, akkor nyugodtan rendezzük ilyen sorrendbe, tehát  $x^2$ -es kifejezés legyen legelől utána  $x$ -es kifejezés végül a konstans, de itt is figyeljünk, hogy átrendezésnél előjelekkel együtt rendezzünk
- Esetek nagyrésztében **a** = 1, így a képletben alul 2 van, de ne essünk abba a hibába, hogy mindig automatikusan 2-t írunk oda
- Próbáljuk meg elkerülni, hogy **a** negatív legyen, nyugodtan leoszthatjuk az egyenletet  $(-1)$ -gyel

## Diszkrimináns

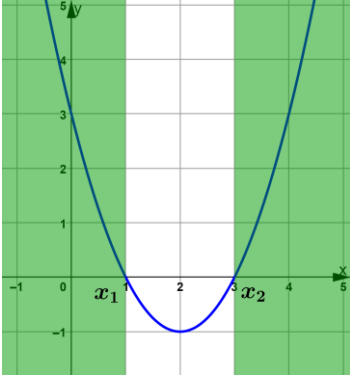
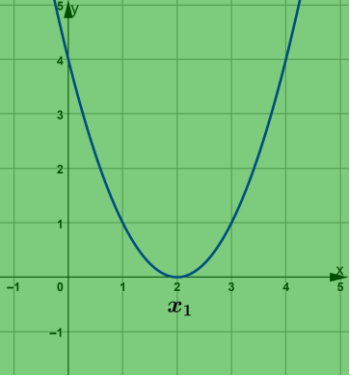
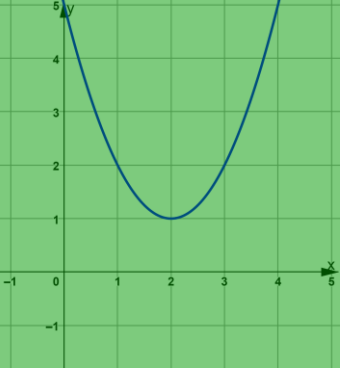
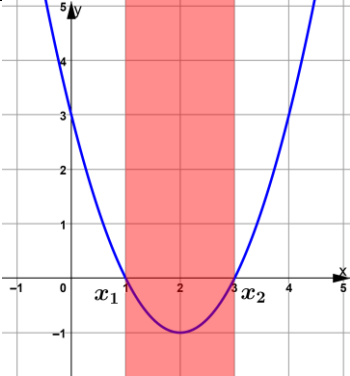
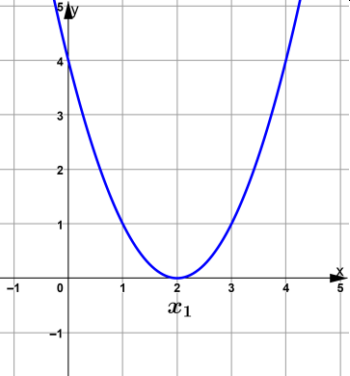
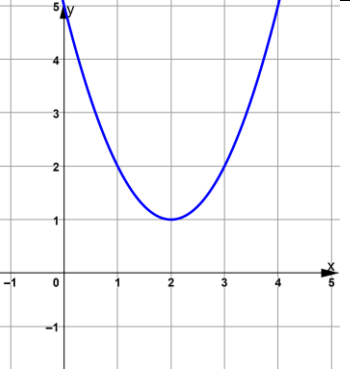
$$D = b^2 - 4ac$$

$$D > 0 \rightarrow 2 \text{ megoldás}$$

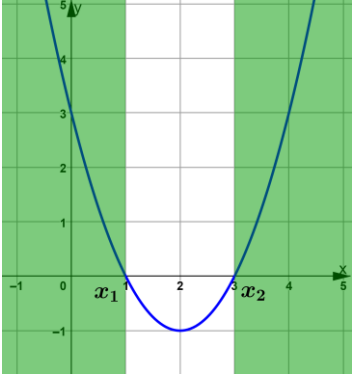
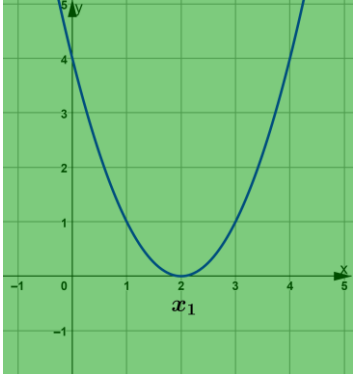
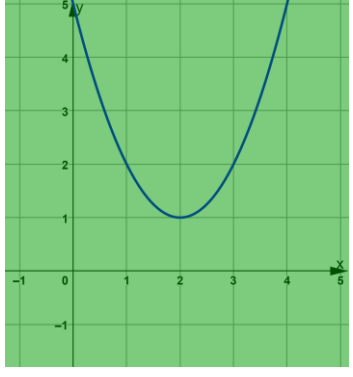
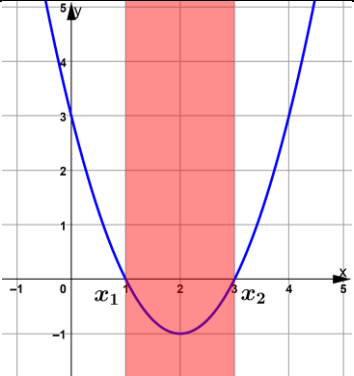
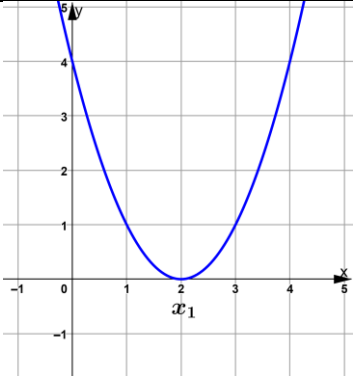
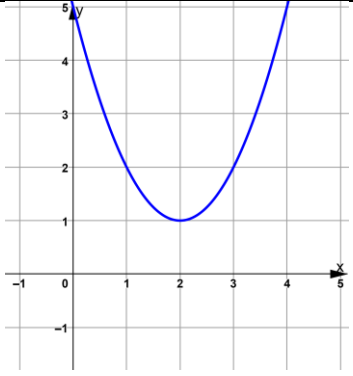
$$D = 0 \rightarrow 1 \text{ megoldás}$$

$$D < 0 \rightarrow 0 \text{ megoldás}$$

## Másodfokú egyenlőtlenségek (ha nincs megengedve az egyenlőség)

	$D > 0 \rightarrow 2$ megoldás	$D = 0 \rightarrow 1$ megoldás	$D < 0 \rightarrow 0$ megoldás
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$	 <p><math>x &lt; x_1</math> vagy <math>x_2 &lt; x</math></p>	 <p><math>x &lt; x_1</math> vagy <math>x_1 &lt; x</math> <math>x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}</math></p>	 <p><math>x \in \mathbb{R}</math></p>
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0$	 <p><math>x_1 &lt; x &lt; x_2</math></p>	 <p>Nincs megoldás</p>	 <p>Nincs megoldás</p>

## Másodfokú egyenlőtlenségek (ha meg van engedve az egyenlőség)

	$D > 0 \rightarrow 2 \text{ megoldás}$	$D = 0 \rightarrow 1 \text{ megoldás}$	$D < 0 \rightarrow 0 \text{ megoldás}$
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0$	 <p><math>x \leq x_1 \text{ vagy } x_2 \leq x</math></p>	 <p><math>x \in \mathbb{R}</math></p>	 <p><math>x \in \mathbb{R}</math></p>
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leq 0$	 <p><math>x_1 \leq x \leq x_2</math></p>	 <p><math>x = x_1</math></p>	 <p><i>Nincs megoldás</i></p>

## Teljes négyzet alak

Teljes négyzet alak:  $(\Delta \pm \boxplus)^2 \pm \boxtimes$

Teljes négyzet alakra hozás lépései:

- A négyzetes tagból vonjunk gyököt
- Határozzuk meg az előjelet a zárójelen belül
- Határozzuk meg a második tagot a zárójelen belül
- Ha kell egészítsük ki a teljes négyzet alakot

## Gyöktényező alak

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

## Viéte-formulák

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

## Tört egyenletek

- Mindig a kezdeti feltétellel (*K.F.*) kezdünk
- A *K.F.* hogy a nevező nem lehet egyenlő 0-val (0-val nem osztunk)
- Ezután a nevezővel (nevezőkkel) fel tudunk szorozni, vagy ha a tört egyenlő 0-val, akkor a nevezőt elhagyjuk és a számláló = 0 egyenletet oldjuk meg

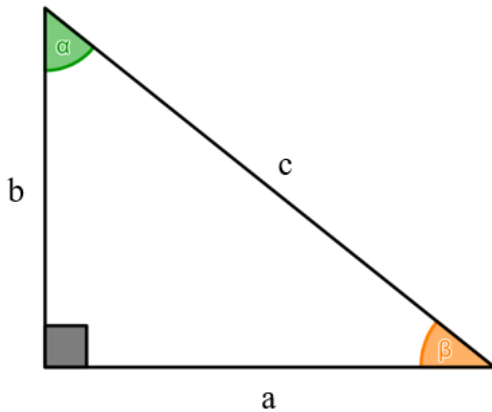
## Tört egyenlőtlenségek

- Itt is a kezdeti feltétellel (*K.F.*) kezdünk
- Ha a tört  $> 0$ , akkor megvizsgáljuk a  $\frac{\oplus}{\oplus}$  és a  $\frac{\ominus}{\ominus}$  eseteket
- Ha a tört  $< 0$ , akkor megvizsgáljuk a  $\frac{\oplus}{\ominus}$  és a  $\frac{\ominus}{\oplus}$  eseteket
- Ha relációjelben meg van engedve az egyenlőség, azt csak a számlálóban engedjük meg

# Trigonometria

## Szögfüggvények

### Szinusz (*sin*)

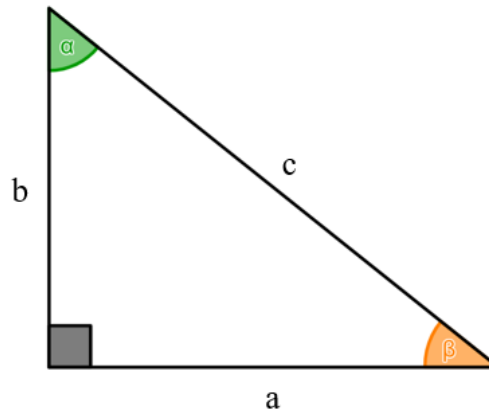


$$\sin \alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

### Koszinusz (*cos*)

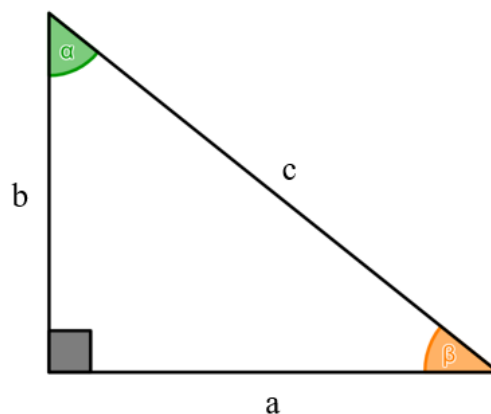


$$\cos \alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

### Tangens (*tg, tan*)



$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{b}{a}$$

## Szögfüggvények nevezetes szögértékei

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
→					
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
←					

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
→					
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
←					

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
→					
$\operatorname{ctg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
←					

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = \cos(\alpha - 90^\circ)$$

$$\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$$

## Szögek átváltása, radián

Fok (°)	Radián ( <i>rad</i> )
360°	$2\pi$
<b>180°</b>	<b><math>\pi</math></b>
90°	$\frac{\pi}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
30°	$\frac{\pi}{6}$
0°	0

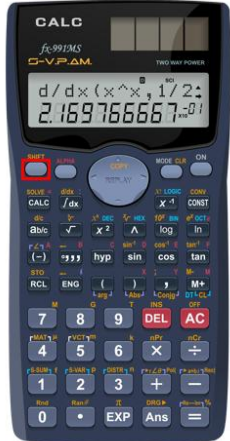
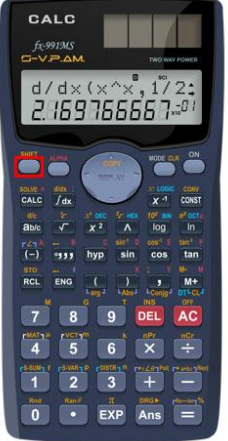




Átváltás fokból radiánba (° → <i>rad</i> )	Átváltás radiánból fokba ( <i>rad</i> → °)
$\alpha^\circ \cdot \frac{2\pi}{360} = \alpha_{rad}$ $\alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \alpha_{rad}$	$\alpha_{rad} \cdot \frac{360}{2\pi} = \alpha^\circ$ $\alpha_{rad} \cdot \frac{180}{\pi} = \alpha^\circ$
<p><b>Váltószám: <math>\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}</math></b></p> <p><b>1 radián ~ 57,3°</b></p>	

$\alpha^\circ$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\alpha_{rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$

## Szögek visszakeresése

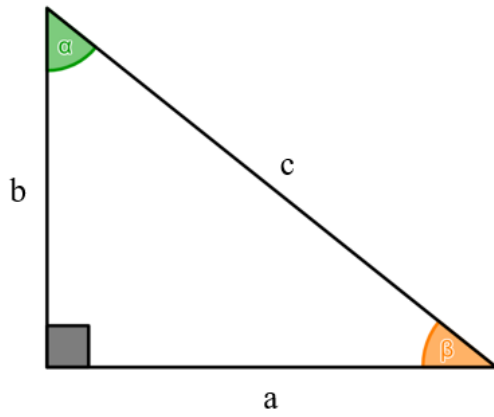
Bal felső sarokban lévő gombot nyomjuk meg először (Shift, 2ndF), ezután pedig azt amilyen szögfüggvényt visszakeresünk.

A számológépünk, mindig fokba legyen, sose rakjuk át radiánba, mert úgy marad

Sin visszakeresése	Cos visszakeresése	Tg visszakeresése
		
		

# Színusztétel, koszínusztétel

Színusztétel

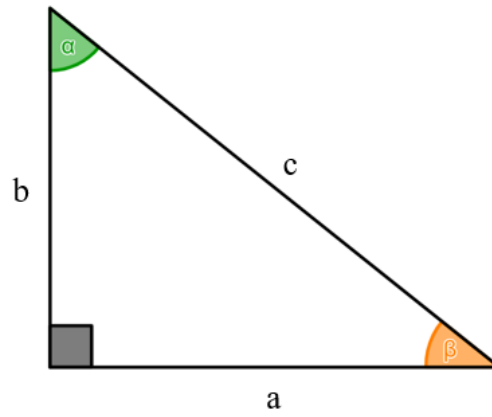


$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Koszínusztétel

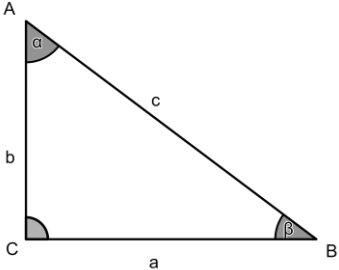
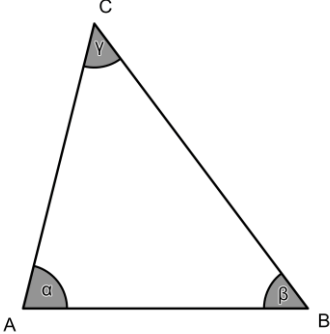


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

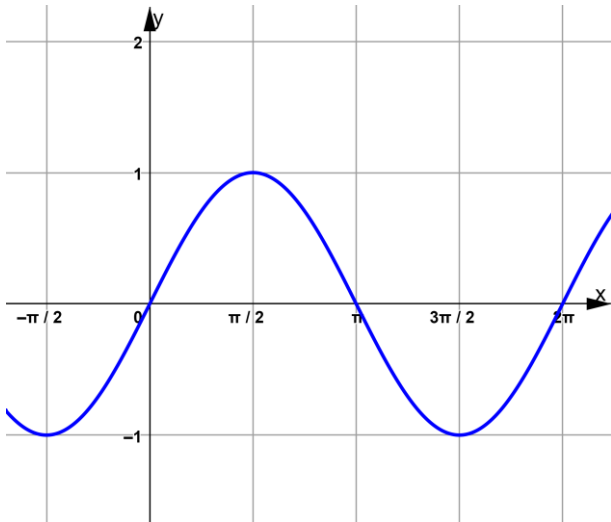
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

