

Koordinátageometria

Vektorok jelölése

a

\underline{a}

\vec{a}

Vektorok megadása

$\underline{a}(2; 1)$

$\underline{a} = (2; 1)$

$\underline{a} = (2\underline{i} + 1\underline{j} + 0\underline{k})$

$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektorok összeadása

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

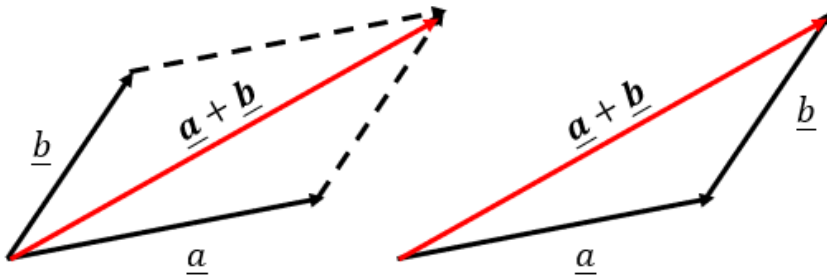
$$\underline{a} + \underline{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{bmatrix}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} + \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Vektorok összeadása rajzon



Vektorok kivonása

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} - \underline{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} - \underline{a} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} - \underline{b} = -(\underline{b} - \underline{a})$$

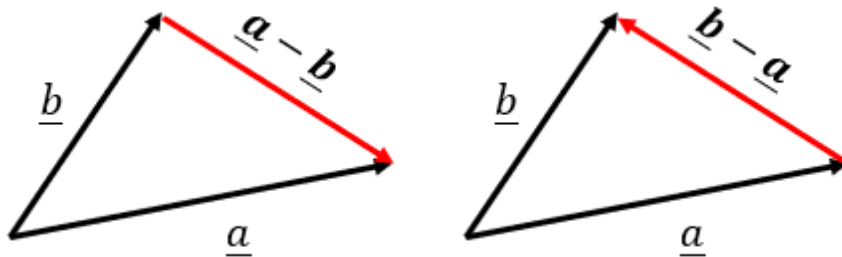
Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} - \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} - \underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vektorok kivonása rajzon



Két pont távolsága

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x - B_x \\ A_y - B_y \end{bmatrix}$$

Kétpont távolsága:

$$|AB| = |BA| = \sqrt{AB_x^2 + AB_y^2}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Kétpont távolsága:

$$|AB| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Vektor hossza

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

Skaláris szorzat

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 5 = 41$$

Két vektor által bezárt szög

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$$

Képlet:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha$$

Rendezés $\cos \alpha$ -ra

Ha a skaláris szorzat:

1. Pozitív $\rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$
2. 0 $\rightarrow \alpha = 90^\circ$
3. Negatív $\rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 = -7$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Képlet:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$-7 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{-7}{\sqrt{130}} = \cos \alpha$$

$$-0,614 = \cos \alpha$$

$$127,875^\circ = \alpha$$

Felezőpont

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

$$F_x = \frac{A_x + B_x}{2}$$

$$F_y = \frac{A_y + B_y}{2}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$F_x = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$F_y = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$F = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Harmadolópont

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

A-hoz közelebbi:

$$H_{1x} = \frac{2 \cdot A_x + B_x}{3}$$

$$H_{1y} = \frac{2 \cdot A_y + B_y}{3}$$

B-hez közelebbi:

$$H_{2x} = \frac{A_x + 2 \cdot B_x}{3}$$

$$H_{2y} = \frac{A_y + 2 \cdot B_y}{3}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A-hoz közelebbi:

$$H_{1x} = \frac{2 \cdot 1 + 4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$H_{1y} = \frac{2 \cdot 2 + 5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

B-hez közelebbi:

$$H_{2x} = \frac{1 + 2 \cdot 4}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$H_{2y} = \frac{2 + 2 \cdot 5}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tetszőleges osztópont

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

n-edelő pont

A-hoz közelebbi:

$$T_{1x} = \frac{(n-1) \cdot A_x + B_x}{n}$$

$$T_{1y} = \frac{(n-1) \cdot A_y + B_y}{n}$$

B-hez közelebbi:

$$T_{2x} = \frac{A_x + (n-1) \cdot B_x}{n}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5-ödölő pont

A-hoz közelebbi:

$$T_{1x} = \frac{4 \cdot 3 + 8}{5} = 4$$

$$T_{1y} = \frac{4 \cdot 2 + 2}{5} = 2$$

B-hez közelebbi:

$$T_{2x} = \frac{1 + 4 \cdot 8}{5} = \frac{33}{5}$$

$$T_{2y} = \frac{2 + 4 \cdot 2}{5} = 2$$

$$T_{2y} = \frac{A_y + (n-1) \cdot B_y}{n}$$

Súlypont

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix}$$

$$S_x = \frac{A_x + B_x + C_x}{3}$$

$$S_y = \frac{A_y + B_y + C_y}{3}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$S_x = \frac{-2 + 1 + 4}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$S_y = \frac{4 + 5 + (-3)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Írányvektor

