Függvények

Függvények jellemzése

Értelmezési tartomány

1. Jelölés: É.T. vagy D_f
2. Megadja, hogy a függvény milyen x értékek mentén van értelmezve (vízszintesen nézzük)
3. Általában, minden x-re értelmezve vannak a függvények, de van pár kivétel is

Értékkészlet

1. Jelölés: É.K vagy R_f
2. Megadja, hogy a függvény milyen y értékeket vehet fel (függőlegesen nézzük)
3. Változó, van, ahol minden y-t felvehet a függvény, van, ahol csak nem negatív y-t vehet fel, van, ahol csak bizonyos y-t nem vehet fel

Zérushely

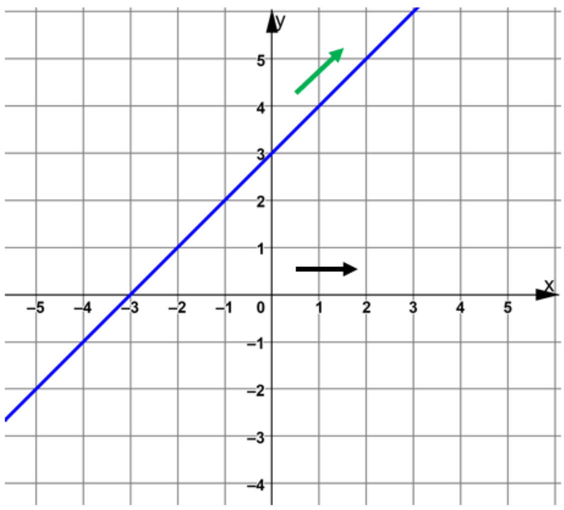
1. Jelölés: Z.H.
2. Megadja, hogy hol metszi a függvény az x tengelyt
3. **0, 1, 2, vagy akár több zérus hely is lehet** egy függvénynél
4. Ha tudjuk leolvassuk az ábrázolás után
5. Ha nem tudjuk leolvasni, mert nem egész számra esik, akkor kiszámítjuk
6. Kiszámítása: $f(x) = 0$ (a függvényt egyenlővé tesszük 0-val és megoldjuk x-re az egyenletet)

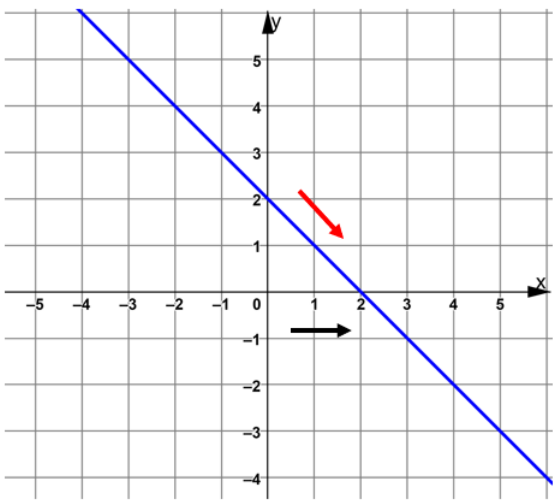
Tengelymetszet, Tengelypont

1. Jelölés: T.M., T.P.
2. Megadja, hogy hol metszi a függvény az y tengelyt
3. Vagy **0** vagy **1** tengelymetszet lehet, **több nem!**
4. Leolvasással meg tudjuk állapítani, ha nem (ritka), akkor 0-t helyettesítünk a függvénybe ($f(0) = \cdots$)

Monotonitás

1. Minden függvény, vagy Sz.m.n. vagy Sz.m.cs. Összefügg a szélső értékkel:
1. Ha nő és utána csökken, akkor ahol a váltás történik ott maximum lesz
2. Ha csökken és utána nő, akkor ahol a váltás történik ott minimum lesz
1. Hogy állapítsuk meg, hogy egy függvény nő vagy csökken?
2. x tengely mentén mindig jobbra felé nézzük, ha y növekszik, akkor **Sz.m.n.**, ha y csökken, akkor **Sz.m.cs.**