## Színusz, Koszínusz vs Színusztétel, Koszínusztétel

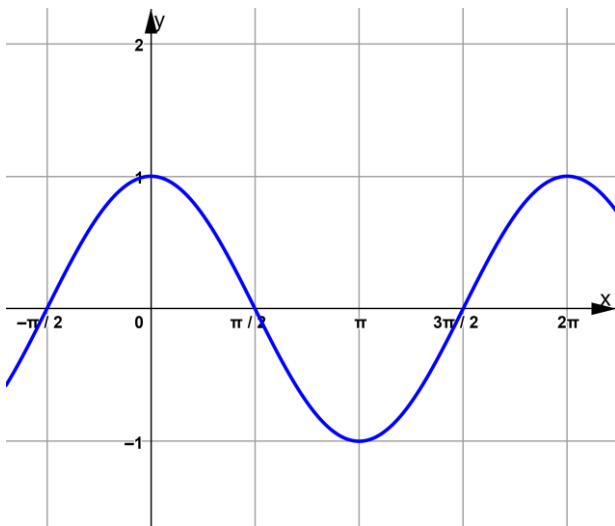
	Színusz, Koszínusz	Színusztétel, Koszínusztétel
Hol használom?	 <p>Derékszögű háromszögekben</p>	 <p>Általános háromszögekben</p>
Színusz	$\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\sin \beta = \frac{b}{c}$	$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$
Koszínusz	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\cos \beta = \frac{a}{c}$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$

## Színusz függvény



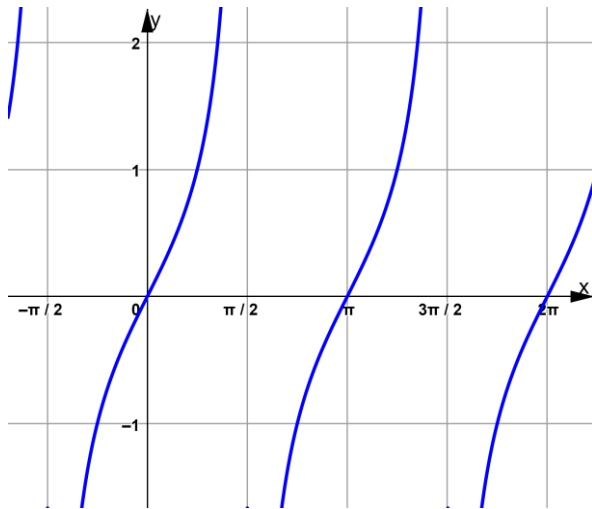
$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin x$	0	1	0	-1	0

## Koszinusz függvény



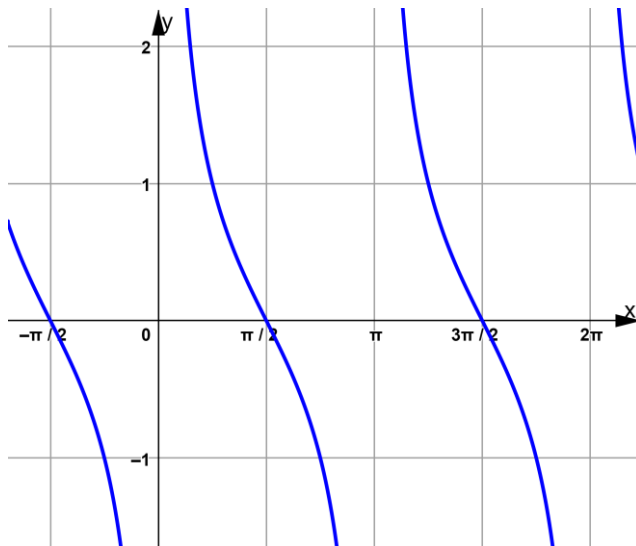
$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos x$	1	0	-1	0	1

## Tangens függvény



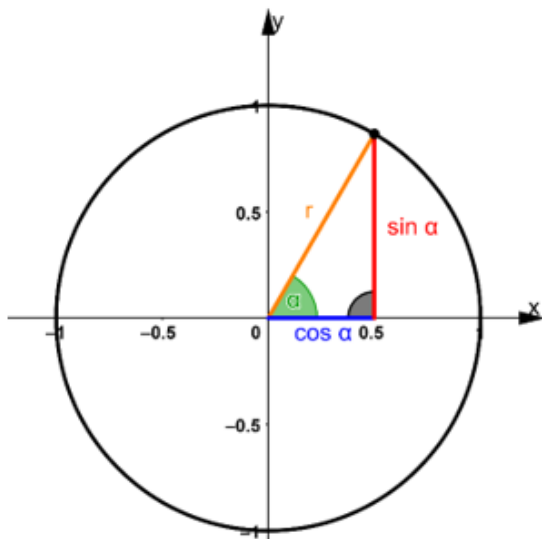
$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$tg x$	$-$	$-1$	$0$	$1$	$-$

## Kotangens függvény



$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$ctg x$	$0$	$-1$	$-$	$1$	$0$

# Egységkör



- Kör középpontja: *origó* (0; 0)
- Sugara:  $r = 1$  egység
- $\cos \alpha$  lesz az  $x$  koordináta
- $\sin \alpha$  lesz az  $y$  koordináta
- *Sin* egyenletnél vízszintesen húzzuk be
- *Cos* egyenletnél függőlegesen húzzuk be
- Mindig 2 megoldás
- Kivéve  $\sin x = \pm 1$   $\cos x = \pm 1 \rightarrow$  Ott csak 1
- Megoldások után mindig odaírjuk a periódust is
- 1. síknegyedben maga a szög
- 2. síknegyedben  $180^\circ$ -ból vonjuk ki
- 3. síknegyedben  $180^\circ$ -hoz adjuk hozzá
- 4. síknegyedben  $360^\circ$ -ból vonjuk ki

## Trigonometrikus egyenlet megoldásainak száma, periódusok

	Sin				Cos			
Alesetek	$\sin x < -1$ vagy $\sin x > 1$	$\sin x = \dots$	$\sin x = 0$	$\sin x = 1$ $\sin x = -1$	$\cos x < -1$ vagy $\cos x > 1$	$\cos x = \dots$	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$ $\cos x = -1$
Megoldások száma	0	2	1 (2)	1	0	2	1 (2)	1
Periódus	<del> </del>	$k \cdot 2\pi$	$k \cdot \pi$	$k \cdot 2\pi$	<del> </del>	$k \cdot 2\pi$	$k \cdot \pi$	$k \cdot 2\pi$

	Tg (Ctg)	
Alesetek	$\operatorname{tg} x = \dots$	$\operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
Megoldások száma	1	0
Periódus	$k \cdot \pi$	<del> </del>

## Trigonometrikus függvények értékkészlete

Alapesetben  $\sin x$  és  $\cos x$  függvények értékkészlete:  $[-1; 1]$

Nyújtások/összenyomások:

- Függvény előtt:  $y$  irányú
- Függvényen belül:  $x$  irányú

**Nyújtások:**

$2 \cdot \sin x \rightarrow y$  irányú nyújtás

$\frac{1}{2} \cdot \sin x \rightarrow y$  irányú összenyomás

$\sin(2x) \rightarrow x$  irányú összenyomás

$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \rightarrow x$  irányú nyújtás

} **Értékkészletre nincs hatással**

# Hatvány, gyök, logaritmus

## Hatványozás

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \dots}$$

$a$ : alap  $n$  – szer

$n$ : kitevő

Példák:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\ 000$$

$$x^2 = x \cdot x$$

$$y^3 = y \cdot y \cdot y$$

## Nevezetes hatványok

$x$	$x^2$
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169

$x$	$x^3$
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
10	1 000

$x$	$x^4$
1	1
2	16
3	81
4	256
5	625
10	10 000

$x$	$2^x$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1 024

$x$	$10^x$
0	1
1	10
2	100
3	1 000
4	10 000
6	1 000 000
9	1 000 000 000

## Hatvány azonosságok

Elnevezés	Azonosság	Példák
<b>E1</b>	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$ $2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2$ $x^4 \cdot x^7 = 2^{4+7} = x^{11}$ $x^{y+4} = x^y \cdot x^4$
<b>E2</b>	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{2^7}{2^2} = 2^{7-2} = 2^5$ $2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3}$ $\frac{x^2}{x^4} = 2^{2-4} = x^{-2}$ $x^{y-5} = \frac{x^y}{x^5}$
<b>E3</b>	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^x \cdot 3^x = (2 \cdot 3)^x = 6^x$ $10^x = (2 \cdot 5)^x = 2^x \cdot 5^x$ $x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2$ $(x \cdot y)^4 = x^4 \cdot y^4$
<b>E4</b>	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{3^x}{5^x} = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ $\left(\frac{7}{8}\right)^x = \frac{7^x}{8^x}$ $\frac{x^5}{y^5} = \left(\frac{x}{y}\right)^5$ $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$
<b>E5</b>	$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \cdot m}$	$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$ $5^{2 \cdot 4} = (5^2)^4$ $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$ $x^{7 \cdot 5} = (x^7)^5$ $(4^7)^9 = (4^9)^7$ $(x^3)^8 = (x^8)^3$
<b>E6</b>	$a^1 = a$	$2^1 = 2$ $5 = 5^1$ $x^1 = x$ $y = y^1$
<b>E7</b>	$a^0 = 1$	$3^0 = 1$ $1 = 6^0$ $x^0 = 1$ $1 = x^0$
<b>E8</b>	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ $x^{-1} = \frac{1}{x}$ $\frac{1}{y} = y^{-1}$
<b>E9</b>	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ $\frac{1}{5^4} = 5^{-4}$ $x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$ $\frac{1}{y^5} = y^{-5}$

## Logaritmus azonosságok

Elnevezés	Azonosság	Példák
L1	$\log_a b = c \rightarrow a^c = b$	$\log_2 x = 5 \rightarrow 2^5 = x$ $\log_3 27 = x \rightarrow 3^x = 27$ $\log_x 16 = 4 \rightarrow x^4 = 16$
L2	$\log_{10} x = \lg x = \log x$	–
L3	$\log_e x = \ln x$	–
L4	$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$	$\log_3 (2 \cdot x) = \log_3 2 + \log_3 x$ $\log_5 7 + \log_5 y = \log_5 (7 \cdot y)$
L5	$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	$\log_8 \left(\frac{3}{10}\right) = \log_8 3 - \log_8 10$ $\log_4 2 - \log_4 8 = \log_4 \left(\frac{2}{8}\right)$
L6	$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$	$\log_5 x^3 = 3 \cdot \log_5 x$ $4 \cdot \log_3 x = \log_3 x^4$
LL7	$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$	$\log_9 \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} \cdot \log_9 3$ $\frac{1}{3} \cdot \log_2 8 = \log_2 \sqrt[3]{8}$
L8	$\log_a a = 1$	$\log_2 2 = 1$ $1 = \log_5 5$ $\log_x x = 1$ $1 = \log_y y$
L9	$\log_a 1 = 0$	$\log_2 1 = 0$ $0 = \log_5 1$ $\log_x 1 = 0$ $0 = \log_x 1$
L10	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_5 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 5}$
L11	$b = \log_a a^b$	$2 = \log_3 3^2$
L12	$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$	$2^{\log_4 x} = x^{\log_4 2}$

## Gyökvonás azonosságok

Elnevezés	Azonosság	Példák
GY1	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$ $\sqrt{5 \cdot x} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x}$
GY2	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{x}{7}}$ $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$
GY3	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{8 \cdot x}$ $\sqrt[8]{2 \cdot 9} = \sqrt[8]{2 \cdot 9}$
GY4	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ $\frac{\sqrt[7]{1}}{\sqrt[7]{x}} = \sqrt[7]{\frac{1}{x}}$
GY5	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{5}}$ $10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10}$ $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ $x^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{x}$
GY6	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[7]{2^2} = 2^{\frac{2}{7}}$ $3^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{3^5}$ $\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$ $x^{\frac{10}{7}} = \sqrt[7]{x^{10}}$
GY7	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$	$\sqrt[3]{8^6} = (\sqrt[3]{8})^6$
GY8	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$	$\sqrt[2]{x} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[2 \cdot 3]{x^{2+3}} = \sqrt[6]{x^5}$
GY9	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$	$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[7]{x}} = \sqrt[7 \cdot 3]{x^{7-3}} = \sqrt[21]{x^4}$

## Exponenciális egyenletek

- Cél: Végén ilyen alakban legyen az egyenlet:

$$2^{\Delta} = 2^{\boxplus}$$

$$3^{\Delta} = 3^{\boxplus}$$

$$4^{\Delta} = 4^{\boxplus}$$

$$5^{\Delta} = 5^{\boxplus}$$

- Ha ugyanaz az alap mind a két oldalon és rajta kívül nincs más, akkor:

➤ Ha az *alap*  $> 1 \rightarrow$  Sz. m. n. Pl.: 2, 3, 4, 5,  $\frac{8}{7}$ ,  $\frac{9}{2}$ ,  $\frac{10}{9}$ ,  $\frac{120}{37}$  ...

➤ Ha az *alap*  $< 1 \rightarrow$  Sz. m. cs. Pl.:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{99}{100}$ ,  $\frac{15}{26}$  ...

## Exponenciális egyenlőtlenségek

- Cél: Ugyanaz, mint egyenleteknél, ugyanaz legyen az alap mind a két oldalon

- Ha ugyanaz az alap mind a két oldalon és rajta kívül nincs más, akkor:

➤ Ha az *alap*  $> 1 \rightarrow$  Sz. m. n. Pl.: 2, 3, 4, 5,  $\frac{8}{7}$ ,  $\frac{9}{2}$ ,  $\frac{10}{9}$ ,  $\frac{120}{37}$  ...  $\rightarrow$  **Reláció jel marad**

➤ Ha az *alap*  $< 1 \rightarrow$  Sz. m. cs. Pl.:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{99}{100}$ ,  $\frac{15}{26}$  ...  $\rightarrow$  **Reláció jel megfordul**

## Normálalak

**Normálalakra hozás lépései:**

**1. Lépés:** Az utolsó szám mögé írjuk a tizedesvesszőt

**2. Lépés:** Egyesével visszük balra felé a tizedesvesszőt, addig amíg az első számig nem érünk, közbe számoljuk, hogy hányszor lett arrébb rakva a tizedesvessző

**3. Lépés:** Leírjuk az eredeti számot úgy, hogy az első szám után van a tizedesvessző és a tizedesvessző után van a többi szám (a végén lévő 0-kat nem muszáj leírni)

**4. Lépés:** Ahányszor arrébb vittük a tizedesvesszőt az elején 10-et annyiadikra emeljük

## Kamatos kamat

Kamatos kamat képletek:

$$T_n = T_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$T_n = T_0 \cdot q^n$$

Jelölések:

$T_0$  – induló tőke (amit a 0. évben beteszünk)

$T_n$  –  $n$ . évben lévő pénz ( $n$  helyére számok kerülnek)

$n$  – évek száma

$p$  – kamatláb (%) → 2 – 10 % között

$q$  – kamattényező (szám) → 1,02 – 1,1 között

## Számrendszerek

2 – es	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	16	8	4	2	1
3 – as	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	81	27	9	3	1
4 – es	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	256	64	16	4	1
5 – ös	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	625	125	25	5	1

<b>6 – os</b>			<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
			36	6	1
<b>7 – es</b>			<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
			49	7	1
<b>8 – as</b>			<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
			64	8	1
<b>9 – es</b>			<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
			81	9	1
<b>10 – es</b>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	10 000	1 000	100	10	1

## Logaritmus értelmezési tartomány

$$\log_a b = c$$

$$a > 0, a \neq 1$$

$$b > 0$$

$$c \in \mathbb{R}$$

# Logaritmus egyenletek

## Logaritmus egyenletek

- Mindig az értelmezési tartománnyal kezdjük
- Ugyanaz a cél, mint exponenciális egyenleteknél
- Végén ilyen alakban legyen az egyenlet:

$$\log_2 \Delta = \log_2 \boxplus \qquad \log_2 \Delta = \text{szám}$$

$$\log_3 \Delta = \log_3 \boxplus \qquad \log_3 \Delta = \text{szám}$$

$$\log_4 \Delta = \log_4 \boxplus \qquad \log_4 \Delta = \text{szám}$$

- Ha ugyanaz az alap mind a két oldalon és rajta kívül nincs más, akkor:

➤ Ha az *alapot*  $> 1$   $\rightarrow$  Sz. m. n. Pl.:  $\log_2, \log_3, \log_4, \log_{\frac{5}{3}} \dots$

➤ Ha az *alapot*  $< 1$   $\rightarrow$  Sz. m. cs. Pl.:  $\log_{\frac{1}{2}}, \log_{\frac{3}{4}}, \log_{\frac{5}{12}}, \log_{\frac{36}{91}} \dots$

## Logaritmus egyenlőtlenségek

- Cél: Ugyanaz, mint egyenleteknél, ugyanaz legyen az alap mind a két oldalon
- Ha ugyanaz az alap mind a két oldalon és rajta kívül nincs más, akkor:
  - Ha az *alapot*  $> 1$   $\rightarrow$  Sz. m. n. Pl.:  $\log_2, \log_3, \log_4, \log_{\frac{5}{3}} \dots \rightarrow$  **Reláció jel marad**
  - Ha az *alapot*  $< 1$   $\rightarrow$  Sz. m. cs. Pl.:  $\log_{\frac{1}{2}}, \log_{\frac{5}{12}}, \log_{\frac{36}{91}} \dots \rightarrow$  **Realáció jel megfordul**

## Gyök egyenletek

- $\sqrt{\Delta} = \boxtimes \rightarrow \Delta = \boxtimes^2$   
 $\Delta \geq 0$   
 $\boxtimes \geq 0$
- Gyökvonás eltüntetése négyzetre emeléssel
- Négyzet eltüntetése gyökvonással
- Kezdjük mindig kezdeti feltétellel