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -a_x \\ -a_y \end{bmatrix}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Írányvektor 2 pontból

Szabály

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x - B_x \\ A_y - B_y \end{bmatrix}$$

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Merekség

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -a_x \\ -a_y \end{bmatrix}$$

$$m = \frac{v_y}{v_x}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$m = \frac{2}{5}$$

Normálvektor

Szabály

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -a_x \\ -a_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_1 = \begin{bmatrix} v_y \\ -v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y \\ -a_x \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} -v_y \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_y \\ a_x \end{bmatrix}$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_1 = \begin{bmatrix} v_y \\ -v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} -v_y \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Egyenes egyenlete

Szabály

$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

P olyan pont, ami rajta van az egyenesen.

Egyenes egyenlete:

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y = n_x \cdot x_0 + n_y \cdot y_0$$

Példa

$$n = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Egyenes egyenlete:

$$5 \cdot x + 1 \cdot y = 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 2$$

$$5x + y = -15 + 2$$

$$5x + y = -13$$

Két egyenes metszéspontja

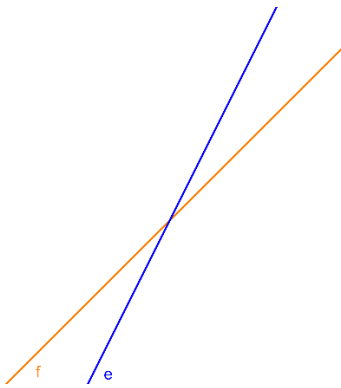
Szabály

$$e1: \quad x + y = 3$$

$$e2: \quad 2x + 3y = 4$$

Egyenletrendszerként oldjuk meg.