Szélsőérték

1. Minimum
2. Maximum
3. Megadás: Hely (x), Érték (y)
4. Pl.:

$Minimum\ koordinátái\ (\mathbf{2}; 3)$

$\boldsymbol{Minimum\ hely}:\ \mathbf{2}$

$\boldsymbol{Minimum\ érték}: \mathbf{3}$

$Maximum\ koordinátái\ (\mathbf{2}; \mathbf{4})$

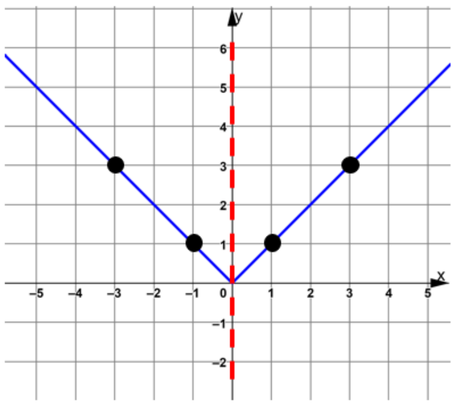
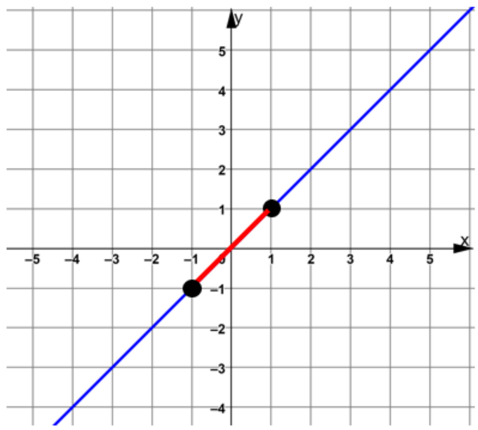
$\boldsymbol{Maximum\ hely}: \mathbf{2}$

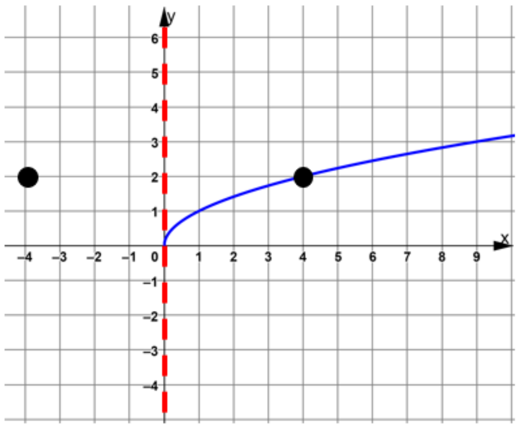
$\boldsymbol{Maximum\ érték}: \mathbf{4}$

Folytonosság

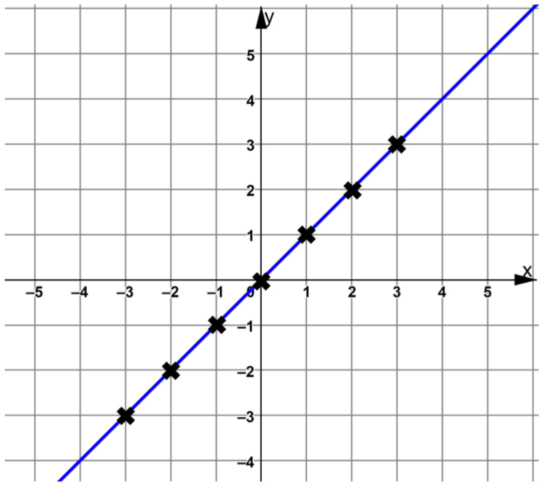
1. Folytonos egy függvény, ha végig tudjuk rajta húzni a ceruzánkat úgy, hogy nem kell közben felemelnünk.
2. Más szavakkal: Ha az értelmezési tartományán belül nincsen sehol szakadása.
3. Az alap függvények közül csak az $\frac{1}{x}$ függvény nem folytonos
4. Ahol felemeled a ceruzát, azt szakadásnak hívjuk