# Koordinátageometria

## Vektorok jelölése

$a$

$\underline{a}$

$\vec{a}$

## Vektorok megadása

$\underline{a}(2; 1)$

$\underline{a} = (2; 1)$

$\underline{a} = (2\underline{i} + 1\underline{j} + 0\underline{k})$

$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Vektorok összeadása

**Szabály**

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

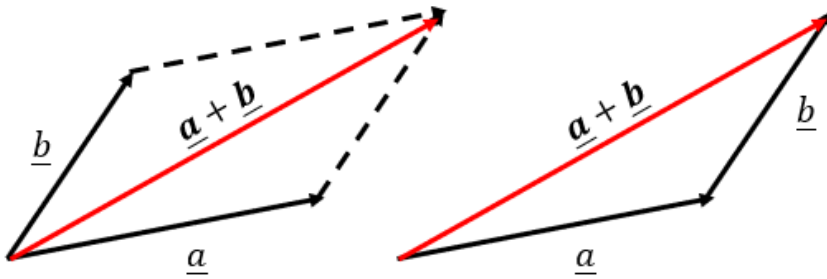
$$\underline{a} + \underline{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{bmatrix}$$

**Példa**

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} + \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

## Vektorok összeadása rajzon



## Vektorok kivonása

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} - \underline{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} - \underline{a} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} - \underline{b} = -(\underline{b} - \underline{a})$$

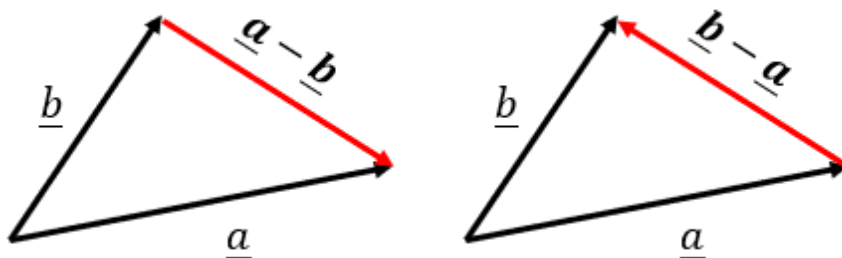
Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} - \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} - \underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

## Vektorok kivonása rajzon



## Két pont távolsága

### Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x - B_x \\ A_y - B_y \end{bmatrix}$$

Kétpont távolsága:

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}| = \sqrt{AB_x^2 + AB_y^2}$$

### Példa

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Kétpont távolsága:

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

## Vektor hossza

### Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

### Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

## Skaláris szorzat

### Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

### Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 5 = 41$$

## Két vektor által bezárt szög

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$$

Képlet:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha$$

Rendezés  $\cos \alpha$ -ra

Ha a skaláris szorzat:

- Pozitív  $\rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 
  - 0  $\rightarrow \alpha = 90^\circ$
- Negatív  $\rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 = -7$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Képlet:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$-7 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{-7}{\sqrt{130}} = \cos \alpha$$

$$-0,614 = \cos \alpha$$

$$127,875^\circ = \alpha$$

## Felezőpont

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

$$F_x = \frac{A_x + B_x}{2}$$

$$F_y = \frac{A_y + B_y}{2}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$F_x = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$F_y = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$F = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Harmadolópont

### Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

**A-hoz közelebbi:**

$$H_{1x} = \frac{2 \cdot A_x + B_x}{3}$$

$$H_{1y} = \frac{2 \cdot A_y + B_y}{3}$$

**B-hez közelebbi:**

$$H_{2x} = \frac{A_x + 2 \cdot B_x}{3}$$

$$H_{2y} = \frac{A_y + 2 \cdot B_y}{3}$$

### Példa

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

**A-hoz közelebbi:**

$$H_{1x} = \frac{2 \cdot 1 + 4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$H_{1y} = \frac{2 \cdot 2 + 5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

**B-hez közelebbi:**

$$H_{2x} = \frac{1 + 2 \cdot 4}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$H_{2y} = \frac{2 + 2 \cdot 5}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

## Tetszőleges osztópont

### Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

n-edelő pont

**A-hoz közelebbi:**

$$T_{1x} = \frac{(n-1) \cdot A_x + B_x}{n}$$

$$T_{1y} = \frac{(n-1) \cdot A_y + B_y}{n}$$

**B-hez közelebbi:**

$$T_{2x} = \frac{A_x + (n-1) \cdot B_x}{n}$$

### Példa

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5-ödölő pont

**A-hoz közelebbi:**

$$T_{1x} = \frac{4 \cdot 3 + 8}{5} = 4$$

$$T_{1y} = \frac{4 \cdot 2 + 2}{5} = 2$$

**B-hez közelebbi:**

$$T_{2x} = \frac{1 + 4 \cdot 8}{5} = \frac{33}{5}$$

$$T_{2y} = \frac{2 + 4 \cdot 2}{5} = 2$$

$$T_{2y} = \frac{A_y + (n-1) \cdot B_y}{n}$$

## Súlypont

### Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix}$$

$$S_x = \frac{A_x + B_x + C_x}{3}$$

$$S_y = \frac{A_y + B_y + C_y}{3}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix}$$

### Példa

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$S_x = \frac{-2 + 1 + 4}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$S_y = \frac{4 + 5 + (-3)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

## Írányvektor

### Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -a_x \\ -a_y \end{bmatrix}$$

### Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

## Írányvektor 2 pontból

### Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x - B_x \\ A_y - B_y \end{bmatrix}$$

### Példa

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

## Merekség

**Szabály**

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -a_x \\ -a_y \end{bmatrix}$$

$$m = \frac{v_y}{v_x}$$

**Példa**

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$m = \frac{2}{5}$$

## Normálvektor

**Szabály**

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -a_x \\ -a_y \end{bmatrix}$$

$$n_1 = \begin{bmatrix} v_y \\ -v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y \\ -a_x \end{bmatrix}$$

$$n_2 = \begin{bmatrix} -v_y \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_y \\ a_x \end{bmatrix}$$

**Példa**

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$n_1 = \begin{bmatrix} v_y \\ -v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$n_2 = \begin{bmatrix} -v_y \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

## Egyenes egyenlete

**Szabály**

$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

**P olyan pont, ami rajta van az egyenesen.**

**Egyenes egyenlete:**

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y = n_x \cdot x_0 + n_y \cdot y_0$$

**Példa**

$$n = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**Egyenes egyenlete:**

$$5 \cdot x + 1 \cdot y = 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 2$$

$$5x + y = -15 + 2$$

$$5x + y = -13$$

## Két egyenes metszéspontja

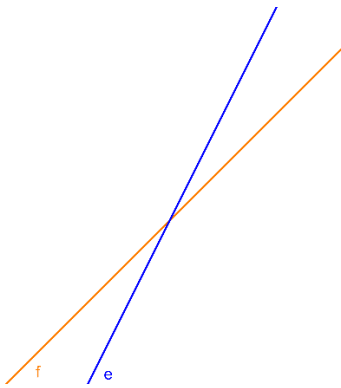
**Szabály**

$$e1: \quad x + y = 3$$

$$e2: \quad 2x + 3y = 4$$

Egyenletrendszerként oldjuk meg.

## Két egyenes viszonya



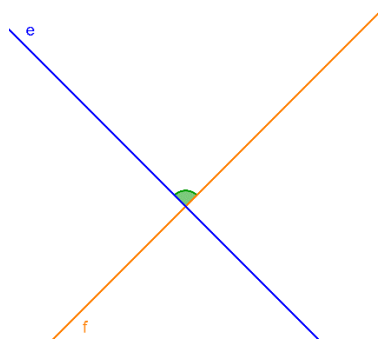
Metszik egymást

→ 1 metszéspont

$$m_e \neq m_f$$

$$v_e \neq v_f$$

$$n_e \neq n_f$$



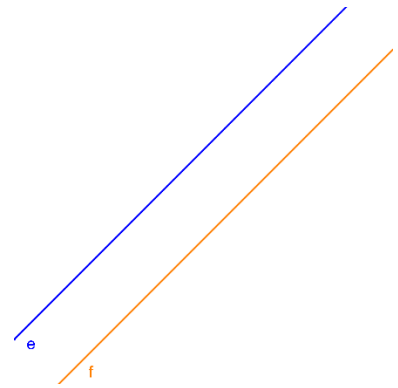
Egymásra merőlegesek

→ 1 metszéspont

$$m_e \neq m_f$$

$$v_e = n_f$$

$$n_e = v_f$$



Párhuzamosak

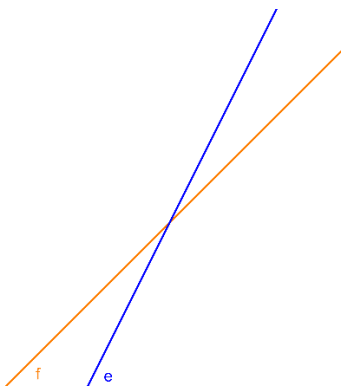
→ 0 metszéspont

$$m_e = m_f$$

$$v_e = v_f$$

$$n_e = n_f$$

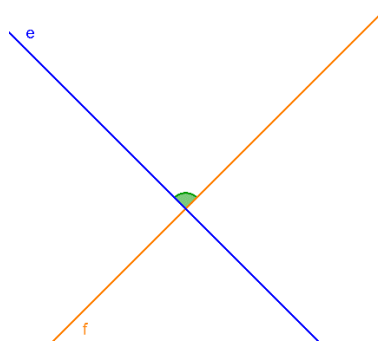
## Két egyenes távolsága



Metszik egymást

→ 1 metszéspont

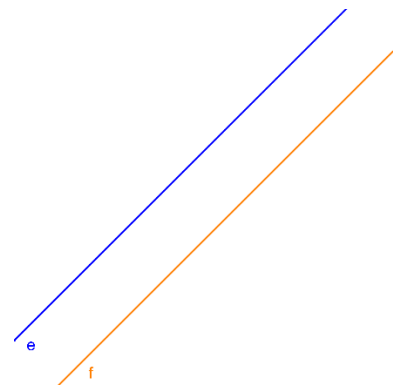
Nem számolunk távolságot



Egymásra merőlegesek

→ 1 metszéspont

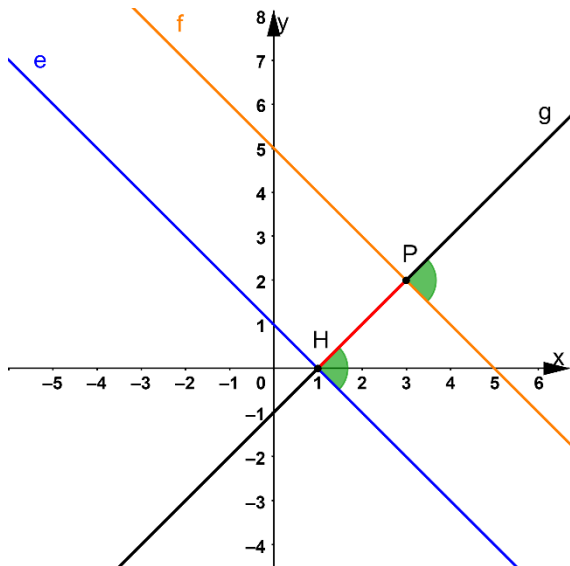
Nem számolunk távolságot



Párhuzamosak

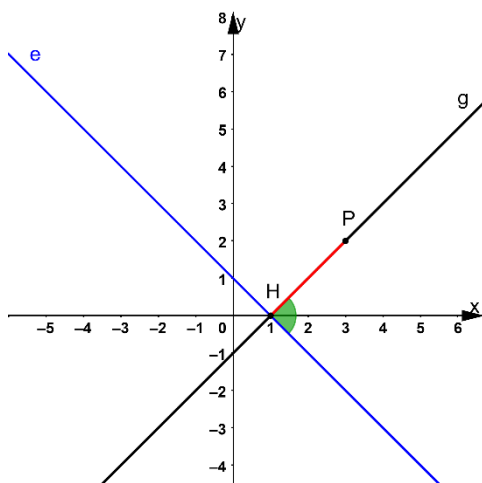
→ 0 metszéspont

Csak itt számolunk  
távolságot



1. lépés: Megnézzük, hogy a két egyenes párhuzamos-e, ha nem azok nem számolunk távolságot
2. lépés: Felveszünk egy pontot valamelyik egyenesen ( $P$ )
3. lépés: Merőlegest állítunk az egyenesre, ami átmegy a felvett  $P$  ponton ( $g$ )
4. lépés: Megkeressük az egyenes ( $g$ ) és a másik egyenes metszéspontját ( $H$ )
5. lépés: Felírjuk  $\overrightarrow{HP}$  vektort
6. lépés: Kiszámoljuk  $H$  és  $P$  pontok távolságát, ez a távolság lesz a két egyenes távolsága

## Pont és egyenes távolsága

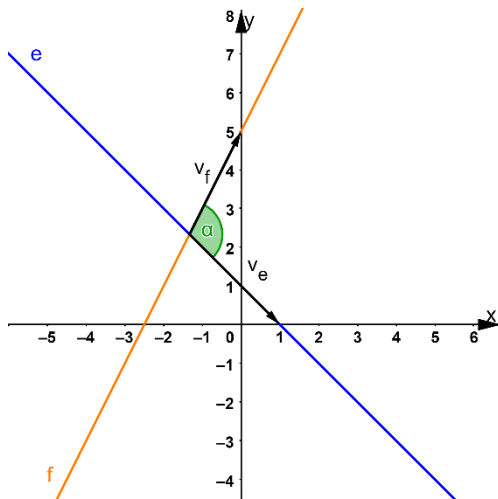


1. lépés: Merőlegest állítunk az egyenesre, ami átmegy  $P$  ponton ( $g$ )
2. lépés: Megkeressük az egyenes ( $g$ ) és a másik egyenes ( $e$ ) metszéspontját ( $H$ )

3. lépés: Felírjuk  $\overrightarrow{HP}$  vektort

4. lépés: Kiszámoljuk  $H$  és  $P$  pontok távolságát, ez a távolság lesz a pont és az egyenes távolsága

## Két egyenes hajlásszöge



1. lépés: Kiolvassuk az egyenesek normálvektorát

2. lépés: Ebből felírjuk az irányvektort

3. lépés: Kiszámoljuk a két irányvektor skaláris szorzatát, és hosszát

4. lépés Az alábbi képletet alkalmazva kiszámoljuk a szöveget:  $v_e \cdot v_f = |v_e| \cdot |v_f| \cdot \cos \alpha$

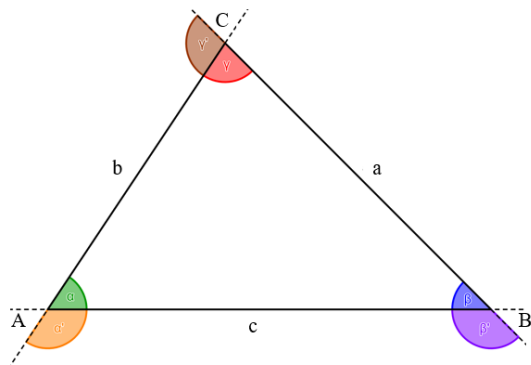
## Kör egyenlete

Origó középpontú,  $r$  sugarú körök egyenlete:  $x^2 + y^2 = r^2$

$K(u, v)$  középpontú,  $r$  sugarú körök egyenlete:  $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$

# Geometria

## Háromszögek



- Csúcsok  $ABC$  nagybetűi
- Oldalak  $ABC$  kisbetűi:
  - $A$  csúccsal szemben  $a$  oldal
  - $B$  csúccsal szemben  $b$  oldal
  - $C$  csúccsal szemben  $c$  oldal
- Szögek, a görög  $ABC$  betűi:
  - $A$  csúcsonál  $\alpha$
  - $B$  csúcsonál  $\beta$
  - $C$  csúcsonál  $\gamma$
- *Háromszög belső szögeinek összege:  $180^\circ$*
- **$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$**
- *Háromszög külső szögeinek összege:  $360^\circ$*
- **$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$**
- *Egy belső és egy külső szög összege:  $180^\circ$*
- **$\alpha + \alpha' = 180^\circ$**
- **$\beta + \beta' = 180^\circ$**
- **$\gamma + \gamma' = 180^\circ$**
- Két oldal összege mindig nagyobb a harmadik oldalnál:

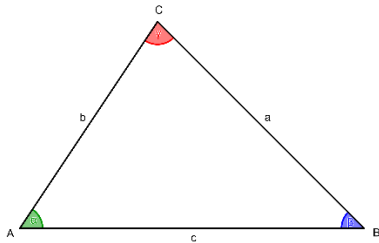
$$a + b > c$$

$$a + c > b$$

$$b + c > a$$

## Háromszögek csoportosítása szögek szerint

Hegyesszögű háromszög



3 hegyesszög

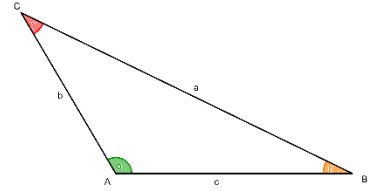
Derékszögű háromszög



1 derékszög

2 hegyesszög

Tompaszögű háromszög

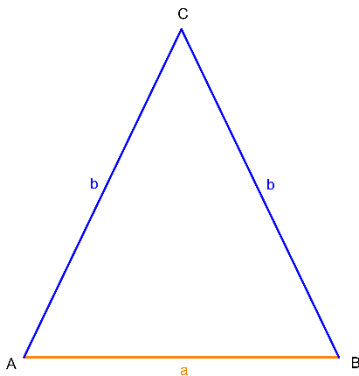


1 tompaszög

2 hegyesszög

## Háromszögek csoportosítása specialitás szerint

Egyenlőszárú háromszög

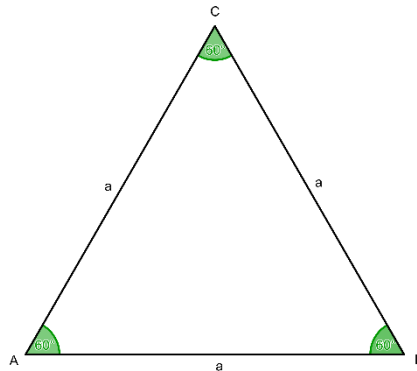


Van 2 egyenlő szára

Alapon fekvő szögei ugyanakkorák

1 szimmetria tengelye van

Szabályos háromszög

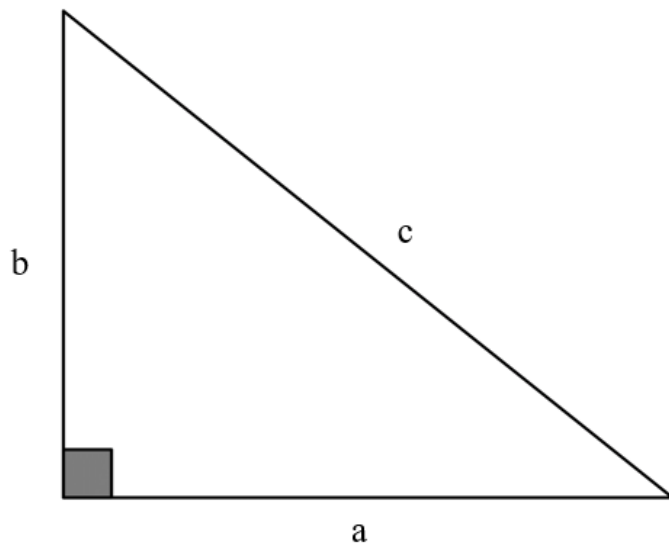


Minden oldala egyenlő

Minden szöge  $60^\circ$

3 szimmetria tengelye van

## Pitagorasz-tétel

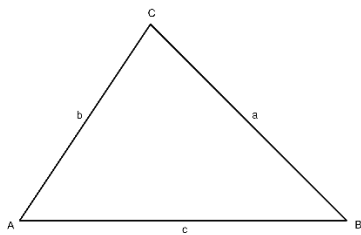


Pitagorasz-tétel:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

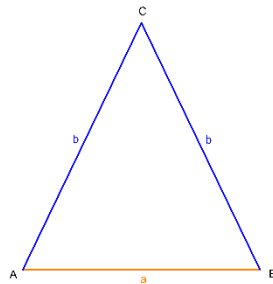
## Háromszögek kerülete

Általános háromszög



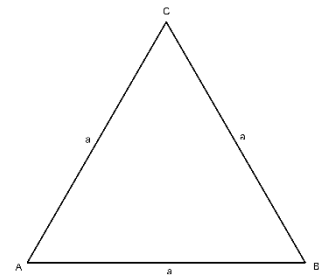
$$K = a + b + c$$

Egyenlőszárú háromszög



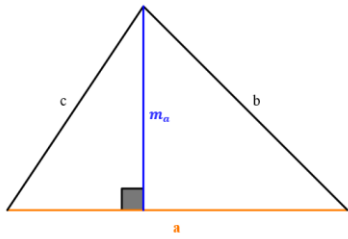
$$K = a + 2b$$

Szabályos háromszög



$$K = 3a$$

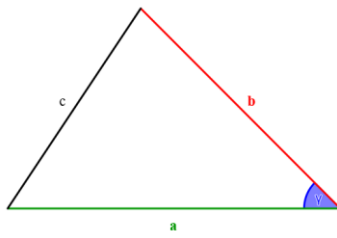
## Háromszögek területe



Hagyományos  
módszer:

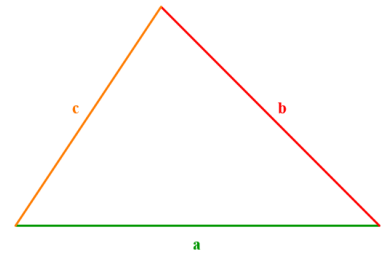
$$T = \frac{\text{alap} \cdot \text{magasság}}{2}$$

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$



Ha ismert két oldal és az  
általuk bezárt szög:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$$



Ha ismert mind a 3 oldal

(Héron képlet):

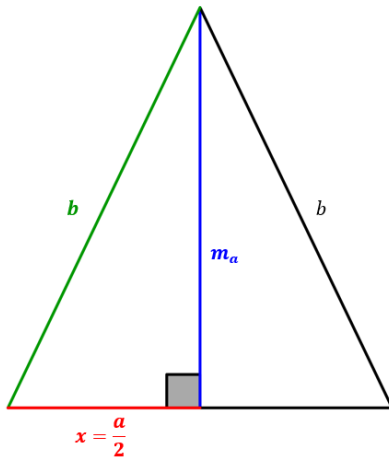
$$T = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

*s*: félkerület

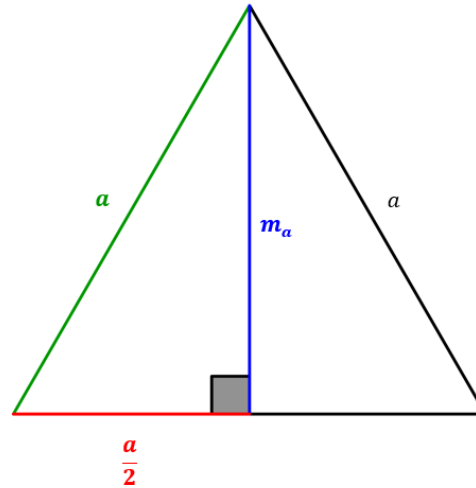
$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

# Háromszögek magassága, területe

Egyenlőszárú háromszög



Szabályos háromszög



**Pitagorasz-tétel:**

$$x^2 + m_a^2 = b^2 \quad / -x^2$$

$$m_a^2 = b^2 - x^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$m_a = \sqrt{b^2 - x^2}$$

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

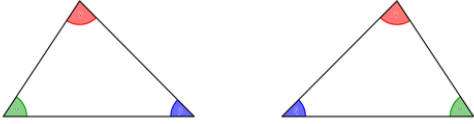
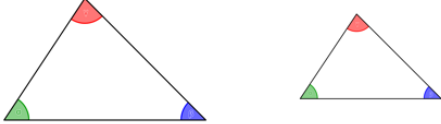
$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

## Háromszögek egybevágósága

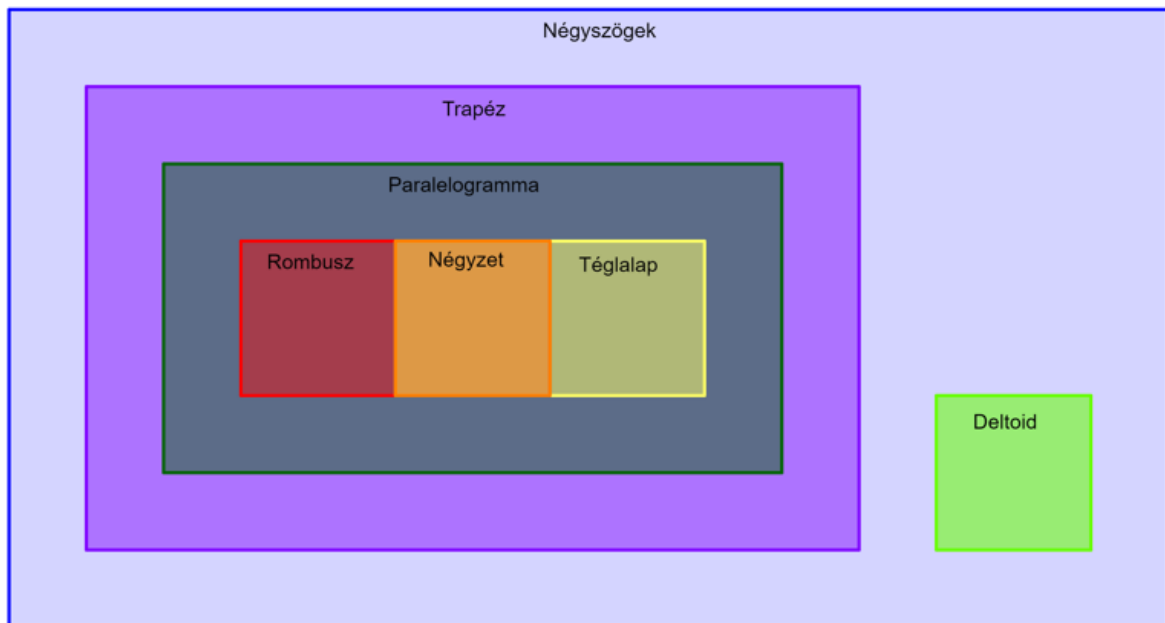
- Ha egy háromszögből egy másikat egybevágósági transzformációkkal (eltolás, tükrözés, forgatás) elő tudunk állítani, akkor a két háromszög **egybevágó**
- Egybevágó háromszögek megfelelő oldalai **egyenlő hosszúak**, megfelelő szögei **egyenlő nagyságúak**
- Biztosan tudjuk két háromszögről, hogy egybevágó, ha:

- Három oldaluk egyenlő
- Egy oldaluk és a rajtuk lévő két szög egyenlő
- Két oldaluk és a köztük lévő szög egyenlő
- Két oldaluk és a nagyobbikkal szembeeső szög egyenlő

## Egybevágóság vs hasonlóság

	<b>Egybevágóság</b>	<b>Hasonlóság</b>
<b>Jelentése (konyhanyelv)</b>	Ugyanaz a két háromszög csak el vannak tolvá egymástól, meg vannak tükrözve, vagy el vannak forgatva	Az egyik háromszög a másik háromszög nagyított/kicsinyített verziója
<b>Tulajdonságok</b>	Mind a két háromszög esetén: <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mind a 3 oldal ugyanolyan hosszú</li> <li>➤ Mind a 3 szög ugyanakkora</li> </ul>	Mind a két háromszög esetén: <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mind a 3 oldal aránya megegyezik</li> <li>➤ Mind a 3 szög ugyanakkora</li> </ul>
<b>Példa</b>		

# Négyszögek

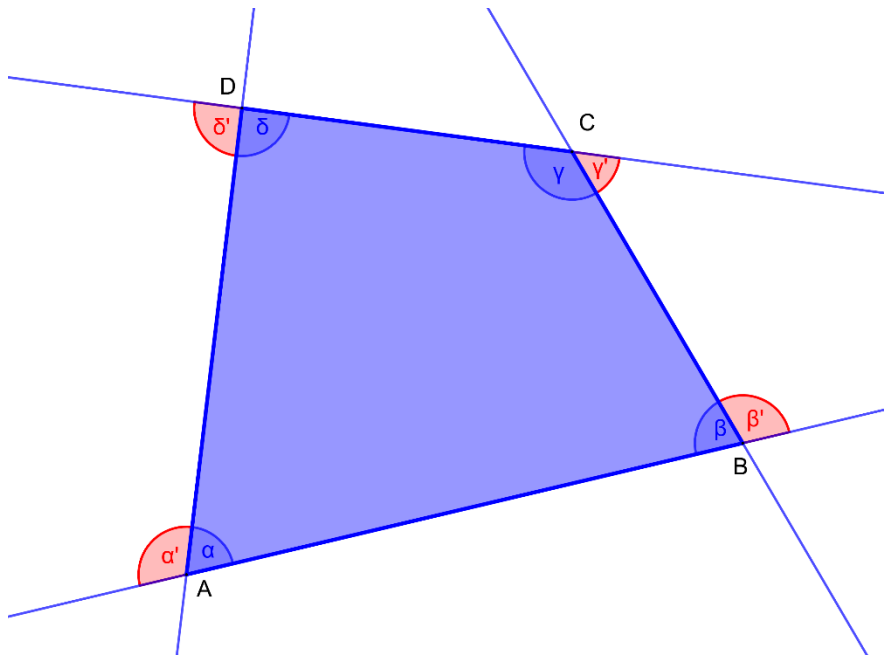


**Minden négyzet:** téglalap is, rombusz is, paralelogramma is, trapéz is, **deltoid!** is.

**Minden téglalap:** paralelogramma is, trapéz is.

**Minden rombusz:** paralelogramma is, trapéz is.

**Minden paralelogramma:** trapéz is.



Csúcsok:  $ABC$  nagy betűi figyelve körül járásra

Szögek: Hasonlóan, mint háromszögeknél,  $D$  csúcsnál  $\delta$

Oldalak: Nincs rá szabály, az egyenlő hosszúságú oldalak vannak ugyanolyan betűvel jelölve

Belső szögek összege:  $360^\circ \rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

Belső és külső szögek: Ugyanúgy, mint háromszögeknél, az összegük  $180^\circ$

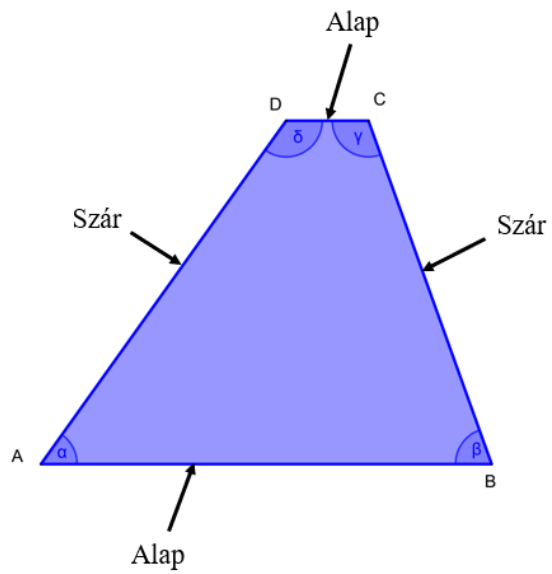
$$\alpha + \alpha' = 180^\circ$$

$$\beta + \beta' = 180^\circ$$

$$\gamma + \gamma' = 180^\circ$$

$$\delta + \delta' = 180$$

# Trapéz

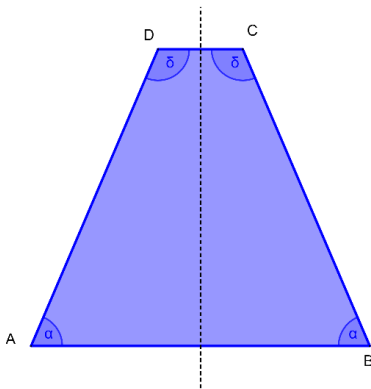


- A párhuzamos oldalak az alapok
- Az alapokat összekötő oldalak a szárak
- Azonos száron fekvő szögek összege  $180^\circ$
- Átlói nem egyenlő hosszúak, nem felezik egymást

## Speciális trapézok

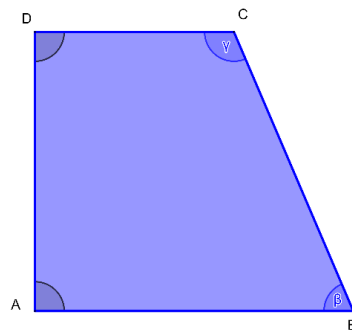
### Szimmetrikus trapéz (húrtrapéz)

- A két szára egyenlő hosszú
- Az átlói egyenlő hosszúak
- 1 szimmetria tengelye van
- Alapon fekvő szögei egyenlőek

