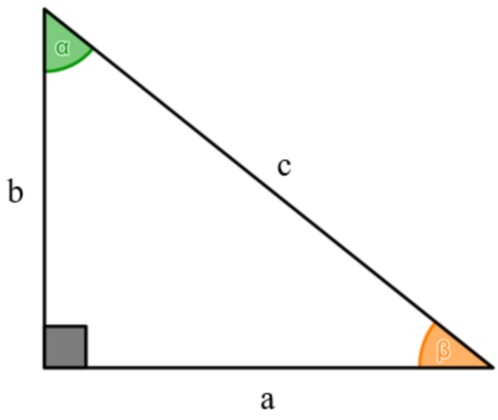
Trigonometria

Szögfüggvények

Szinusz ($\boldsymbol{sin}$)

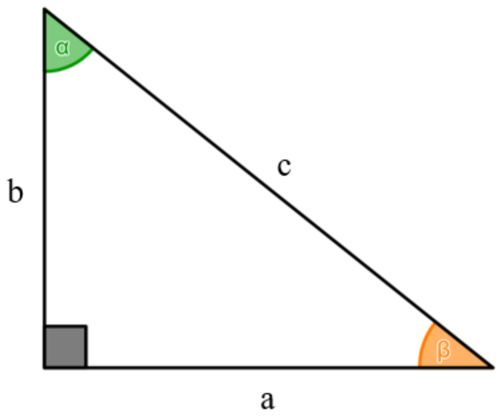


$$\boldsymbol{sin\,\alpha = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{átfogó}}$$

$$\boldsymbol{sin\,\alpha = \frac{a}{c}}$$

$$\boldsymbol{sin\,\beta = \frac{b}{c}}$$

Koszinusz ($\boldsymbol{cos}$)

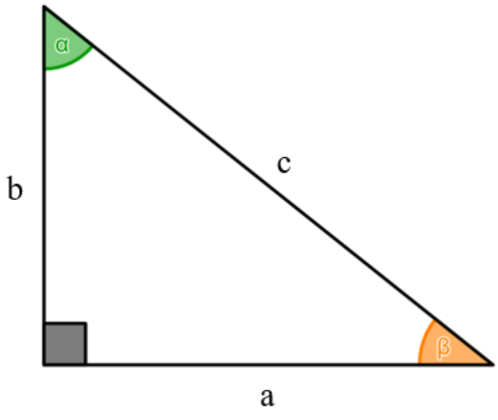


$$\boldsymbol{cos\,\alpha = \frac{szög\ melletti\ befogó}{átfogó}}$$

$$\boldsymbol{cos\,\alpha = \frac{b}{c}}$$

$$\boldsymbol{cos\,\beta = \frac{a}{c}}$$

Tangens ($\boldsymbol{tg}$, $\boldsymbol{tan}$)



$$\boldsymbol{tg\,\alpha = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{szög\ melletti\ befogó}}$$

$$\boldsymbol{tg\,\alpha = \frac{a}{b}}$$

$$\boldsymbol{tg\,\beta = \frac{b}{a}}$$

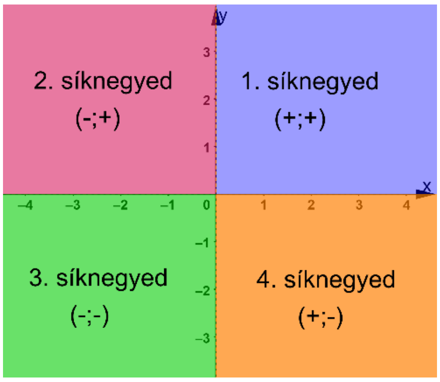
Szögfüggvények nevezetes szögértékei

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



$$tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

$$tg\ \alpha = \frac{1}{ctg\ \alpha}$$

$$sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$$

$$sin\ \alpha = cos(\alpha - 90°)$$

$$cos\ \alpha = sin(\alpha + 90°)$$

Szögek átváltása, radián

Fok (°)	Radián (rad)
$360°$	2π
$\mathbf{180°}$	$\boldsymbol{\pi}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$
$0°$	0

