

# Hatvány, gyök, logaritmus

## Hatványozás

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \dots}_n$$

$a$ : alap  $n$  – szer

$n$ : kitevő

Példák:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\ 000$$

$$x^2 = x \cdot x$$

$$y^3 = y \cdot y \cdot y$$

## Nevezetes hatványok

$x$	$x^2$
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169

$x$	$x^3$
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
10	1 000

$x$	$x^4$
1	1
2	16
3	81
4	256
5	625
10	10 000

$x$	$2^x$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1 024

$x$	$10^x$
0	1
1	10
2	100
3	1 000
4	10 000
6	1 000 000
9	1 000 000 000

## Hatvány azonosságok

Elnevezés	Azonosság	Példák
<b>E1</b>	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$ $2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2$ $x^4 \cdot x^7 = 2^{4+7} = x^{11}$ $x^{y+4} = x^y \cdot x^4$
<b>E2</b>	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{2^7}{2^2} = 2^{7-2} = 2^5$ $2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3}$ $\frac{x^2}{x^4} = 2^{2-4} = x^{-2}$ $x^{y-5} = \frac{x^y}{x^5}$
<b>E3</b>	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^x \cdot 3^x = (2 \cdot 3)^x = 6^x$ $10^x = (2 \cdot 5)^x = 2^x \cdot 5^x$ $x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2$ $(x \cdot y)^4 = x^4 \cdot y^4$
<b>E4</b>	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{3^x}{5^x} = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ $\left(\frac{7}{8}\right)^x = \frac{7^x}{8^x}$ $\frac{x^5}{y^5} = \left(\frac{x}{y}\right)^5$ $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$
<b>E5</b>	$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \cdot m}$	$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$ $5^{2 \cdot 4} = (5^2)^4$ $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$ $x^{7 \cdot 5} = (x^7)^5$ $(4^7)^9 = (4^9)^7$ $(x^3)^8 = (x^8)^3$
<b>E6</b>	$a^1 = a$	$2^1 = 2$ $5 = 5^1$ $x^1 = x$ $y = y^1$
<b>E7</b>	$a^0 = 1$	$3^0 = 1$ $1 = 6^0$ $x^0 = 1$ $1 = x^0$
<b>E8</b>	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ $x^{-1} = \frac{1}{x}$ $\frac{1}{y} = y^{-1}$
<b>E9</b>	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ $\frac{1}{5^4} = 5^{-4}$ $x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$ $\frac{1}{y^5} = y^{-5}$

## Logaritmus azonosságok

Elnevezés	Azonosság	Példák
L1	$\log_a b = c \rightarrow a^c = b$	$\log_2 x = 5 \rightarrow 2^5 = x$ $\log_3 27 = x \rightarrow 3^x = 27$ $\log_x 16 = 4 \rightarrow x^4 = 16$
L2	$\log_{10} x = \lg x = \log x$	–
L3	$\log_e x = \ln x$	–
L4	$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$	$\log_3 (2 \cdot x) = \log_3 2 + \log_3 x$ $\log_5 7 + \log_5 y = \log_5 (7 \cdot y)$
L5	$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	$\log_8 \left(\frac{3}{10}\right) = \log_8 3 - \log_8 10$ $\log_4 2 - \log_4 8 = \log_4 \left(\frac{2}{8}\right)$
L6	$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$	$\log_5 x^3 = 3 \cdot \log_5 x$ $4 \cdot \log_3 x = \log_3 x^4$
LL7	$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$	$\log_9 \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} \cdot \log_9 3$ $\frac{1}{3} \cdot \log_2 8 = \log_2 \sqrt[3]{8}$
L8	$\log_a a = 1$	$\log_2 2 = 1$ $1 = \log_5 5$ $\log_x x = 1$ $1 = \log_y y$
L9	$\log_a 1 = 0$	$\log_2 1 = 0$ $0 = \log_5 1$ $\log_x 1 = 0$ $0 = \log_x 1$
L10	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_5 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 5}$
L11	$b = \log_a a^b$	$2 = \log_3 3^2$
L12	$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$	$2^{\log_4 x} = x^{\log_4 2}$

## Gyökvonás azonosságok

Elnevezés	Azonosság	Példák
GY1	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$ $\sqrt{5 \cdot x} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x}$
GY2	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{x}{7}}$ $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$
GY3	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{8 \cdot x}$ $\sqrt[8]{2 \cdot 9} = \sqrt[8]{2 \cdot 9}$
GY4	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ $\frac{\sqrt[7]{1}}{\sqrt[7]{x}} = \sqrt[7]{\frac{1}{x}}$
GY5	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{5}}$ $10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10}$ $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ $x^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{x}$
GY6	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[7]{2^2} = 2^{\frac{2}{7}}$ $3^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{3^5}$ $\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$ $x^{\frac{10}{7}} = \sqrt[7]{x^{10}}$
GY7	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$	$\sqrt[3]{8^6} = (\sqrt[3]{8})^6$
GY8	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$	$\sqrt[2]{x} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[2 \cdot 3]{x^{2+3}} = \sqrt[6]{x^5}$
GY9	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$	$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[7]{x}} = \sqrt[7 \cdot 3]{x^{7-3}} = \sqrt[21]{x^4}$

## Exponenciális egyenletek

1. Cél: Végén ilyen alakban legyen az egyenlet:

$$2^{\Delta} = 2^{\boxplus}$$

$$3^{\Delta} = 3^{\boxplus}$$

$$4^{\Delta} = 4^{\boxplus}$$

$$5^{\Delta} = 5^{\boxplus}$$

1. Ha ugyanaz az alap mind a két oldalon és rajta kívül nincs más, akkor:

1. Ha az *alap*  $> 1 \rightarrow$  Sz. m. n. Pl.: 2, 3, 4, 5,  $\frac{8}{7}$ ,  $\frac{9}{2}$ ,  $\frac{10}{9}$ ,  $\frac{120}{37}$  ...