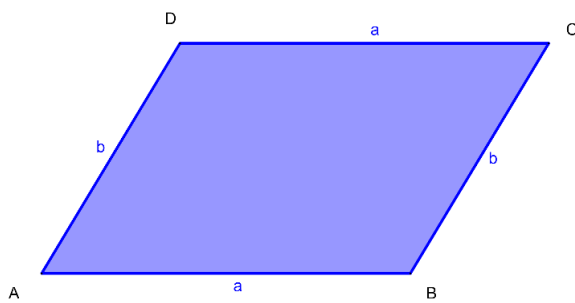


### Derékszögű trapéz

- Van 2 derékszöge
- Átlók nem egyenlő hosszúak
- Nincs szimmetria tengelye

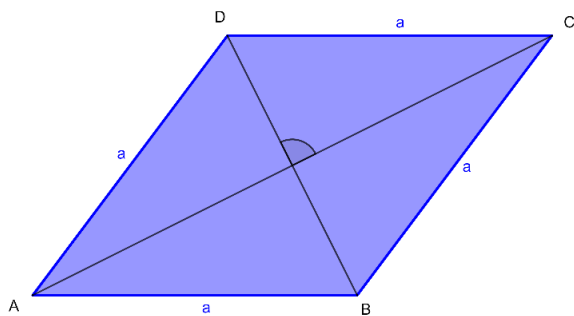


## Paralelogramma



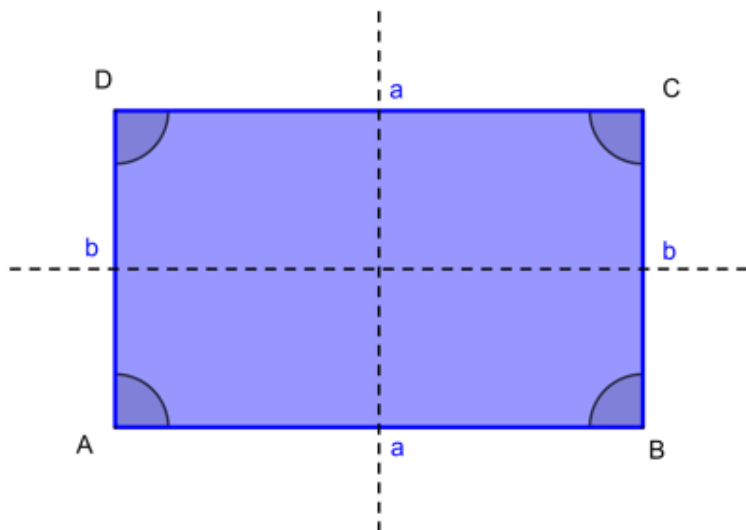
- Szemközti oldalai párhuzamosak és ugyanolyan hosszúak
- Átlói felezik egymást
- Az egy oldalon fekvő szögeinek az összege  $180^\circ$
- A szemközti szögei egyenlőek

## Rombusz



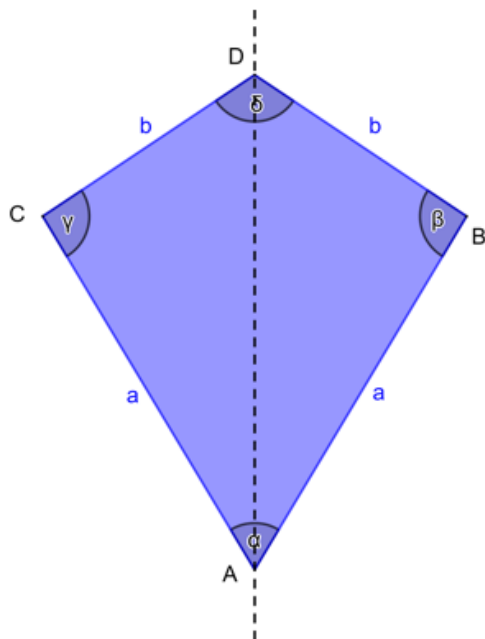
- Paralelogramma és a trapéz minden tulajdonsága igaz rá
- Minden oldala egyenlő
- Átlói merőlegesek egymásra

## Téglalap



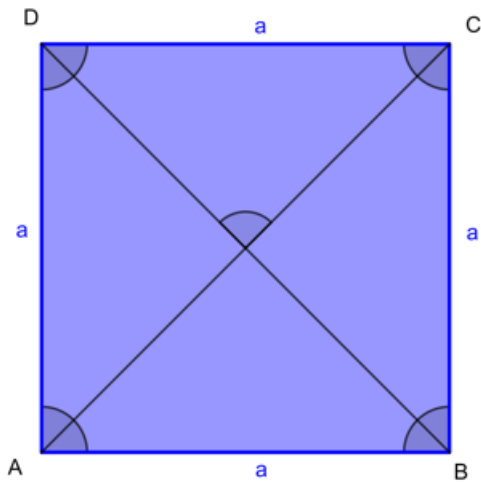
- Paralelogramma és a trapéz minden tulajdonsága igaz rá
- Minden szöge derékszög
- 2 szimmetria tengelye van, az oldalak felezők pontjainál

## Deltoid



- Az egyik átlója szimmetria tengely
- Szomszédos oldalai ugyanolyan hosszúak
- Szemközti szögei ugyanakkorák (szimmetria tengely különböző oldalain lévők)
- Szimmetria tengely felezni fogja azokat a szögeket, amiken átmegey
- Átlók merőlegesek egymásra
- Az az átló, ami a szimmetria tengely, felezni fogja a nem szimmetria tengely átlót

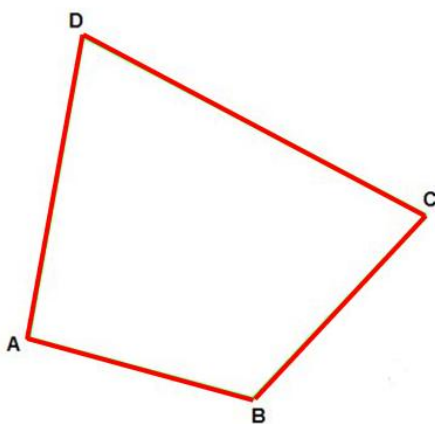
## Négyzet



- Trapéz, paralelogramma, téglalap, rombusz, deltoid minden tulajdonsága igaz rá
- Átlói felezik a szögeket
- Összesen 4 szimmetriatengelye van:
- a 2 oldalfelező, és a 2 átló

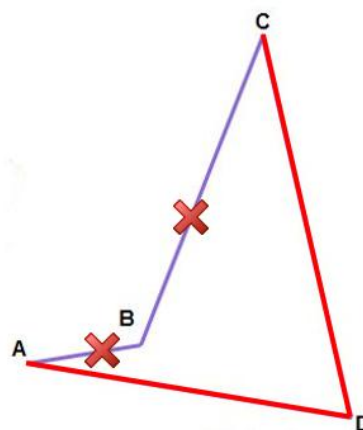
## Konvex és konkáv négyszögek

Konvex



Konvex: Minden oldalát be tudjuk festeni

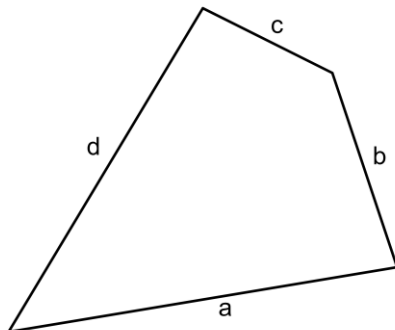
Konkáv



Konkáv: Nem tudjuk minden oldalát befesteni

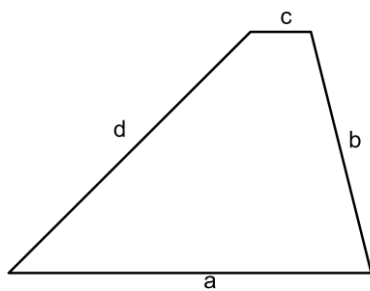
## Négyszögek kerülete

Általános négyszög



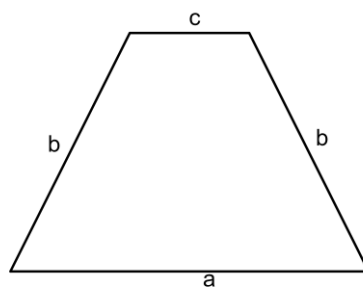
$$K = a + b + c + d$$

Trapéz



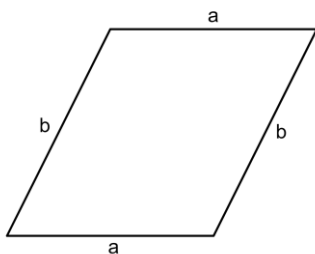
$$K = a + b + c + d$$

Szimmetrikus trapéz (húrtrapéz)



$$K = a + 2b + c$$

Paralelogramma

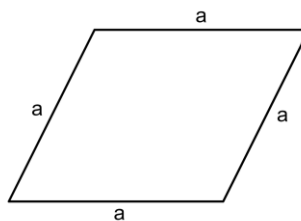


$$K = a + a + b + b$$

$$K = 2a + 2b$$

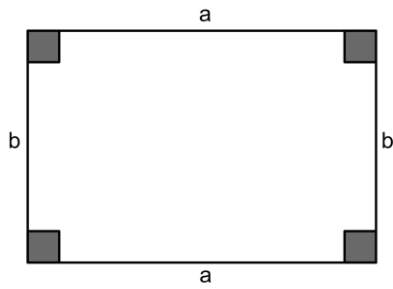
$$K = 2 \cdot (a + b)$$

Rombusz



$$K = 4a$$

**Téglalap**

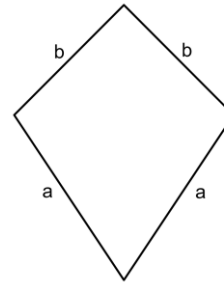


$$K = a + a + b + b$$

$$K = 2a + 2b$$

$$K = 2 \cdot (a + b)$$

**Deltoid**

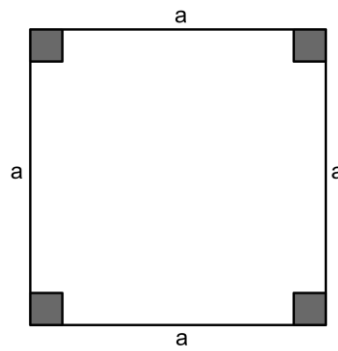


$$K = a + a + b + b$$

$$K = 2a + 2b$$

$$K = 2 \cdot (a + b)$$

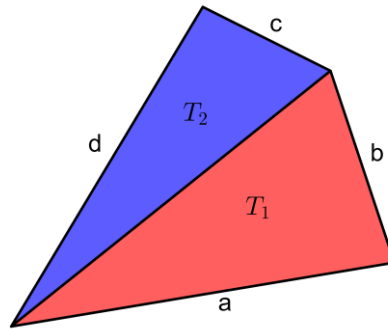
**Négyzet**



$$K = 4a$$

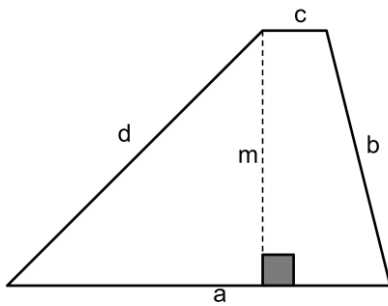
# Négyszögek területe

## Általános négyszög



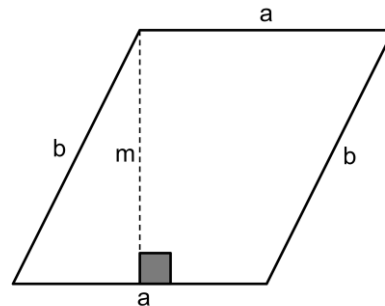
$$T = T_{\Delta 1} + T_{\Delta 2}$$

## Trapéz



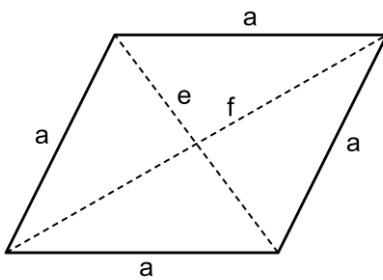
$$T = \frac{a + c}{2} \cdot m$$

## Paralelogramma



$$T = a \cdot m$$

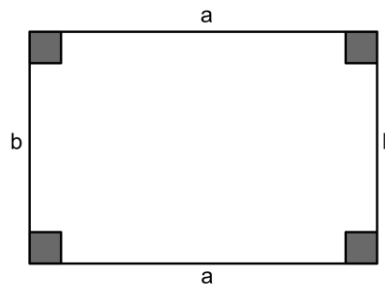
## Rombusz



$$T = a \cdot m$$

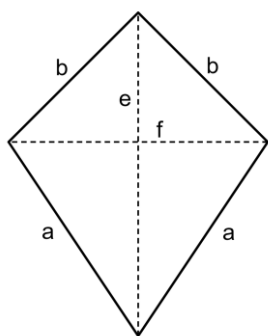
$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$

## Téglalap



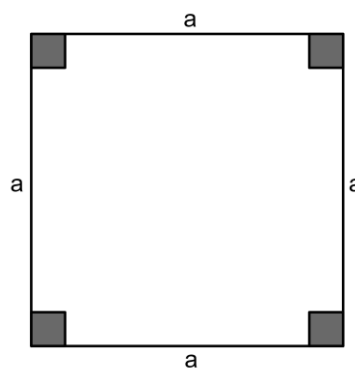
$$T = a \cdot b$$

### Deltoid



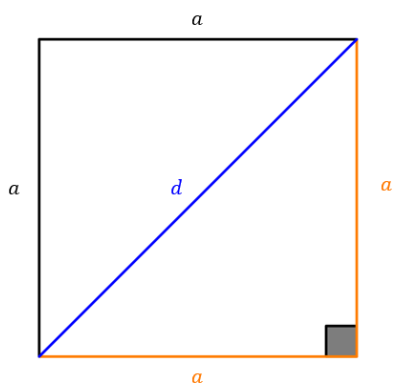
$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$

### Négyzet



$$T = a \cdot a$$
$$T = a^2$$

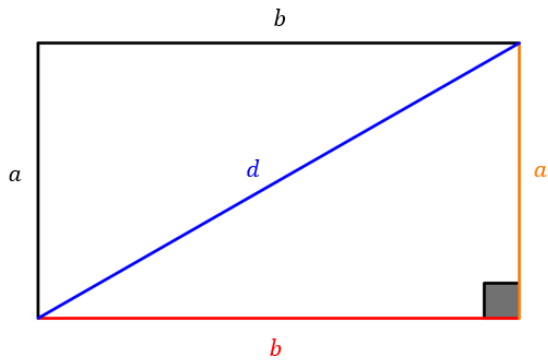
### Négyzet átlója



Átló:

$$d = \sqrt{2} \cdot a$$

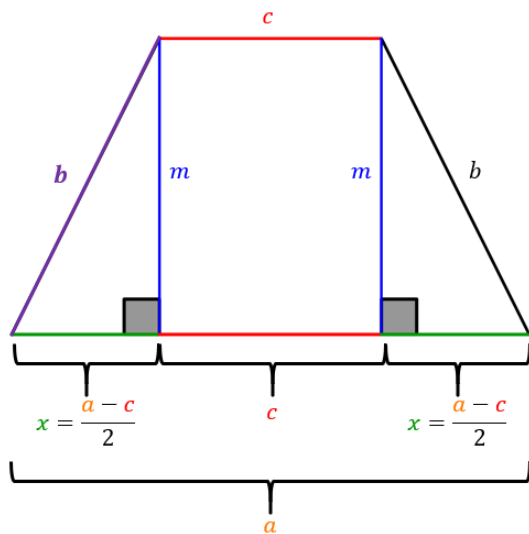
## Téglalap átlója



Átló:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

## Húrtrapéz magassága



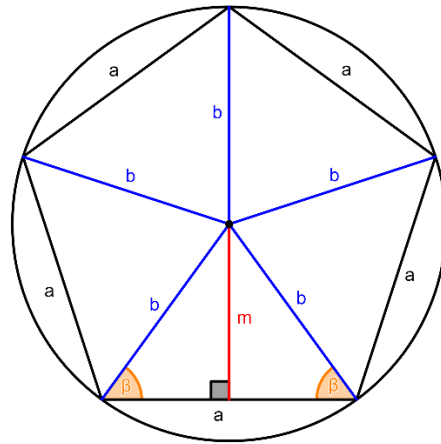
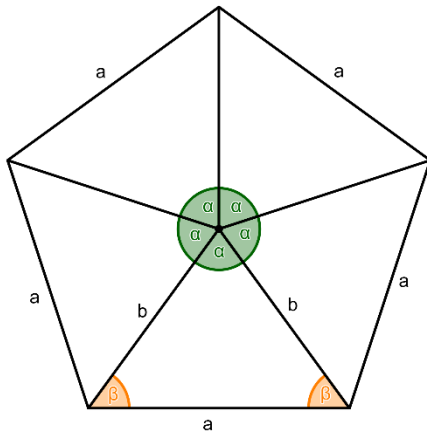
Pitagorasz-tétel:

$$x^2 + m^2 = b^2 \quad / -x^2$$

$$m^2 = b^2 - x^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$m = \sqrt{b^2 - x^2}$$

