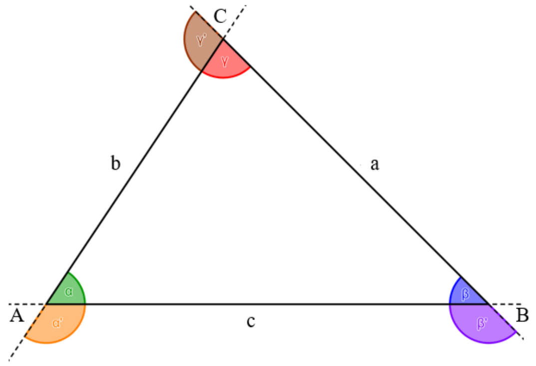
Geometria

Háromszögek



1. Csúcsok ABC nagy betűi
2. Oldalak ABC kisbetűi:
    1. A csúccsal szemben a oldal
    2. B csúccsal szemben b oldal
    3. C csúccsal szemben c oldal
3. Szögek, a görög ABC betűi:
    1. A csúcsnál α
    2. B csúccsal β
    3. C csúccsal γ

1. $Háromszög\ belső\ szögeinek$ összege: $180°$
2. $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$
3. $Háromszög\ külső\ szögeinek$ összege: $360°$
4. $\boldsymbol{\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°}$
5. $Egy\ belső$ és $egy\ külső\ szög$ összege: $180°$
6. $\boldsymbol{\alpha + \alpha' = 180°}$
7. $\boldsymbol{\beta + \beta' = 180°}$
8. $\boldsymbol{\gamma + \gamma' = 180°}$
9. Két oldal összege mindig nagyobb a harmadik oldalnál:

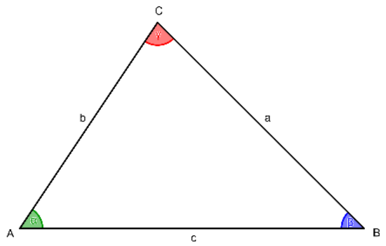
    $a + b > c$

    $a + c > b$

    $b + c > a$

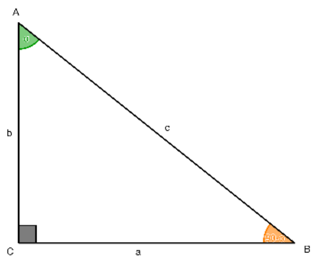
Háromszögek csoportosítása szögek szerint