Paritás

	Páros	Páratlan
Definíció	Páros egy függvény, ha szimmetrikus az y tengelyre.	Páratlan egy függvény, ha szimmetrikus az origóra.
Konyhanyelven	Ha az y tengelyre teszünk egy tükröt ugyanazt látjuk mind a két felén.	Ha bármelyik pontját összekötjük az origóval, akkor ugyanazon az egyenesen ugyanolyan távolságban van egy másik pont is.
Példák	$f(x) = \lvert x \rvert,\ f(x) = x^2$	$f(x) = x,\ f(x) = \frac{1}{x}$
Ábrázolás		

	Sem páros sem páratlan
Definíció	Sem páros sem páratlan egy függvény, ha nem szimmetrikus sem y tengelyre, sem az origóra.
Konyhanyelven	Ha egy tükröt teszünk az y tengelyre nem fog megjelenni a függvény tükörképe a másik oldalon, ha pedig bármelyik pontját összekötjük az origóval nem lesz egy másik pont ugyanolyan távolságban.
Példák	$f(x) = \sqrt{x}$
Ábrázolás	

Lineáris függvény tudnivalók



1. Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

2. Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$

3. Zérushely: $f(x) = 0$, mindig 1 zérushely van

4. Tengelymetszet: a függvényben a szám, mindig 1 tengelymetszet van

5. Monotonitás:

1. Ha nincs az x-es kifejezés előtt mínusz előjel → Sz.m.n.

2. Ha van az x-es kifejezés előtt mínusz előjel → Sz.m.cs.

1. Szélsőérték: Sosincs

2. Paritás: Páratlan, ha nincs benne eltolás, sem páratlan sem páros, ha van benne eltolás

3. Törtek meredeksége:

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}x \to \frac{\boldsymbol{fel}}{\boldsymbol{jobbra}} \to \mathbf{3} - \boldsymbol{at\ jobbra}(\to)\ \mathbf{2} - \boldsymbol{t\ fel}\ (\uparrow)$$

$$f(x) = \Delta \cdot x + \otimes$$

Δ: $meredekség$

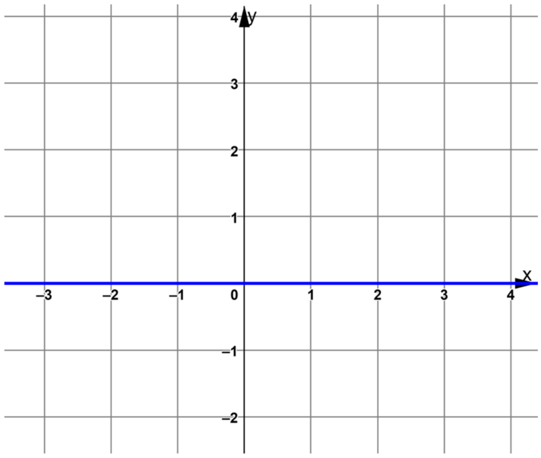
$\otimes$: $y\ tengely\ metszet$

Lineáris függvény ábrázolásának lépései:

1. **Megnézzük, hogy hol metszi az y tengelyt, azt bejelöljük**
2. **Megnézzük a meredekséget, és annyit lépkedünk jobbra / balra és fel / le amennyi a meredekség**

Konstans függvény tudnivalók

$\boldsymbol{f(x) = 0}$



$É.T.: x \in \mathbb{R}$

$É.K.: y = 0$

Zérushely: $\boldsymbol{Minden\ x\ Z.H.}$

Tengelypont: $y = 0$

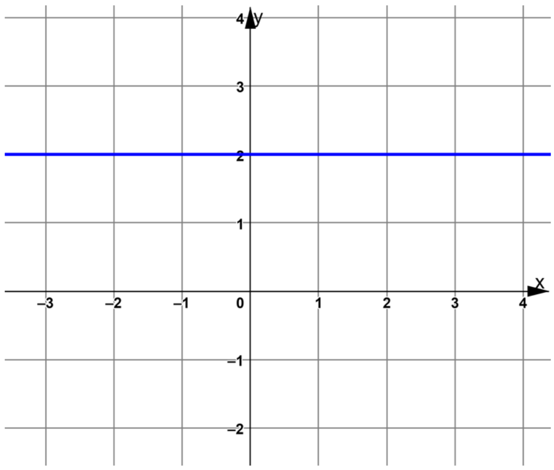
Monotonitás: $Se\ Sz.m.n.,\ se\ Sz.m.cs.$