## Szabályos ötszög



5 oldal és 5 csúcs

Minden oldala és szöge egyenlő

Egyenlőszárú háromszögekre bontható

$$\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 54^\circ$$

Belső szög:  $2 \cdot \beta = 108^\circ$

Külső szög:  $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

Kerület:  $K = 5 \cdot a$

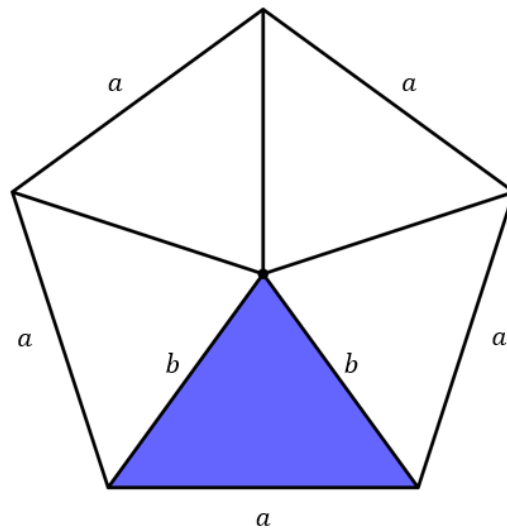
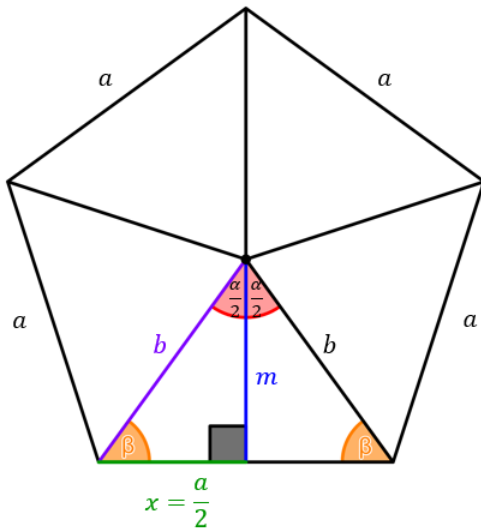
Terület:  $T_{\text{ötszög}} = 5 \cdot T_{\text{háromszög}}$

$$T_{\text{háromszög}} = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{b \cdot b \cdot \sin \alpha}{2}$$

A köré írt kör sugara:  $r = b$

Szimmetria tengelyek száma: 5

## Ötszög magassága, területe



**Középponti szög:**

$$\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

**Egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei:**

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 54^\circ$$

**Középponti szög fele:**

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

**Magasság:**

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x}{m} \rightarrow m = \frac{x}{\operatorname{tg} \gamma}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m}{x} \rightarrow m = x \cdot \operatorname{tg} \beta$$

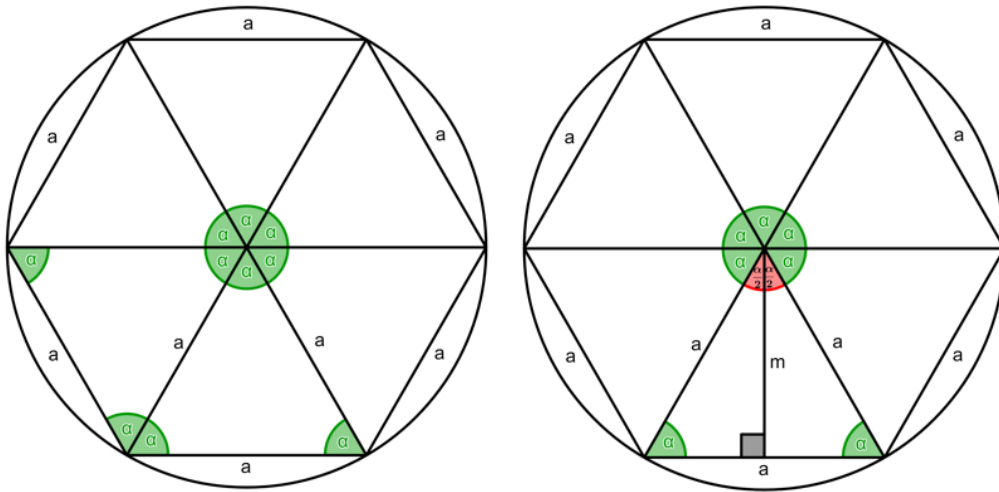
**Háromszög területe:**

$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot m}{2}$$

**Ötszög területe:**

$$T = 5 \cdot T_{\Delta}$$

## Szabályos hatszög



6 oldal és 6 csúc

Minden oldala és szöge egyenlő

Szabályos háromszögre bontható

$$\alpha = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 60^\circ$$

Belső szög:  $2 \cdot \beta = 120^\circ$

Külső szög:  $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

Kerület:  $K = 6 \cdot a$

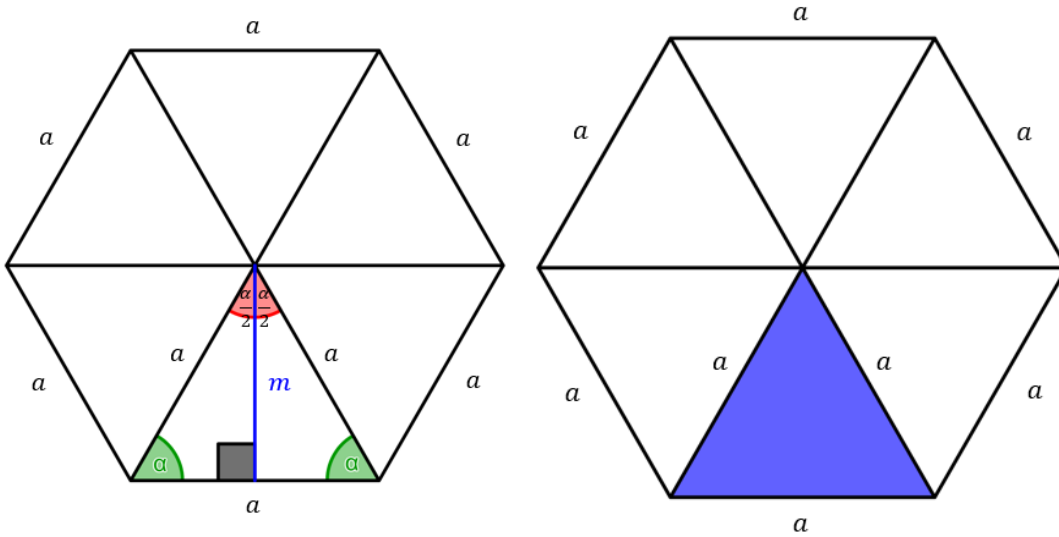
Terület:  $T_{\text{ötszög}} = 6 \cdot T_{\text{háromszög}}$

$$T_{\text{háromszög}} = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{a \cdot a \cdot \sin \alpha}{2}$$

A köré írt kör sugara:  $r = a$

Szimmetria tengelyek száma: 6

## Hatszög magassága, területe



**Középponti szög:**

$$\alpha = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

**Egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei:**

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 60^\circ$$

**Középponti szög fele:**

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

**Magasság:**

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

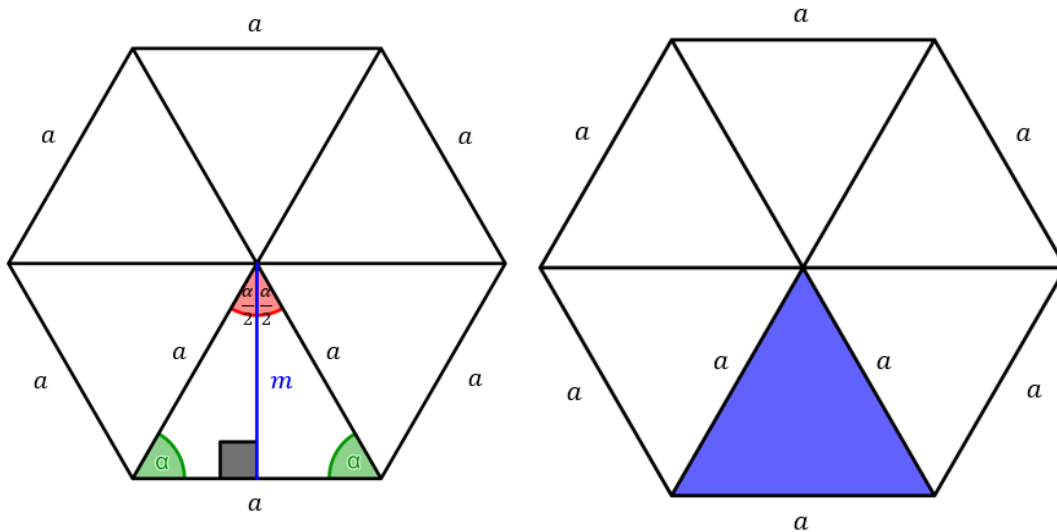
**Háromszög területe:**

$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{a \cdot a \cdot \sin 60^\circ}{2}$$

**Hatszög területe:**

$$T = 6 \cdot T_{\Delta}$$

## Szabályos sokszögek ( $n$ ) magassága, területe



Középponti szög:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

Egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei:

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$$

Középponti szög fele:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}$$

Magasság:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x}{m} \rightarrow m = \frac{x}{\operatorname{tg} \gamma}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m}{x} \rightarrow m = x \cdot \operatorname{tg} \beta$$

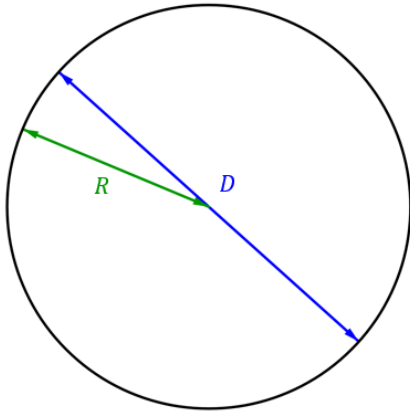
Háromszög területe:

$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot m}{2}$$

Sokszög területe:

$$T = n \cdot T_{\Delta}$$

## Kör



**Sugár–Átmérő:**

$$D = 2 \cdot R$$

$$R = \frac{D}{2}$$

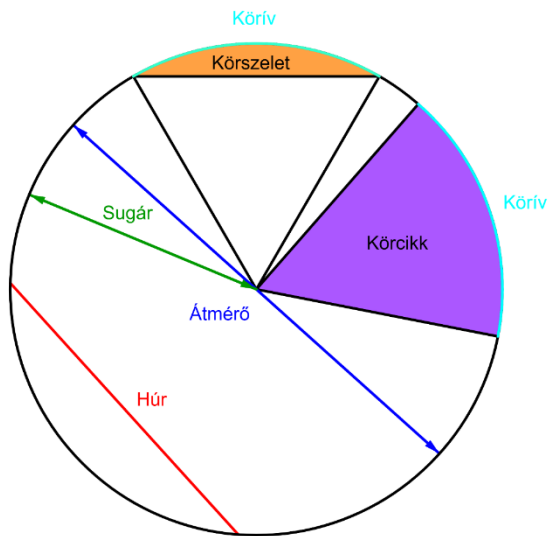
**Kerület:**

$$K = 2 \cdot R \cdot \pi = D \cdot \pi$$

**Terület:**

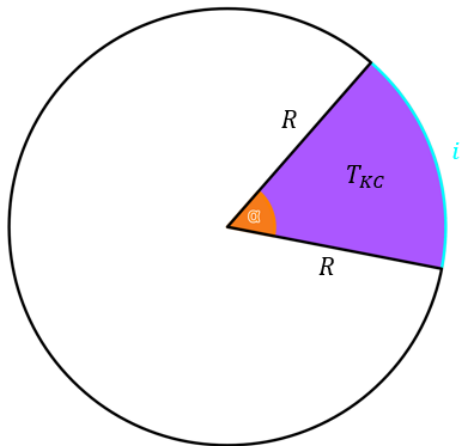
$$T = R^2 \cdot \pi = \frac{D^2}{4} \cdot \pi$$

## Kör részei



- A körvonal két pontját összekötő szakaszt **húrnak** nevezzük
- A legnagyobb húr átmegy a középponton, neve **átmérő**, jele:  $D, d$
- A kör középpontját és a körvonal egy pontját összekötő szakasz neve **sugár**, jele:  $R, r$
- A körvonalat darabokra osztva **köríveket** kapunk
- Két sugár és egy körív **körcikket** vág ki a körből
- A körív két végpontját összekötő húr és a körív által határolt alakzat neve **körszelet**

## Kör ívhossza, körcikk területe



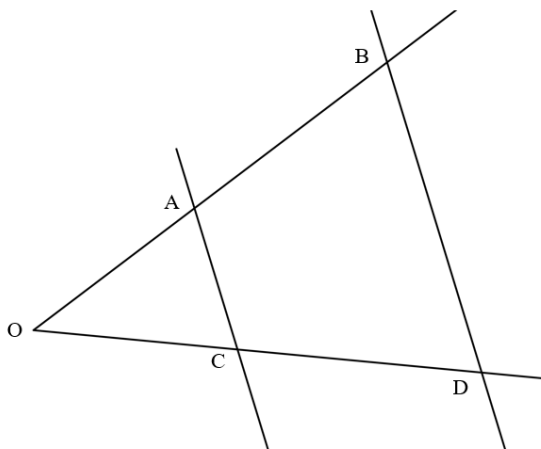
Körív:

$$i = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot K = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \cdot R \cdot \pi = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot R \cdot \pi$$

Körcikk területe:

$$T_{KC} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot T$$

## Párhuzamos szelők tétele



$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|BD|}$$

# Térgeometria

## Jelölések térgeometriában

### Téglatest, Hasáb, Kocka

Oldalak:  $a, b, c$

Hasáb magassága:  $m, M, h, H$

Átlók:  $d, e, f, g$

### Henger

Sugár:  $r, R$

Átmérő:  $d, D$

Magasság:  $m, M, h, H$

### Gúla, Csonkagúla

Alapélek:  $a, c$

Oldalél:  $b$

Test magasság:  $M, H$

Oldallap (háromszög) magassága:  $m, h$

### Kúp, Csonkakúp

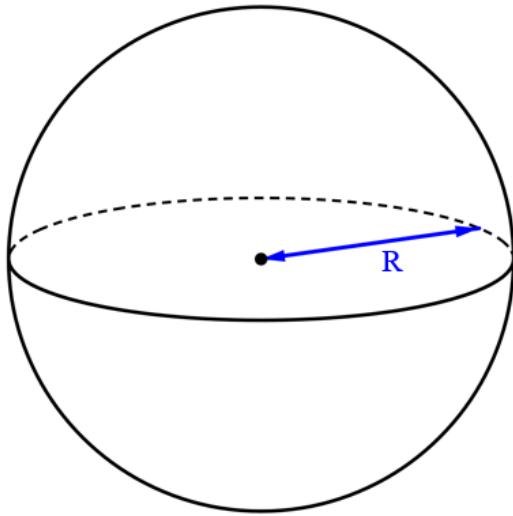
Sugarak:  $R, r$

Átmérők:  $d, D$

Alkotó:  $a$

Test magasság:  $M, H$

# Gömb



Átmérő ( $D$ ):

$$D = 2 \cdot R$$

Sugár ( $R$ ):

$$R = \frac{D}{2}$$

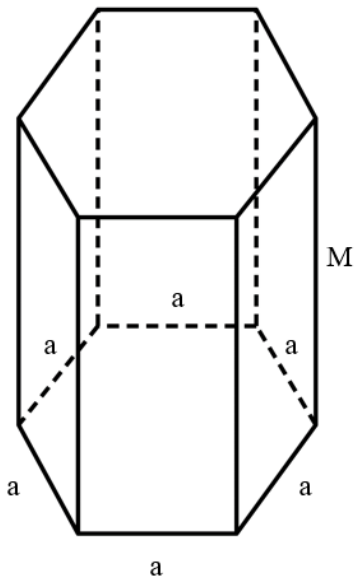
Felszín ( $A$ ):

$$A = 4 \cdot R^2 \cdot \pi$$

Térfogat ( $V$ ):

$$V = \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3}$$

## Hasáb



- Elnevezés: Az alaplapon alapján (háromszög alapú, négyzet alapú, ötszög alapú, hatszög alapú...)
- 2-féle oldal → 2 db Alaplapon, annyi oldallapon, ahány csúcsa van az alaplapon ( $n$ )
- Alaplapon: Szabályos sokszögek
- Oldallapon: Téglalapon
- Alaplapon területe:  $T_{alapon}$
- Oldallapon területe:  $T_{oldal} = a \cdot M$
- Palást: Oldallapon területének összege →  $T_{palást} = n \cdot T_{oldal}$

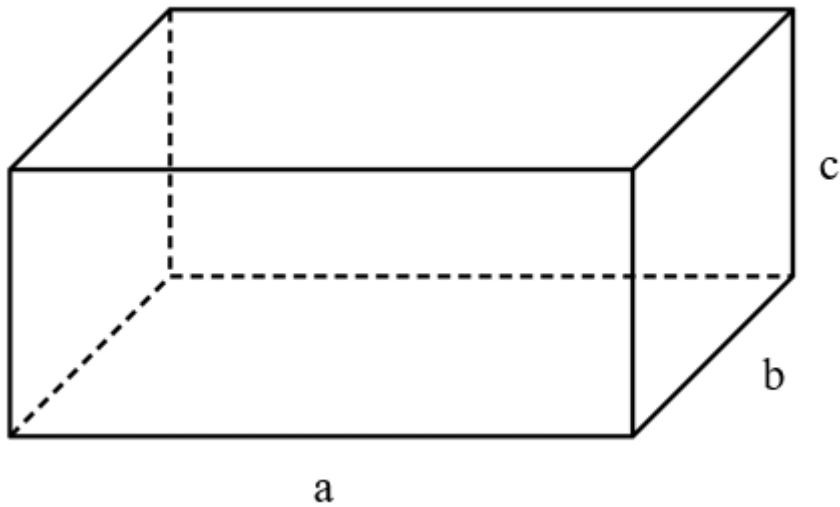
**Felszín ( $A$ ):**

$$A = 2 \cdot T_{alapon} + T_{palást}$$

**Térfogat ( $V$ ):**

$$V = T_{alapon} \cdot M$$

## Téglatest



- 3-féle oldal, minden oldalból 2 db (egymással szemben)
- Lapok: Téglalapok
- Alsó és felső lapok területe:  $T_1 = a \cdot b$
- Jobb és bal lapok területe:  $T_2 = b \cdot c$
- Szemközti és hátsó lapok területe:  $T_3 = a \cdot c$