Hegyesszögű háromszög



3 hegyesszög

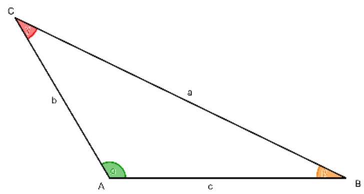
Derékszögű háromszög



1 derékszög

2 hegyesszög

Tompaszögű háromszög

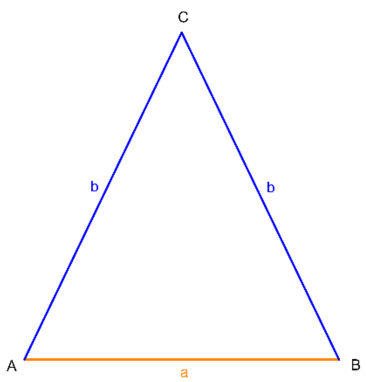


1 tompaszög

2 hegyesszög

Háromszögek csoportosítása specialitás szerint

Egyenlőszárú háromszög

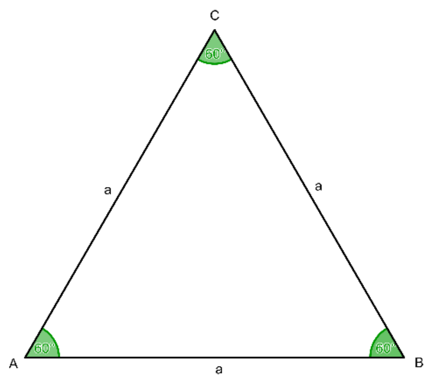


Van 2 egyenlő szára

Alapon fekvő szögei ugyanakkorák

1 szimmetria tengelye van

Szabályos háromszög

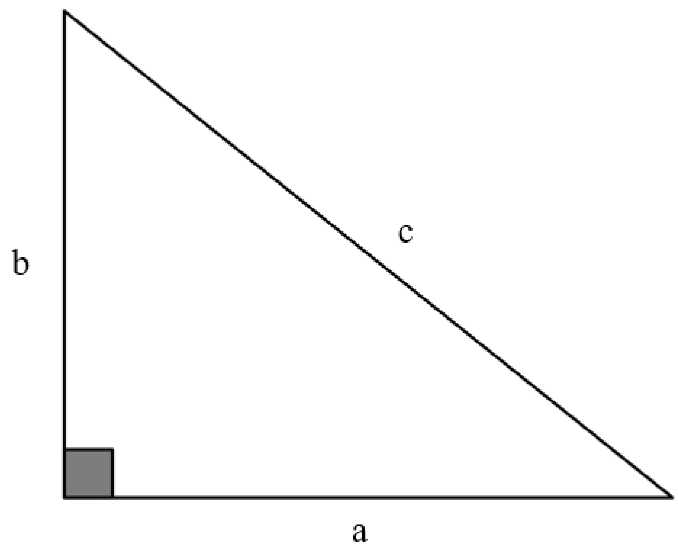


Minden oldala egyenlő

Minden szöge 60°

3 szimmetria tengelye van

Pitagorasz-tétel

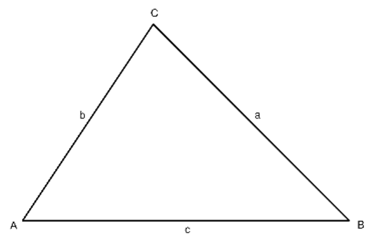


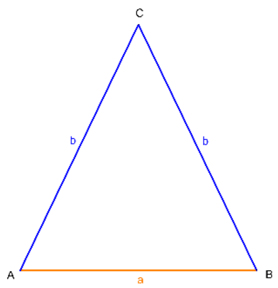
Pitagorasz-tétel:

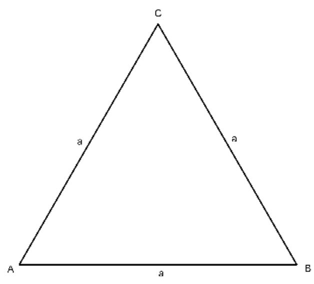
$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$

Háromszögek kerülete

Általános háromszög	Egyenlőszárú háromszög	Szabályos háromszög

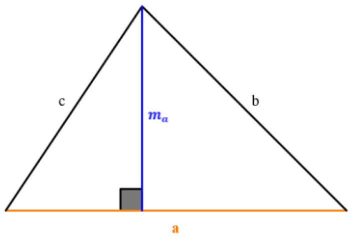


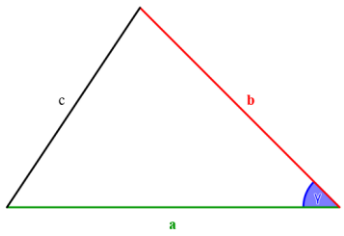


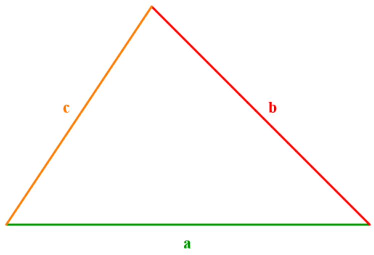


$\boldsymbol{K = a + b + c}$ $\boldsymbol{K = a + 2b}$ $\boldsymbol{K = 3a}$

Háromszögek területe







Hagyományos módszer:

$$T = \frac{alap \cdot magasság}{2}$$

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

Ha ismert két oldal és az általuk bezárt szög:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$$

Ha ismert mind a 3 oldal (Héron képlet):

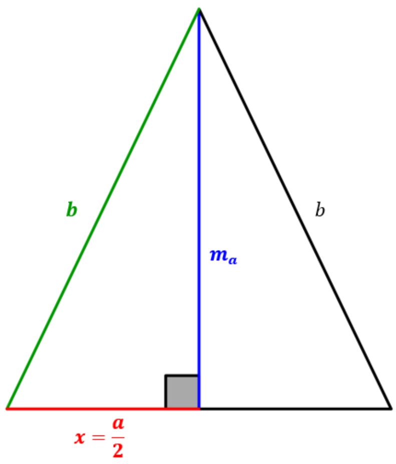
$$T = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

s: *félkerület*

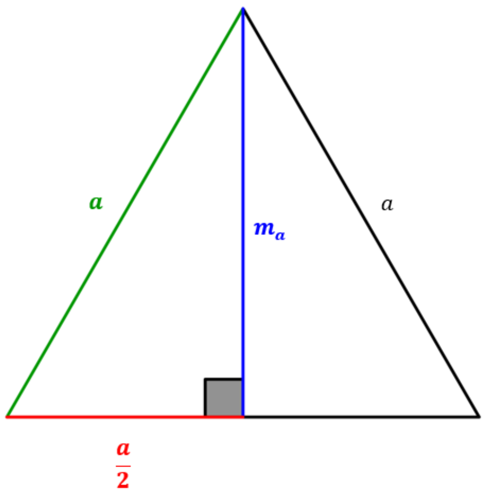
$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