Szélsőérték: Nincs

Folytonosság: Folytonos

Paritás: Páros, és **páratlan** is

$\boldsymbol{f(x) \neq 0}$



$É.T.: x \in \mathbb{R}$

$É.K.: y = 2\ (f(x) = 2\ esetén)$

Zérushely: $Nincs$

Tengelypont: $y = 2$

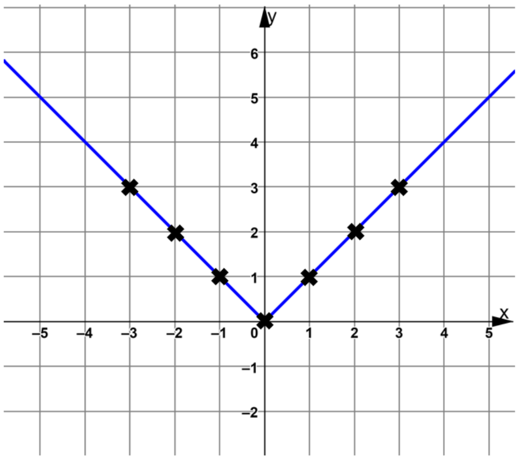
Monotonitás: $Se\ Sz.m.n.,\ se\ Sz.m.cs.$

Szélsőérték: Nincs

Folytonosság: Folytonos

Paritás: Páros

Abszolútérték függvény tudnivalók



1. Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
2. Értékkészlet: Függőleges eltolástól függ pl.: $f(x) = |x| - 2 \rightarrow R_f: [-2; \infty[$
3. Zérushely: $f(x) = 0$, lehet 0, 1, vagy 2 zérushely is (Függőleges eltolástól függ)
4. Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, mindig 1 tengelymetszet van
5. Monotonitás:

1. Vízszintes eltolástól függ → Először Sz.m.cs. minimum helyig, aztán Sz.m.n.
2. Ha az abszolútértékjel előtt van mínusz előjel → Először Sz.m.n. maximum helyig, aztán Sz.m.cs.

1. Szélsőérték: mindig van, ha nincs mínusz előjel az abszolútérték előtt, akkor minimum, ha van mínusz előjel, akkor maximum
2. Paritás: Páros, ha nincs benne vízszintes eltolás, vagy csak nyújtás van benne, sem páros, sem páratlan, ha van benne vízszintes eltolás
3. Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
4. Vízszintes eltolás megadja a monotonitási határokat, valamint a minimum/maximum helyét

Eltolások

$f(x) = |x + \Delta| + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

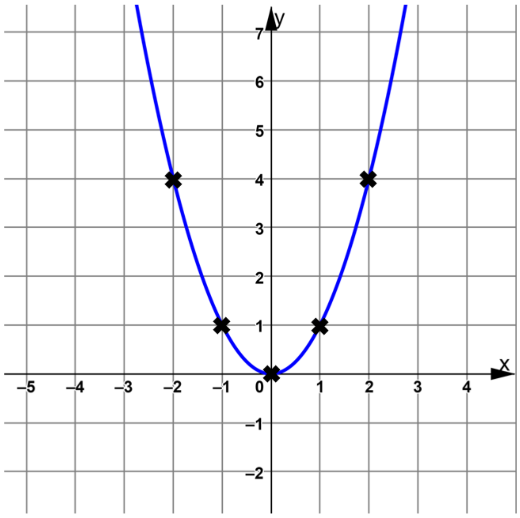
$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Abszolútérték függvény ábrázolásának lépései:

1. **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
2. **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (Minimum, vagy maximum)**
3. **A csúcsból kiindulva a sima abszolútérték függvényt ábrázoljuk (1-et jobbra 1-et fel, 1-et balra 1-et fel)**