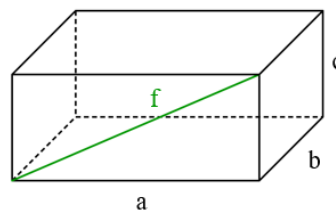
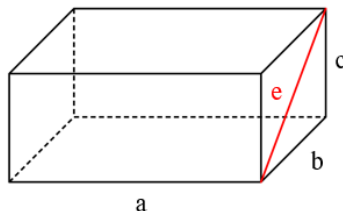
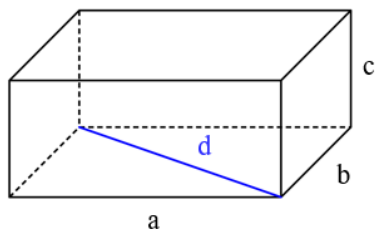
**Felszín (A):**

$$A = 2 \cdot T_1 + 2 \cdot T_2 + 2 \cdot T_3 = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$$

**Térfogat (V):**

$$V = a \cdot b \cdot c$$

## Téglatest lapátlók



$$a^2 + b^2 = d^2$$

$$/\sqrt{\quad}$$

$$b^2 + c^2 = e^2$$

$$/\sqrt{\quad}$$

$$a^2 + c^2 = f^2$$

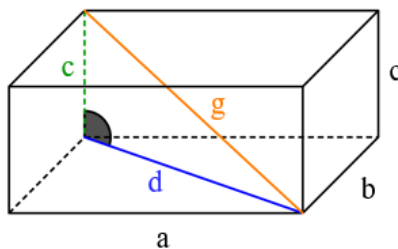
$$/\sqrt{\quad}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$e = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$f = \sqrt{a^2 + c^2}$$

## Téglatest testátló



$$d^2 + c^2 = g^2$$

$$/d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

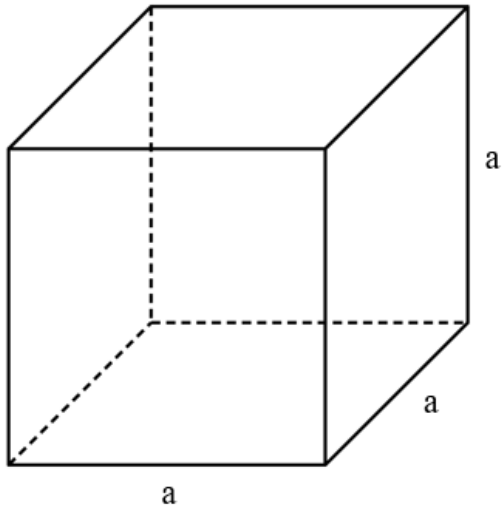
$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + c^2 = g^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = g^2$$

$$/\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = g$$

## Kocka



- 1-féle oldal  $\rightarrow$  6 db
- Lapok: Négyzetek
- Lapok területe:  $T = a \cdot a = a^2$

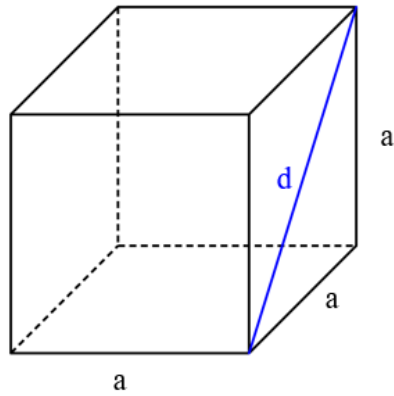
**Felszín (A):**

$$A = 6 \cdot T = 6 \cdot a^2$$

**Térfogat (V):**

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

## Kocka lapátló



$$a^2 + a^2 = d^2$$

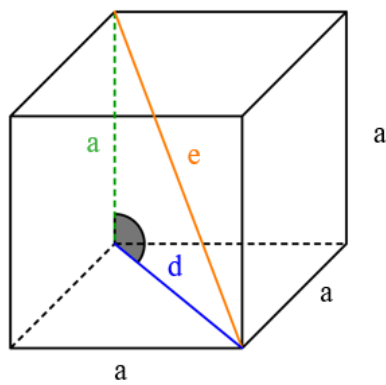
$$/d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$2a^2 = d^2$$

$$/\sqrt{\quad}$$

$$d = \sqrt{2} \cdot a$$

## Kocka testátló



$$d^2 + a^2 = e^2$$

$$/d = \sqrt{2} \cdot a$$

$$(\sqrt{2} \cdot a)^2 + a^2 = e^2$$

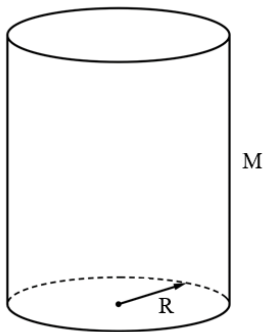
$$2a^2 + a^2 = e^2$$

$$3a^2 = e^2$$

$$/\sqrt{\quad}$$

$$e = \sqrt{3} \cdot a$$

## Henger



- 2-féle oldal  $\rightarrow$  2 Alaplap, 1 Palást
- Alaplapok: Körök
- Palást (oldallap): Téglalap
- Alaplapok területe:  $T_{alap} = R^2 \cdot \pi$
- Palást területe:  $T_{palást} = K \cdot M = 2 \cdot R \cdot \pi \cdot M$

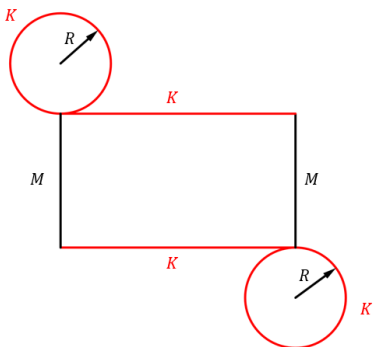
**Felszín (A):**

$$A = 2 \cdot T_{alap} + T_{palást} = 2 \cdot R^2 \cdot \pi + 2 \cdot R \cdot \pi \cdot M$$

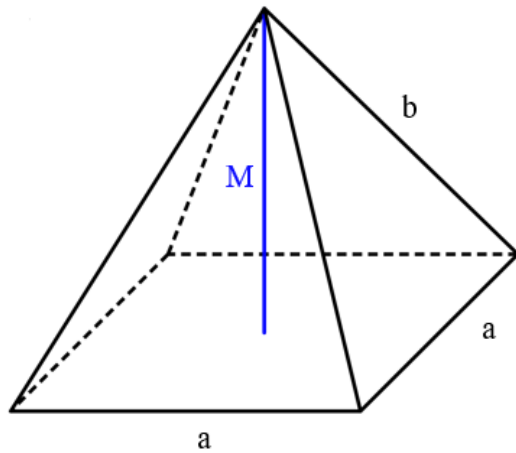
**Térfogat (V):**

$$V = T_{alap} \cdot M = R^2 \cdot \pi \cdot M$$

## Henger kiterítve



# Gúla



- Elnevezés: az alaplapon alapján (háromszög alapú, **négyzet alapú**, ötszög alapú, hatszög alapú...)
- 2-féle oldal → 1 db Alaplapon, annyi oldallapon, ahány csúcsa van az alaplapon ( $n$ )
- Alaplapon: Szabályos sokszög (általában négyzet)
- Oldallapon: Egyenlőszárú háromszögek (csak speciális esetben szabályos háromszög)
- Alaplapon területe:  $T_{alapon}$  (Négyzetnél:  $T_{alapon} = a^2$ )
- Oldallapon (egyenlőszárú háromszögek) területe:  $T_{oldal} = \frac{a \cdot m}{2}$
- Palást: Oldallapon területének összege →  $T_{palást} = n \cdot T_{oldal}$

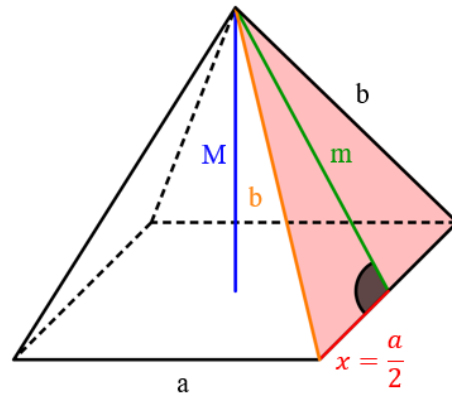
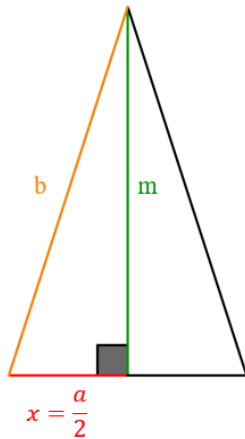
**Felszín ( $A$ ):**

$$A = T_{alapon} + T_{palást}$$

**Térfogat ( $V$ ):**

$$V = \frac{T_{alapon} \cdot M}{3}$$

## Gúla oldallapjának magassága



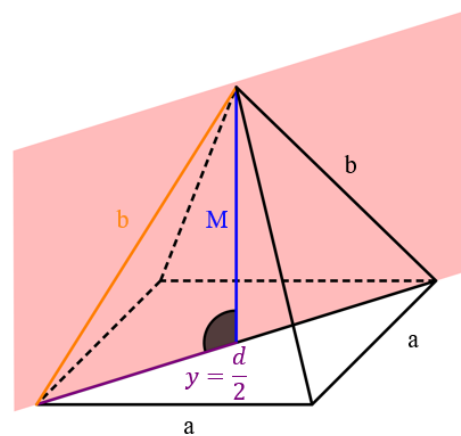
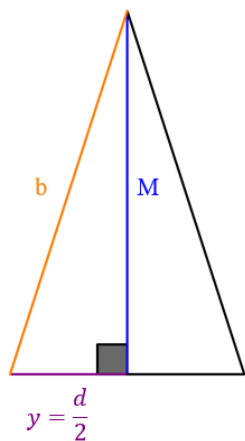
**Pitagorasz-tétel:**

$$x^2 + m^2 = b^2 \quad /-x^2$$

$$m^2 = b^2 - x^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$m = \sqrt{b^2 - x^2}$$

## Gúla metszete az oldalélek mentén



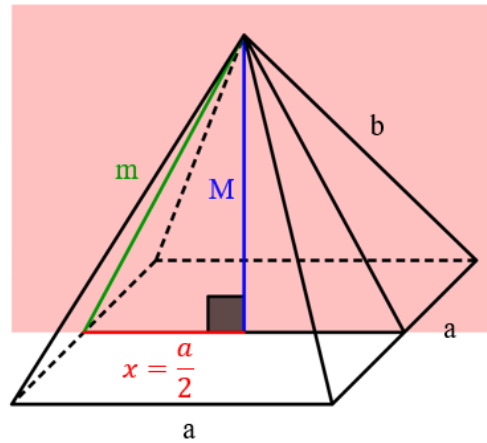
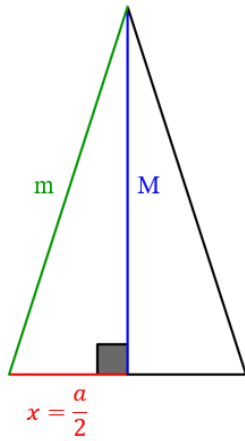
**Pitagorasz-tétel:**

$$y^2 + M^2 = b^2 \quad /-y^2$$

$$M^2 = b^2 - y^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$M = \sqrt{b^2 - y^2}$$

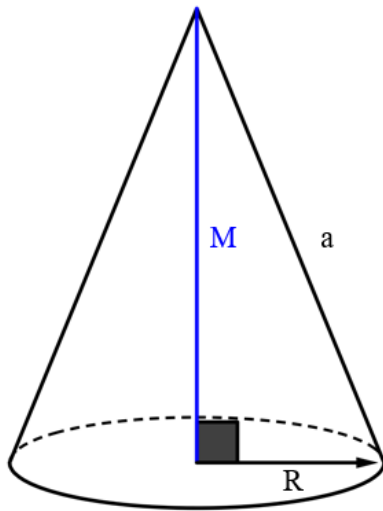
## Gúla metszete az alaplap felénél



**Pitagorasz-tétel:**

$$x^2 + M^2 = m^2$$

# Kúp



- 2-féle oldal → 1 db Alaplap, 1 db oldallap
- Alaplap: Kör
- Oldallap: Körcikk
- Alaplap területe:  $T_{alap} = R^2 \cdot \pi$
- Palást (Oldallap) területe:  $T_{palást} = R \cdot \pi \cdot a$

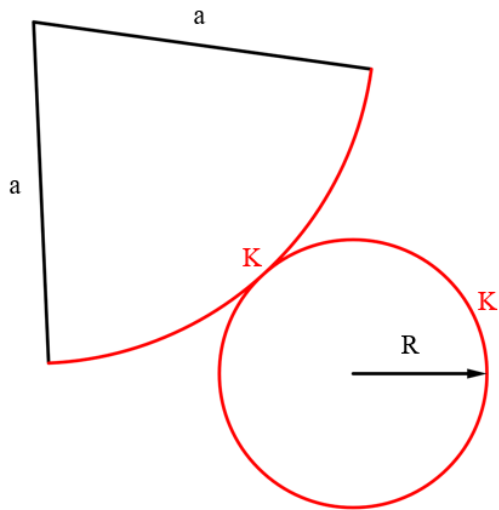
**Felszín (A):**

$$A = T_{alap} + T_{palást} = R^2 \cdot \pi + R \cdot \pi \cdot a$$

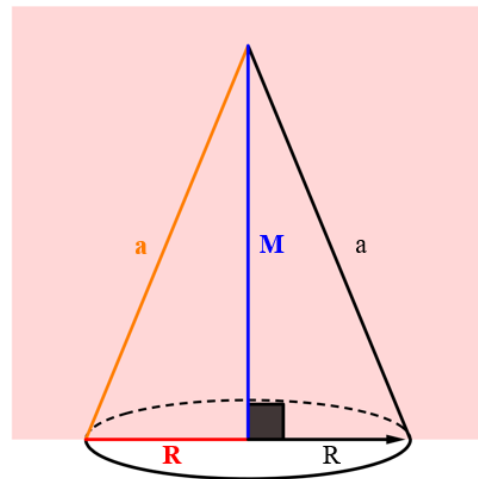
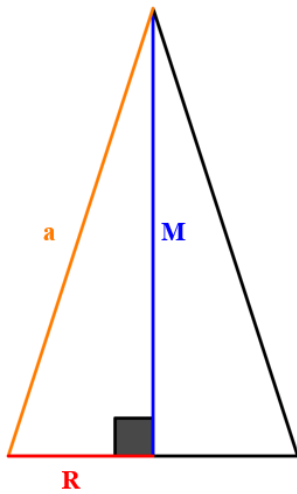
**Térfogat (V):**

$$V = \frac{T_{alap} \cdot M}{3} = \frac{R^2 \cdot \pi \cdot M}{3}$$

## Kúp kiterítve



## Kúp metszete



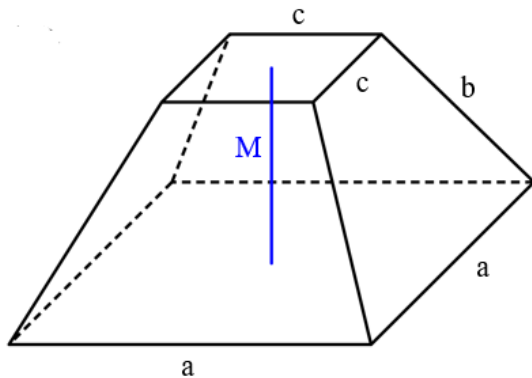
Pitagorasz-tétel:

$$R^2 + M^2 = a^2 \quad / -R^2$$

$$M^2 = a^2 - R^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$M = \sqrt{a^2 - R^2}$$

## Csonkagúla



- Elnevezés: az alaplapon alapján (háromszög alapú, **négyzet alapú**, ötszög alapú, hatszög alapú...)
- 3-féle oldal → 2 db Alaplap (1 nagy, 1 kicsi), annyi oldallap, ahány csúcsa van az alaplaponak ( $n$ )
- Alaplapok: Szabályos sokszögek (általában négyzetek)
- Oldallapok: Szimmetrikus trapézok
- Nagyobb alaplap területe:  $T$  (négyzetnél:  $T = a^2$ )
- Kisebb alaplap területe:  $t$  (négyzetnél:  $t = c^2$ )
- Oldallapok (szimmetrikus trapézok) területe:  $T_{oldal} = \frac{a+c}{2} \cdot m$
- Palást: Oldallapok területének összege →  $T_{palást} = n \cdot T_{oldal}$