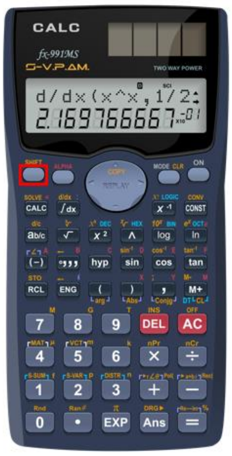
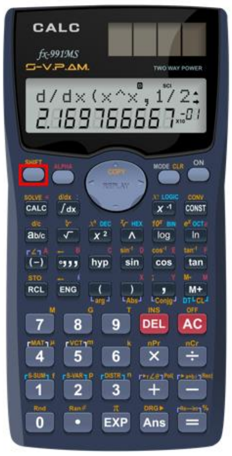
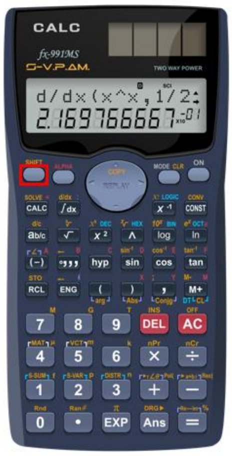
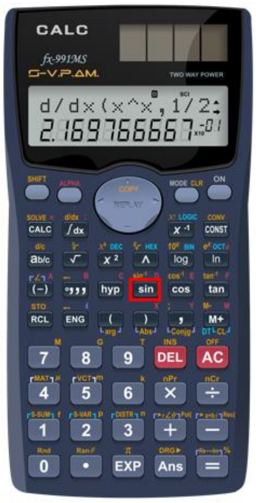
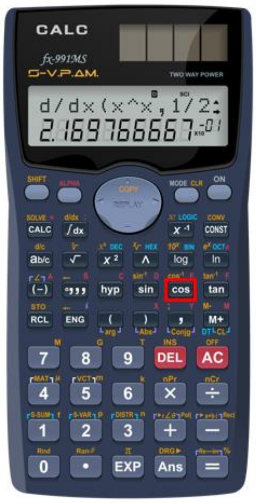
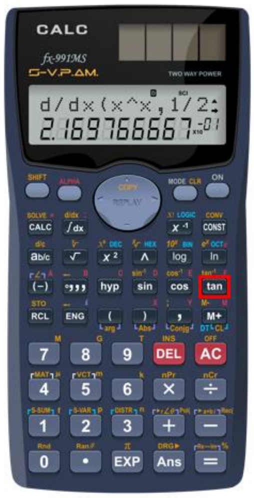
Átváltás fokból radiánba ($° \to rad$)	**Átváltás radiánból fokba ($rad \to °$)**
$\boldsymbol{\alpha° \cdot \frac{2\pi}{360} = \alpha_{rad}}$ $\alpha° \cdot \frac{\pi}{180} = \alpha_{rad}$	$\boldsymbol{\alpha_{rad} \cdot \frac{360}{2\pi} = \alpha°}$ $\alpha_{rad} \cdot \frac{180}{\pi} = \alpha°$
Váltószám: $\boldsymbol{\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}}$ $\boldsymbol{1\ radián \sim 57,3°}$	

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
α_{rad}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Szögek visszakeresése

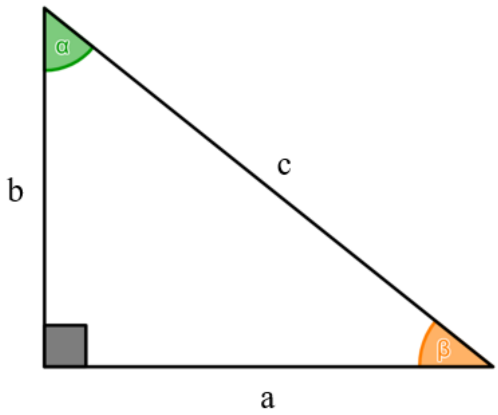
Bal felső sarokban lévő gombot nyomjuk meg először (Shift, 2ndF), ezután pedig azt amilyen szögfüggvényt visszakeresünk.

A számológépünk, mindig fokba legyen, sose rakjuk át radiánba, mert úgy marad

Sin visszakeresése	Cos visszakeresése	Tg visszakeresése
		
		

Szinusztétel, koszinusztétel

Szinusztétel

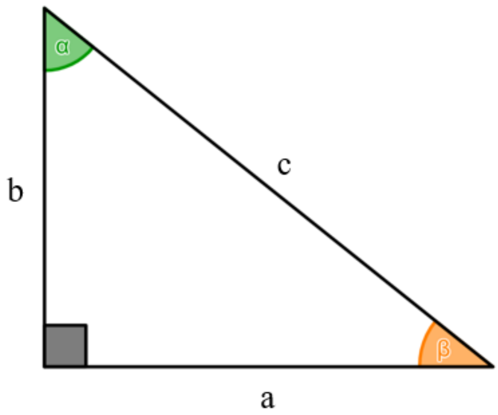


$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Koszinusztétel



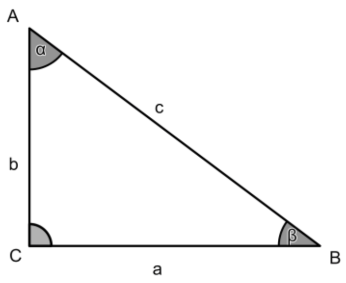
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