Másodfokú függvény tudnivalók



1. Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$
2. Értékkészlet: Függőleges eltolástól függ pl.: $f(x) = x^2 + 3 \rightarrow R_f$: $[3; \infty[$
3. Zérushely: $f(x) = 0$, lehet 0, 1, vagy 2 zérushely is (Függőleges eltolástól függ)
4. Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, mindig 1 tengelymetszet van
5. Monotonitás:
1. Vízszintes eltolástól függ → Először Sz.m.cs. minimum helyig, aztán Sz.m.n.
2. Ha a zárójel előtt van mínusz előjel → Először Sz.m.n. maximum helyig, aztán Sz.m.cs.
1. Szélsőérték: Mindig van, ha nincs mínusz előjel a zárójel előtt, akkor minimum, ha van mínusz előjel, akkor maximum
2. Paritás: Páros, ha nincs benne vízszintes eltolás, vagy csak nyújtás van benne, sem páros, sem páratlan, ha van benne vízszintes eltolás
3. Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
4. Vízszintes eltolás megadja a monotonitási határokat, valamint a minimum/maximum helyét

Eltolások

$f(x) = (x + \Delta)^2 + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor\ \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor\ \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor\ \leftarrow$

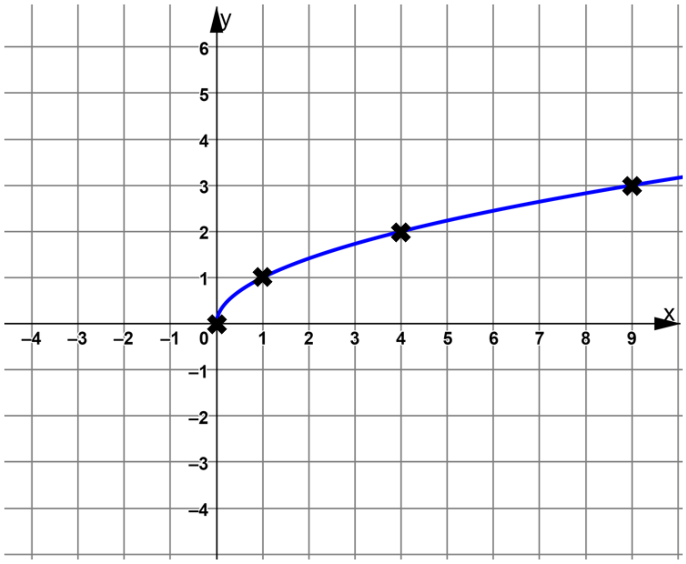
$ha\ \ominus\ akkor\ \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Másodfokú függvény ábrázolásának lépései:

1. **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
2. **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (Minimum, vagy maximum)**
3. **A csúcsból kiindulva a sima másodfokú függvényt ábrázoljuk**

Gyök függvény tudnivalók



1. Értelmezési tartomány: Gyök alatti kifejezés≥ 0
2. Értékkészlet: Függőleges eltolástól függ pl.: $f(x) = \sqrt{x} - 2 \rightarrow R_f: [-2; \infty[$
3. Zérushely: $f(x) = 0$, 0 vagy 1 zérushely lehet (Függőleges eltolástól függ)
4. Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 0 vagy 1 tengelymetszet lehet (Vízszintes eltolástól függ)
5. Monotonitás: Gyökjel előtti, valamint gyökön belüli mínusz előjelektől függ:
6. $\sqrt{x}, -\sqrt{-x} \rightarrow Sz.m.n.$, $\sqrt{-x}, -\sqrt{x} \rightarrow Sz.m.cs.$
7. Szélsőérték: Mindig van, az eltolások metszetében lesz, az, hogy minimum vagy maximum, a gyökjel előtti, valamint gyökön belüli mínusz előjelektől függ
8. Paritás: Sem páros sem páratlan
9. Függőleges eltolás megadja, az értékkészlet végét, valamint a minimum/maximum értékét
10. Vízszintes eltolás megadja az értelmezési tartomány végét, valamint a minimum/maximum helyét