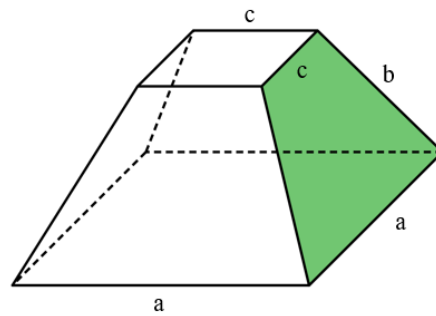
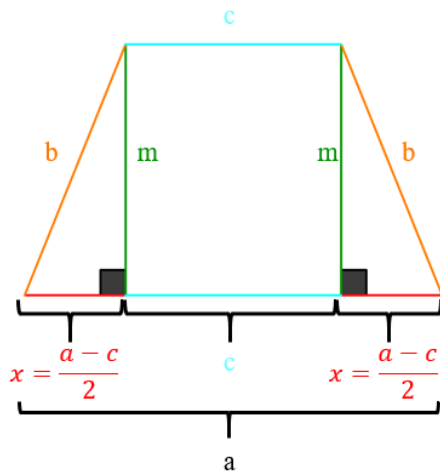
**Felszín (A):**

$$A = t + T + T_{palást}$$

**Térfogat (V):**

$$V = \frac{(t + \sqrt{t \cdot T} + T) \cdot M}{3}$$

## Csonkagúla oldallapjának magassága



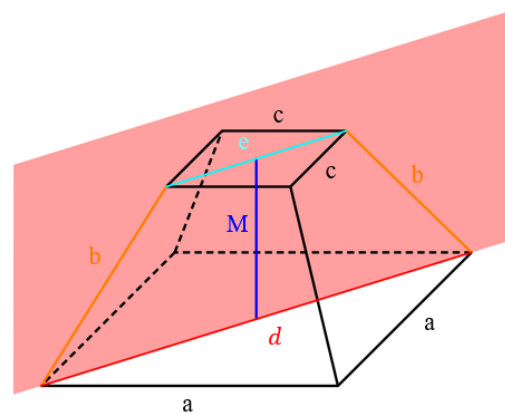
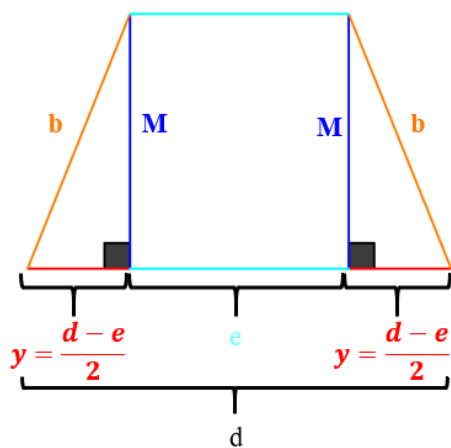
Pitagorasz-tétel:

$$x^2 + m^2 = b^2 \quad / -x^2$$

$$m^2 = b^2 - x^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$m = \sqrt{b^2 - x^2}$$

## Csonkagúla metszete az oldalélek mentén



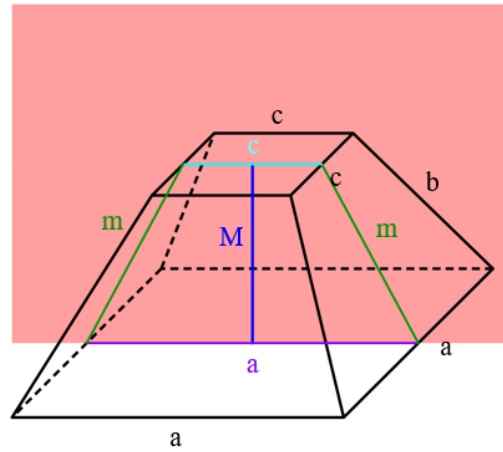
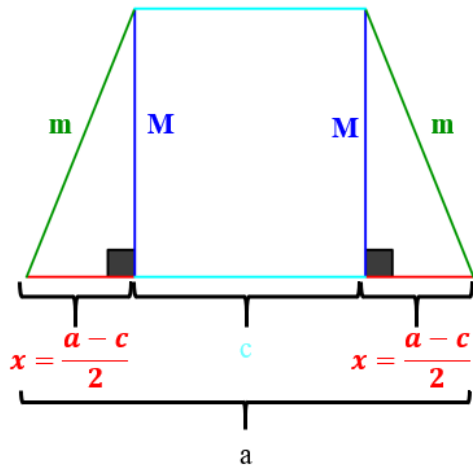
Pitagorasz-tétel:

$$y^2 + M^2 = b^2 \quad / -y^2$$

$$M^2 = b^2 - y^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$M = \sqrt{b^2 - y^2}$$

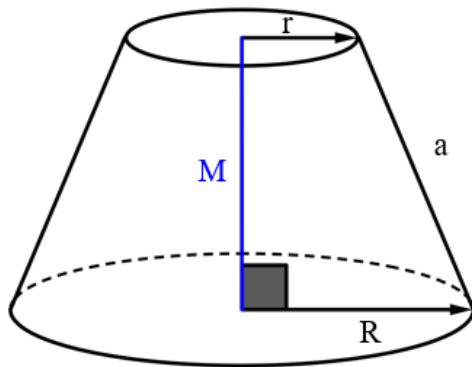
## Csonkagúla metszete az alaplap felénél



**Pitagorasz-tétel:**

$$x^2 + M^2 = m^2$$

## Csonkakúp



- 3-féle oldal  $\rightarrow$  2 db Alaplap (1 nagy, 1 kicsi), 1 oldallap
- Alaplapok: Körök
- Oldallap: Körcikkyszerű
- Kisebb alaplap (fed(ő)lap) területe:  $t = r^2 \cdot \pi$
- Nagyobb alaplap (alaplap) területe:  $T = R^2 \cdot \pi$
- Palást (Oldallap) területe:  $T_{\text{palást}} = (r + R) \cdot \pi \cdot a$

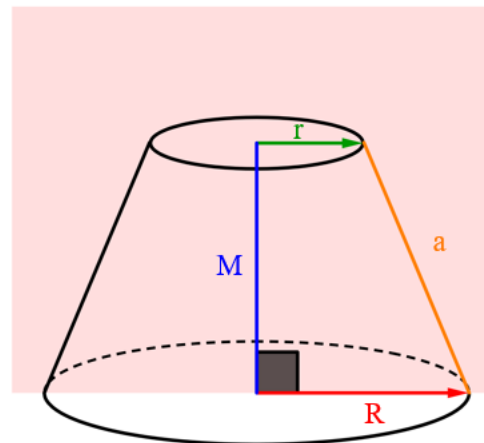
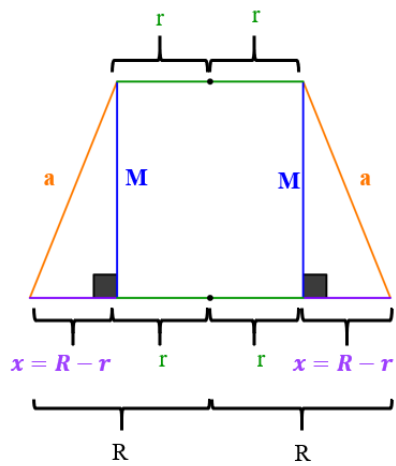
**Felszín (A):**

$$A = t + T + T_{\text{palást}} = r^2 \cdot \pi + R^2 \cdot \pi + (r + R) \cdot \pi \cdot a$$

**Térfogat (V):**

$$V = \frac{(r^2 + r \cdot R + R^2) \cdot \pi \cdot M}{3}$$

## Csonkakúp metszet



**Pitagorasz-tétel:**

$$x^2 + M^2 = a^2$$

# Sorozatok

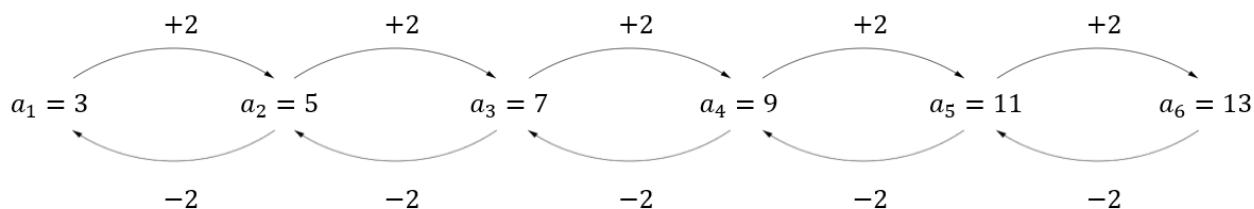
## Számtani sorozatok

$$a_1 = 3$$

$$d = 2$$

$a_1$  – első tag

$d$  – differencia, különbség



$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$a_n$  –  $n$ . tag

$$S_n = \frac{(2a_1 + (n - 1) \cdot d) \cdot n}{2} = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

$S_n$  – az első  $n$  tag összege

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

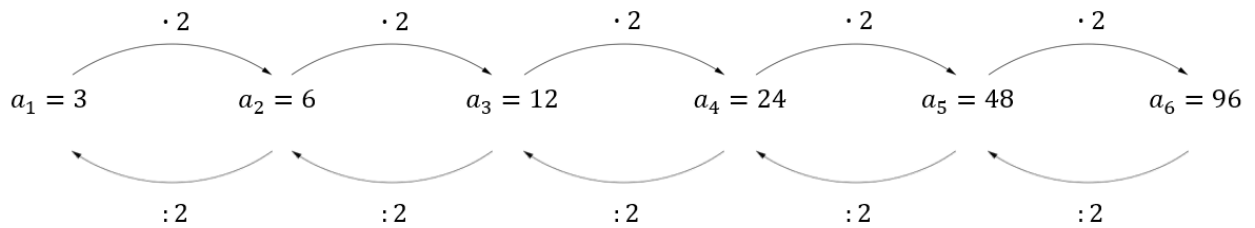
## Mértani sorozatok

$$a_1 = 3$$

$$q = 2$$

$a_1$  – első tag

$q$  – kvóciens, hányados



$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$a_n$  –  $n$ . tag

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$S_n$  – az első  $n$  tag összege

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

## Mértani sorozat százalékok

	Nő	Csökken
Példák	Minden héten 10 %-kal nő $q = 1,1$	Minden nap 5 %-kal csökken $q = 0,95$
	Minden hónapban 22 %-kal nő $q = 1,22$	Minden évben 38,7 %-kal csökken $q = 0,615$

## Hogyan ismerjük fel a számtani/mértani sorozatokat?

	Számtani sorozat	Mértani sorozat
<b>Kulcsszavak</b>	...-vel nő/csökken	...-szorosára/hányadára nő/csökken ...%-kal nő/csökken Kamat, hitel
<b>Példák</b>	Minden nap 5-tel csinál több ...	Minden hónapban 10%-kal nő az előző havihoz képest
	Minden hónapban 100-zal nő	Minden évben 25 %-kal csökken az előző évihez képest
	Minden évben 450-nel csökken	Minden héten az előző heti felére csökken
	Minden héten 4-gyel kevesebb... csinál	Minden nap a duplájára nő

# Kombinatorika

## Kiválasztás

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Számológépen:  $n \rightarrow nCr \rightarrow k$

Példa:

$$\binom{6}{2} = 15$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6 - 2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

Számológépen:



## Típuspéldák

	Variáció	Permutáció	Kombináció
<p><b>Miről ismerhető fel?</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Jelszavak</li> <li>• Számkombinációk</li> <li>• Számkártyák</li> <li>• Dobogós helyezések alakulása</li> <li>• Fagylalt gombócok variálása</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sorba rendezés</li> <li>• Ülésrend padon, asztalon, moziban, stb...</li> <li>• Fagylalt gombócok sorrendje</li> <li>• Felvonuláson résztvevők sorrendje</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Kiválasztás</li> <li>• Dobogós helyezettek kiválasztása</li> <li>• Ajándékok kiosztása</li> <li>• Jegy lyukasztás</li> <li>• Sokszögek átlóinak száma</li> <li>• Kártyák húzása</li> <li>• Lottó szelvény kitöltése</li> </ul>

# Statisztika

## Statisztikai mutatók

- **Módusz:** Az adatsokaságban leggyakrabban előforduló elem(ek)
- **Medián:** Az adatsokaságot növekvő sorrendbe rakva a középső elem
  - Páros elemű adatsokaság esetén nincs egy darab középső elem, ezért a középső két elem átlaga a medián.
- **Terjedelem:** A legnagyobb és legkisebb elem különbsége

Példák:

1. adatsor:            1      7      2      4      7

Sorba rendezve:    **1**      2      **4**      **7**      **7**

Az adatsor

**Módusza: 7**

**Mediánja: 4**

**Terjedelme: 7 – 1 = 6**

2. adatsor:            9      1      9      6      4      1

Sorba rendezve:    **1**      **1**      **4**      **6**      **9**      **9**

Az adatsor

**Móduszai: 1 és 9**

**Mediánja:  $\frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$**

**Terjedelme: 9 – 1 = 8**

## Szórás

- Átlagtól való átlagos eltérés
- Megadja, hogy az adatok átlagosan mennyivel térnek el az átlagtól

- Jele:  $\sigma$  (szigma)

- Kiszámítása:  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2 \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Ahol:

$$\sum_{i=1}^n \quad - \text{szumma jel}$$

$i = 1$  – 1. tagtól kezdve

$n$  –  $n$ .edik tagig

$x_i$  –  $i$  – edik tag

$\bar{x}$  – átlag

$n$  – adatok száma

## **Osztályközép**

- A legkisebb és a legnagyobb adat átlaga
- **Osztályközép:**  $\frac{x_{min} + x_{max}}{2}$
- *Osztályközép  $\neq$  Átlag*

## Számítási, mértani közép

	Számítási közép (átlag)	Mértani közép
Képlet	$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$	$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$
Példák	<p>4, 9</p> $A = \frac{4 + 9}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$	<p>4, 9</p> $G = \sqrt[2]{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$
	<p>6, 6</p> $A = \frac{6 + 6}{2} = \frac{12}{2} = 6$	<p>6, 6</p> $G = \sqrt[2]{6 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$
	<p>2, 4, 8</p> $A = \frac{2 + 4 + 8}{3} = \frac{14}{3} = 4,6$	<p>2, 4, 8</p> $G = \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 8} = \sqrt[3]{64} = 4$
	<p>7, 7, 7</p> $A = \frac{7 + 7 + 7}{3} = \frac{21}{3} = 7$	<p>7, 7, 7</p> $G = \sqrt[3]{7 \cdot 7 \cdot 7} = \sqrt[3]{343} = 7$

# Valószínűségszámítás

## Események valószínűsége

$$P = \frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes eset}}$$

$$0 \leq P \leq 1$$

## Visszatevéses mintavétel

Jelölések:

**Hibás / Selejtes / Rossz**

$$P_{\text{hibás}} = P_{\text{selejtes}} = P_{\text{rossz}}$$

**Jó / Hibátlan**

$$P_{\text{jó}} = P_{\text{hibátlan}}$$

$P_{\text{selejtes}}$

$$P_{\text{jó}} = 1 - P_{\text{selejtes}}$$

$$P_n = \binom{\text{húzások száma}}{\text{jó/rossz húzások száma}} \cdot P_{\text{rossz}}^{\text{rossz húzások száma}} \cdot P_{\text{jó}}^{\text{jó húzások száma}}$$

## Visszatevés nélküli mintavétel

Kedvező esetek száma:  $\binom{\text{jó darab száma}}{\text{jó húzások száma}} \cdot \binom{\text{rossz darab száma}}{\text{rossz húzások száma}}$

Összes eset száma:  $\binom{\text{összes darab szám}}{\text{húzások száma}}$

## Visszatevéses és visszatevés nélküli feladatok felismerése

	Visszatevéses	Visszatevés nélküli
Példák	Alkatrészek 11-es rúgás Fej vagy írás	Cukorka (Ennivaló) Lottó Kártyák
Kulcsszavak	Jó Rossz Hibás Selejt	
	20 alkatrészből 2 hibás. Mennyi a valószínűsége, hogy ha 5 alkatrészt választunk, akkor 2 hibás lesz közte?	
	$P_{hibás} = \frac{2}{20} = 0,1$ $P_{jó} = 1 - P_{hibás} = 1 - 0,1 = 0,9$ $P_2 = \binom{5}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^3 = 0,0729$	<p>Összes eset: <math>\binom{20}{5} = 15\,504</math></p> <p>Kedvező esetek: <math>\binom{2}{2} \cdot \binom{18}{3} = 1 \cdot 816 = 816</math></p> $P_2 = \frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes eset}} = \frac{816}{15\,504} = 0,0526$
	<p><b>A két megoldás közül a visszatevéses a jó, a másik csak akkor, ha feladat kihangsúlyozza, hogy nem tesszük vissza az alkatrészeket, azért lett kétféle módon megcsinálva, hogy látszódjon a különbség az eredmények között.</b></p>	