Két egyenes viszonya



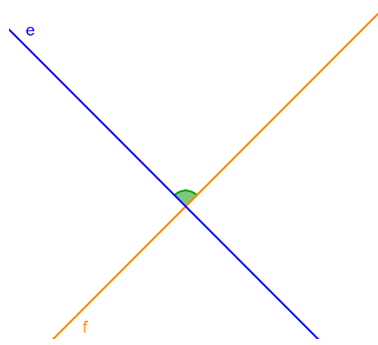
Metszik egymást

→ 1 metszéspont

$$m_e \neq m_f$$

$$v_e \neq v_f$$

$$n_e \neq n_f$$



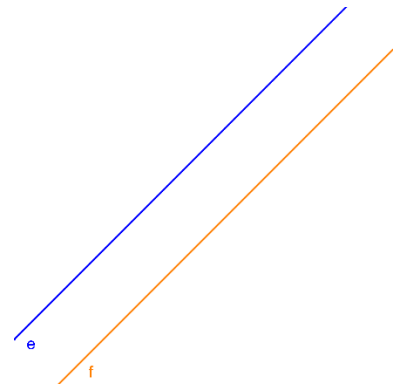
Egymásra merőlegesek

→ 1 metszéspont

$$m_e \neq m_f$$

$$v_e = n_f$$

$$n_e = v_f$$



Párhuzamosak

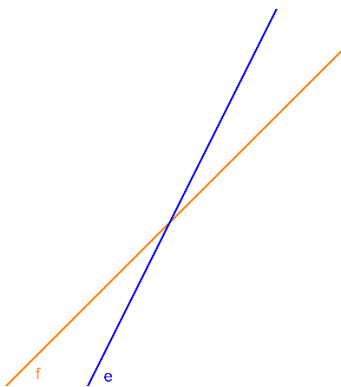
→ 0 metszéspont

$$m_e = m_f$$

$$v_e = v_f$$

$$n_e = n_f$$

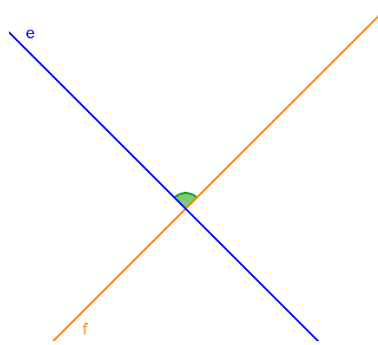
Két egyenes távolsága



Metszik egymást

→ 1 metszéspont

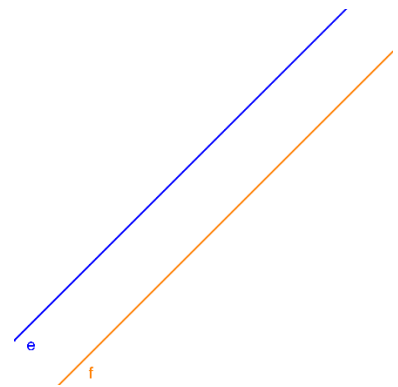
Nem számolunk távolságot



Egymásra merőlegesek

→ 1 metszéspont

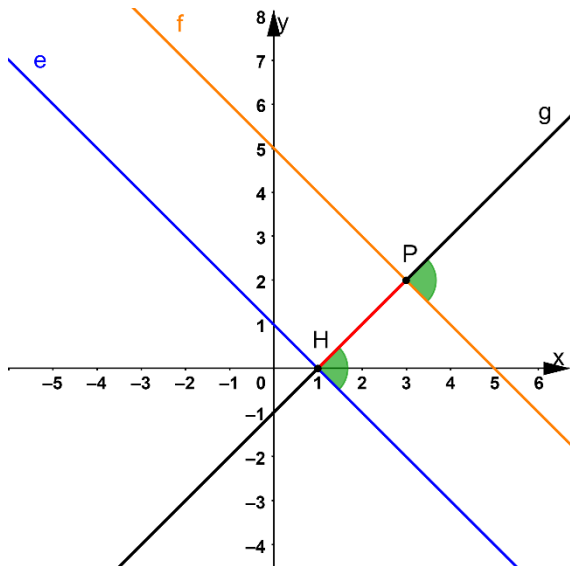
Nem számolunk távolságot



Párhuzamosak

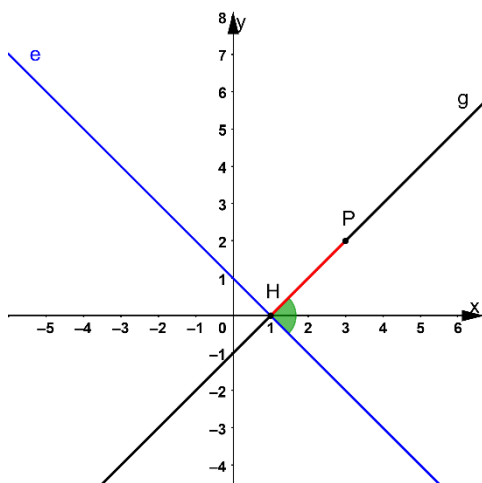
→ 0 metszéspont

Csak itt számolunk
távolságot



1. lépés: Megnézzük, hogy a két egyenes párhuzamos-e, ha nem azok nem számolunk távolságot
2. lépés: Felveszünk egy pontot valamelyik egyenesen (P)
3. lépés: Merőlegest állítunk az egyenesre, ami átmegy a felvett P ponton (g)
4. lépés: Megkeressük az egyenes (g) és a másik egyenes metszéspontját (H)
5. lépés: Felírjuk \overrightarrow{HP} vektort
6. lépés: Kiszámoljuk H és P pontok távolságát, ez a távolság lesz a két egyenes távolsága

Pont és egyenes távolsága

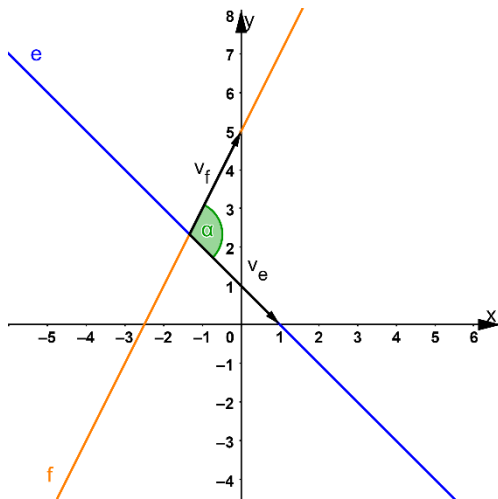


1. lépés: Merőlegest állítunk az egyenesre, ami átmegy P ponton (g)
2. lépés: Megkeressük az egyenes (g) és a másik egyenes (e) metszéspontját (H)

3. lépés: Felírjuk \overrightarrow{HP} vektort

4. lépés: Kiszámoljuk H és P pontok távolságát, ez a távolság lesz a pont és az egyenes távolsága

Két egyenes hajlásszöge



1. lépés: Kiolvassuk az egyenesek normálvektorát

2. lépés: Ebből felírjuk az irányvektort

3. lépés: Kiszámoljuk a két irányvektor skaláris szorzatát, és hosszát

4. lépés Az alábbi képletet alkalmazva kiszámoljuk a szöveget: $v_e \cdot v_f = |v_e| \cdot |v_f| \cdot \cos \alpha$

Kör egyenlete

Origó középpontú, r sugarú körök egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$

$K(u, v)$ középpontú, r sugarú körök egyenlete: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$