Eltolások

$f(x) = \sqrt{x + \Delta} + \otimes$

$\otimes: y\ irányú\ eltolás$

$\Delta: x\ irányú\ eltolás$

$\otimes: logikusan:$

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

$\Delta: fordítva:$

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

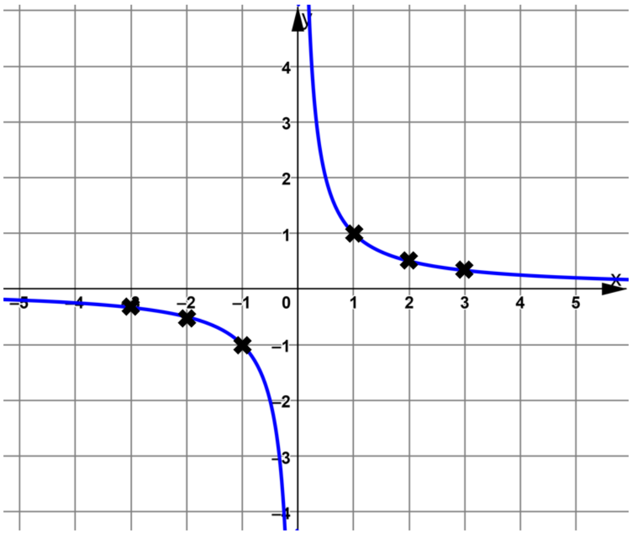
$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Gyökfüggvény ábrázolásának lépései:

1. **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
2. **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, ott lesz a függvény csúcsa (Minimum, vagy maximum)**
3. **A csúcsból kiindulva a sima gyökfüggvényt ábrázoljuk**

Tört függvény $\left(\frac{1}{x}\right)$ tudnivalók



1. Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, kivéve ahol a nevező 0
2. Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$ kivéve, amennyivel el van tolva a függvény függőlegesen
3. Zérushely: $f(x) = 0$, 0 vagy 1 zérushely lehet (Függőleges eltolástól függ)
4. Tengelymetszet: $f(0) = \cdots$, 0 vagy 1 tengelymetszet lehet (Vízszintes eltolástól függ)
5. Monotonitás: Csökkenő, ha nincs előtte mínuszjel, növekő, ha van előtte mínuszjel, két részben írjuk fel
6. Szélsőérték: Nincs
7. Paritás: Páratlan, ha nincs benne semmilyen eltolás, vagy ha csak nyújtás van benne
8. Függőleges eltolás megadja, hogy az értékkészletben hol van szakadás
9. Vízszintes eltolás megadja, hogy az értelmezési tartományban, hol van szakadás

Eltolások

$$f(x) = \frac{1}{x + \Delta} + \otimes$$

$\otimes$: $y\ irányú\ eltolás$

Δ: $x\ irányú\ eltolás$

$\otimes$: $logikusan$:

$ha\ \oplus\ akkor \uparrow$

$ha\ \ominus\ akkor \downarrow$

Δ: $fordítva$:

$ha\ \oplus\ akkor \leftarrow$

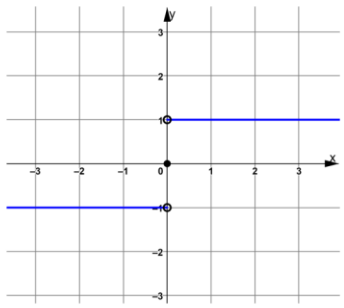
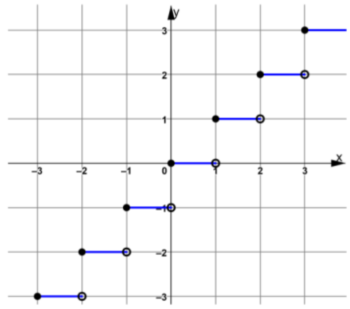
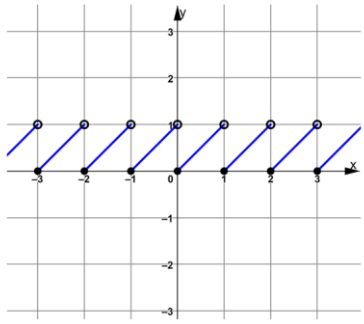
$ha\ \ominus\ akkor \rightarrow$

$x + \Delta = 0\ egyenlet\ megoldása\ x - re$

Törtfüggvény ábrázolásának lépései:

1. **Megnézzük a függőleges és vízszintes irányú eltolásokat, bejelöljük szaggatott vonallal**
2. **Ahol a szaggatott vonalak metszik egymást, azok lesznek az új koordináta tengelyek**
3. **Az új koordináta tengelyekben megrajzoljuk a függvényt**