2. Ha az *alap*  $< 1 \rightarrow$  Sz. m. cs. Pl.:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{99}{100}$ ,  $\frac{15}{26}$  ...

## Exponenciális egyenlőtlenségek

3. Cél: Ugyanaz, mint egyenleteknél, ugyanaz legyen az alap mind a két oldalon

4. Ha ugyanaz az alap mind a két oldalon és rajta kívül nincs más, akkor:

5. Ha az *alap*  $> 1 \rightarrow$  Sz. m. n. Pl.: 2, 3, 4, 5,  $\frac{8}{7}$ ,  $\frac{9}{2}$ ,  $\frac{10}{9}$ ,  $\frac{120}{37}$  ...  $\rightarrow$  **Reláció jel marad**

6. Ha az *alap*  $< 1 \rightarrow$  Sz. m. cs. Pl.:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{99}{100}$ ,  $\frac{15}{26}$  ...  $\rightarrow$  **Reláció jel megfordul**

## Normálalak

Normálalakra hozás lépései:

**1. Lépés:** Az utolsó szám mögé írjuk a tizedesvesszőt

**2. Lépés:** Egyesével visszük balra felé a tizedesvesszőt, addig amíg az első számig nem érünk, közbe számoljuk, hogy hányszor lett arrébb rakva a tizedesvessző

**3. Lépés:** Leírjuk az eredeti számot úgy, hogy az első szám után van a tizedesvessző és a tizedesvessző után van a többi szám (a végén lévő 0-kat nem muszáj leírni)

**4. Lépés:** Ahányszor arrébb vittük a tizedesvesszőt az elején 10-et annyiadikra emeljük

## Kamatos kamat

Kamatos kamat képletek:

$$T_n = T_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$T_n = T_0 \cdot q^n$$

Jelölések:

$T_0$  – induló tőke (amit a 0. évben beteszünk)

$T_n$  –  $n$ . évben lévő pénz ( $n$  helyére számok kerülnek)

$n$  – évek száma

$p$  – kamatláb (%) → 2 – 10 % között

$q$  – kamattényező (szám) → 1,02 – 1,1 között

## Számrendszerek

2 – es	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	16	8	4	2	1
3 – as	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	81	27	9	3	1
4 – es	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	256	64	16	4	1
5 – ös	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	625	125	25	5	1

<b>6 – os</b>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	36	6	1		
<b>7 – es</b>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	49	7	1		
<b>8 – as</b>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	64	8	1		
<b>9 – es</b>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	81	9	1		
<b>10 – es</b>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	10 000	1 000	100	10	1

## Logaritmus értelmezési tartomány

$$\log_a b = c$$

$$a > 0, a \neq 1$$

$$b > 0$$

$$c \in \mathbb{R}$$

# Logaritmus egyenletek

## Logaritmus egyenletek

1. Mindig az értelmezési tartománnyal kezdjük
1. Ugyanaz a cél, mint exponenciális egyenleteknél
2. Végén ilyen alakban legyen az egyenlet:

$$\log_2 \Delta = \log_2 \boxplus \qquad \log_2 \Delta = \text{szám}$$

$$\log_3 \Delta = \log_3 \boxplus \qquad \log_3 \Delta = \text{szám}$$

$$\log_4 \Delta = \log_4 \boxplus \qquad \log_4 \Delta = \text{szám}$$

1. Ha ugyanaz az alap mind a két oldalon és rajta kívül nincs más, akkor:

1. Ha az *alapot*  $> 1 \rightarrow$  Sz. m. n. Pl.:  $\log_2, \log_3, \log_4, \log_{\frac{5}{3}} \dots$

2. Ha az *alapot*  $< 1 \rightarrow$  Sz. m. cs. Pl.:  $\log_{\frac{1}{2}}, \log_{\frac{3}{4}}, \log_{\frac{5}{12}}, \log_{\frac{36}{91}} \dots$

## Logaritmus egyenlőtlenségek

3. Cél: Ugyanaz, mint egyenleteknél, ugyanaz legyen az alap mind a két oldalon
4. Ha ugyanaz az alap mind a két oldalon és rajta kívül nincs más, akkor:
5. Ha az *alapot*  $> 1 \rightarrow$  Sz. m. n. Pl.:  $\log_2, \log_3, \log_4, \log_{\frac{5}{3}} \dots \rightarrow$  **Reláció jel marad**
6. Ha az *alapot*  $< 1 \rightarrow$  Sz. m. cs. Pl.:  $\log_{\frac{1}{2}}, \log_{\frac{5}{12}}, \log_{\frac{36}{91}} \dots \rightarrow$  **Reláció jel megfordul**

## Gyök egyenletek

1.  $\sqrt{\Delta} = \boxtimes \rightarrow \Delta = \boxtimes^2$

$$\Delta \geq 0$$

$$\boxtimes \geq 0$$

1. Gyökvonás eltüntetése négyzetre emeléssel
2. Négyzet eltüntetése gyökvonással
3. Kezdjük mindig kezdeti feltétellel