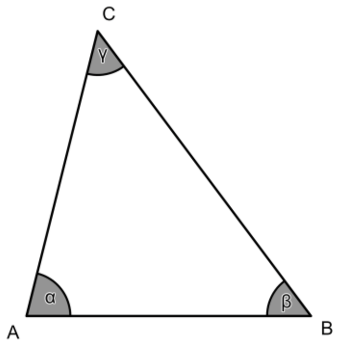
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Szinusz, Koszinusz vs Szinusztétel, Koszinusztétel

<table>
<tr><th></th><th>Szinusz, Koszinusz</th><th>Szinusztétel, Koszinusztétel</th></tr>
<tr><td>Hol használom?</td><td>

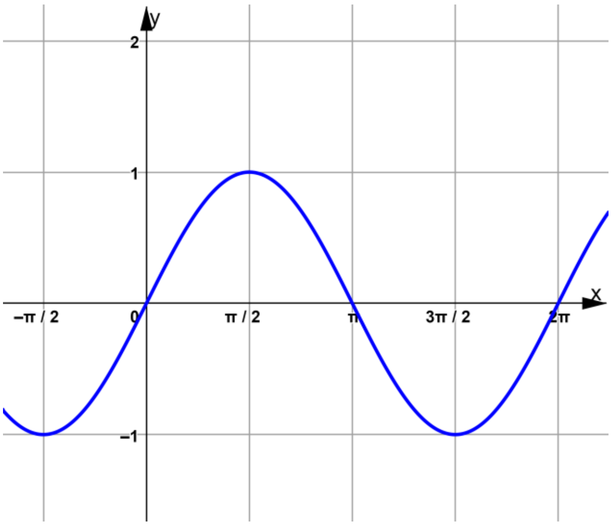


Derékszögű háromszögekben</td><td>



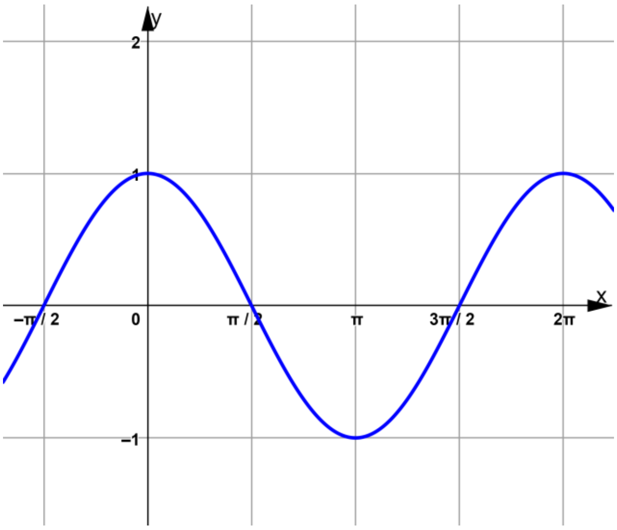
Általános háromszögekben</td></tr>
<tr><td>Szinusz</td><td>$\sin \alpha = \frac{a}{c}$
$\sin \beta = \frac{b}{c}$</td><td>$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$</td></tr>
<tr><td>Koszinusz</td><td>$\cos \alpha = \frac{b}{c}$
$\cos \beta = \frac{a}{c}$</td><td>$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\ \gamma$</td></tr>
</table>

Szinusz függvény



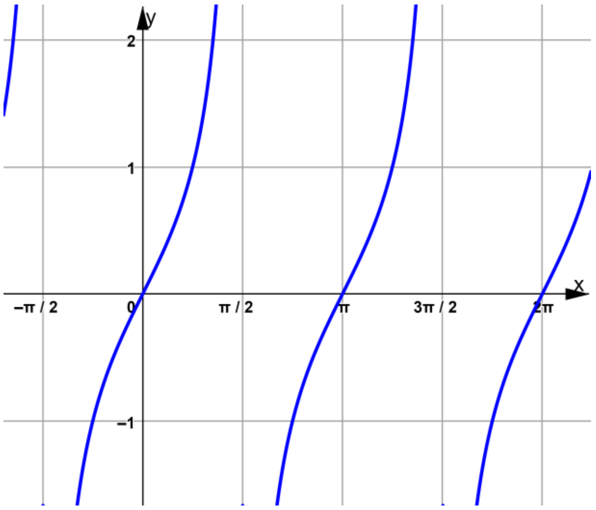
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$sin\,x$	0	1	0	-1	0