Előjel, egészrész, törtrész függvények

Előjel függvény	Egészrész függvény	Törtrész függvény
		

Függvény transzformációk

Eltolások

$f(x) = (x + \Delta) + \otimes$

$\otimes$: y *irányú eltolás*

Δ: x *irányú eltolás*

$\otimes$: *logikusan*:

ha $\oplus$ *akkor* $\uparrow$

ha $\ominus$ *akkor* $\downarrow$

Δ: *fordítva*:

ha $\oplus$ *akkor* $\leftarrow$

ha $\ominus$ *akkor* $\rightarrow$

$x + \Delta = 0$ *egyenlet megoldása* $x - re$

Tükrözések

$f(x) = (-x) \rightarrow y\ tengelyre\ \text{tükrözés}$

$f(x) = -(x) \rightarrow x\ tengelyre\ \text{tükrözés}$

$f(x) = -(-x) \rightarrow x\ \text{és}\ y\ tengelyre\ is\ \text{tükrözés}\ (sorrend\ mindegy)$

Ezek a tükrözések mindig az eltolt tengelyre vonatkoznak!

Nyújtások

$f(x) = 2 \cdot (x) \rightarrow 2 - szeres\ \text{nyújtás}\ y\ \text{irányban}$

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x) \rightarrow 2 - szeres\ \text{összenyomás}\ y\ \text{irányban}$

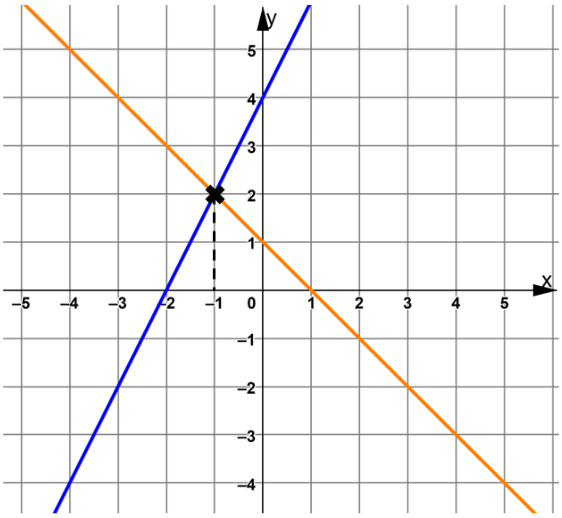
$f(x) = (2 \cdot x) \rightarrow 2 - szeres\ \ \text{összenyomás}\ x\ \text{irányban}$

$f(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot x\right) \rightarrow 2 - szeres\ \text{nyújtás}\ x\ \text{irányban}$

Paritás

1. Páros függvényeknél, ha y irányban toljuk csak el (fel / le), akkor marad páros, ha x irányban is eltoljuk, vagy csak x irányban toljuk el (jobbra / balra), akkor se páros se páratlan nem lesz a függvény
2. Páratlan függvényeknél bármerre is toljuk el, akár y irányban (fel / le), akár x irányban (jobbra / balra), akkor se páros se páratlan nem lesz a függvény
3. Nyújtásokkal nem változik a paritás
4. Tükrözésekkel nem változik a paritás

Egyenletek grafikus megoldása



1. Az egyenlet jobb oldala lesz az egyik függvény, a bal oldala pedig a másik függvény
1. lépés: Összevonjuk az egy oldalon lévő azonos kifejezéseket (ha több is van), azért, hogy tudjuk ábrázolni függvényként
2. lépés: Ha ezzel kész vagyunk az egyenlet bal oldala lesz az egyik függvény, a jobb oldala a másik függvény, ezeket ábrázoljuk közös koordináta rendszerben
3. lépés: Megnézzük, hogy van-e metszéspontja a két függvénynek:
1. Ha 1 pontban metszik egymást (esetek 99%-a), akkor leolvassuk a pont x koordinátáját, ez lesz az egyenlet megoldás
2. Ha nem metszik egymást (párhuzamosak), akkor az egyenletnek nincs megoldása
3. Ha egymáson van a két függvény (ugyanaz a két függvény), akkor minden x megoldás lesz