Koszinusz függvény



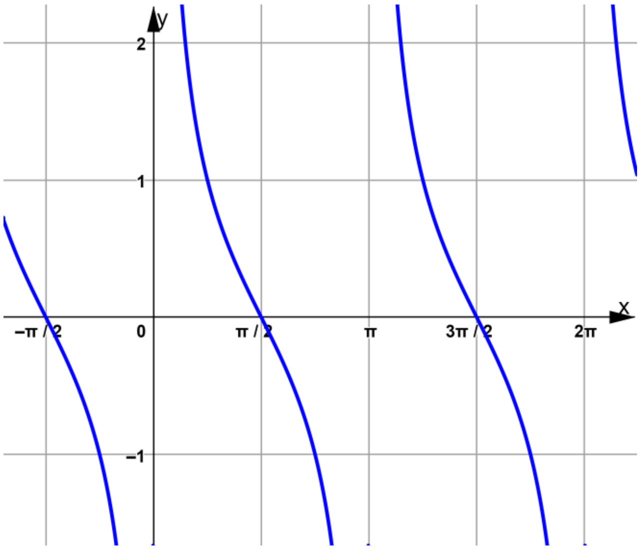
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$cos\,x$	1	0	-1	0	1

Tangens függvény



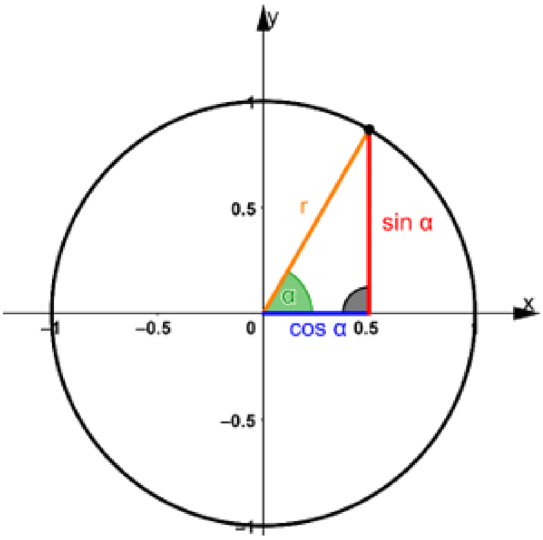
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$tg\,x$	$-$	-1	0	1	$-$

Kotangens függvény



x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$ctg\,x$	0	-1	$-$	1	0

Egységkör



1. Kör középpontja: $origó$ $(0; 0)$
2. Sugara: $r = 1$ egység
3. $cos\ \alpha$ lesz az x koordináta
4. $sin\ \alpha$ lesz az y koordináta
5. Sin egyenletnél vízszintesen húzzuk be
6. Cos egyenletnél függőlegesen húzzuk be
7. Mindig 2 megoldás
8. Kivéve $sin\ x = \pm 1$ $cos\ x = \pm 1$ → Ott csak 1
9. Megoldások után mindig odaírjuk a periódust is
10. 1. síknegyedben maga a szög
11. 2. síknegyedben 180°-ból vonjuk ki
12. 3. síknegyedben 180°-hoz adjuk hozzá
13. 4. síknegyedben 360°-ból vonjuk ki

Trigonometrikus egyenlet megoldásainak száma, periódusok

	Sin				Cos			
Alesetek	$\sin x < -1$ vagy $\sin x > 1$	$\sin x = \cdots$	$\sin x = 0$	$\sin x = 1$ $\sin x = -1$	$\cos x < -1$ vagy $\cos x > 1$	$\cos x = \cdots$	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$ $\cos x = -1$
Megoldások száma	0	2	1 (2)	1	0	2	1 (2)	1
Periódus		$\boldsymbol{k \cdot 2\pi}$	$\boldsymbol{k \cdot \pi}$	$\boldsymbol{k \cdot 2\pi}$		$\boldsymbol{k \cdot 2\pi}$	$\boldsymbol{k \cdot \pi}$	$\boldsymbol{k \cdot 2\pi}$

	Tg (Ctg)	
Alesetek	$\operatorname{tg} x = \cdots$	$\operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
Megoldások száma	1	0
Periódus	$\boldsymbol{k \cdot \pi}$	

Trigonometrikus függvények értékkészlete

Alapesetben $\sin x$ és $\cos x$ függvények értékkészlete: $[-1; 1]$

Nyújtások/összenyomások:

1. Függvény előtt: y irányú
2. Függvényen belül: x irányú

Nyújtások:

$2 \cdot sin\, x \to y\ irányú\ nyújtás$

$\frac{1}{2} \cdot sin\, x \to y\ irányú\ összenyomás$

$$\left.\begin{array}{l} sin(2x) \to x\ irányú\ összenyomás \\ sin\left(\frac{1}{2}x\right) \to x\ irányú\ nyújtásl \end{array}\right\}$$

Értékkészletre nincs hatással