Háromszögek magassága, területe

Egyenlőszárú háromszög



Szabályos háromszög



Pitagorasz-tétel:

$$x^2 + {m_a}^2 = b^2 \qquad /-x^2$$

$${m_a}^2 = b^2 - x^2 \qquad /\sqrt{}$$

$$\boldsymbol{m_a = \sqrt{b^2 - x^2}}$$

$$\boldsymbol{m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a}$$

$$\boldsymbol{T = \frac{a \cdot m_a}{2}}$$

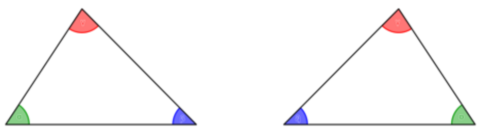
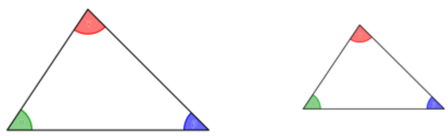
$$\boldsymbol{T = \frac{a \cdot m_a}{2}}$$

Háromszögek egybevágósága

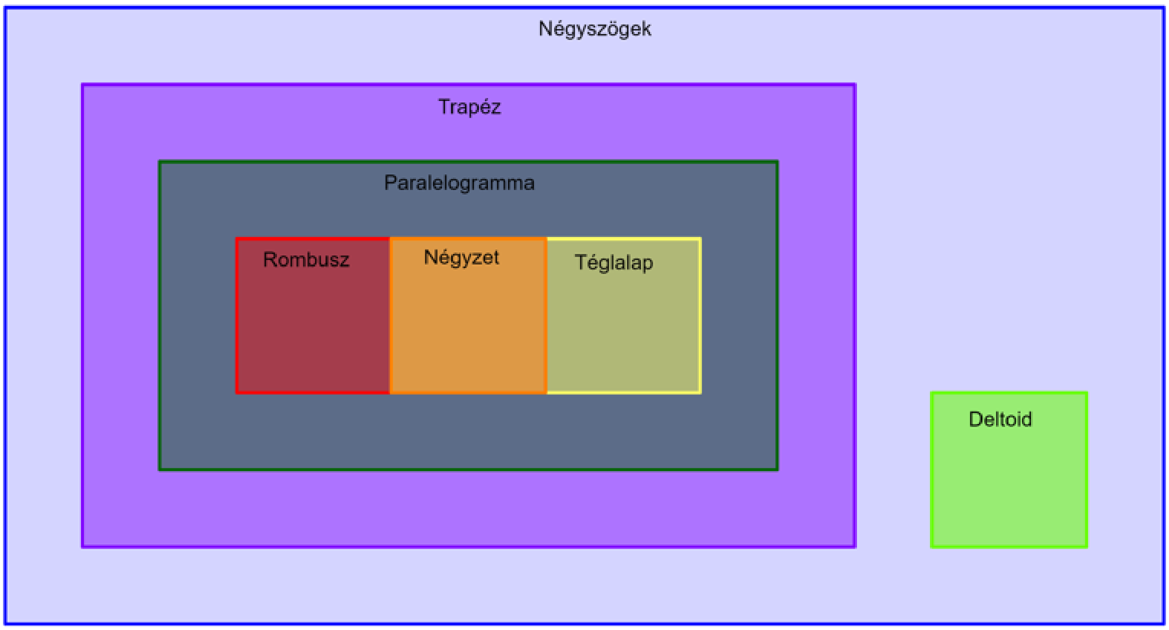
1. Ha egy háromszögből egy másikat egybevágósági transzformációkkal (eltolás, tükrözés, forgatás) elő tudunk állítani, akkor a két háromszög **egybevágó**
2. Egybevágó háromszögek megfelelő oldalai **egyenlő hosszúak**, megfelelő szögei **egyenlő nagyságúak**
3. Biztosan tudjuk két háromszögről, hogy egybevágó, ha:

1. Három oldaluk egyenlő
2. Egy oldaluk és a rajtuk lévő két szög egyenlő
3. Két oldaluk és a köztük lévő szög egyenlő
4. Két oldaluk és a nagyobbikkal szembeeső szög egyenlő

Egybevágóság vs hasonlóság

	Egybevágóság	**Hasonlóság**
Jelentése (konyhanyelv)	Ugyanaz a két háromszög csak el vannak tolva egymástól, meg vannak tükrözve, vagy el vannak forgatva	Az egyik háromszög a másik háromszög nagyított/kicsinyített verziója
Tulajdonságok	Mind a két háromszög esetén: 1. Mind a 3 oldal ugyanolyan hosszú 2. Mind a 3 szög ugyanakkora	Mind a két háromszög esetén: 1. Mind a 3 oldal aránya megegyezik 2. Mind a 3 szög ugyanakkora
Példa		

Négyszögek

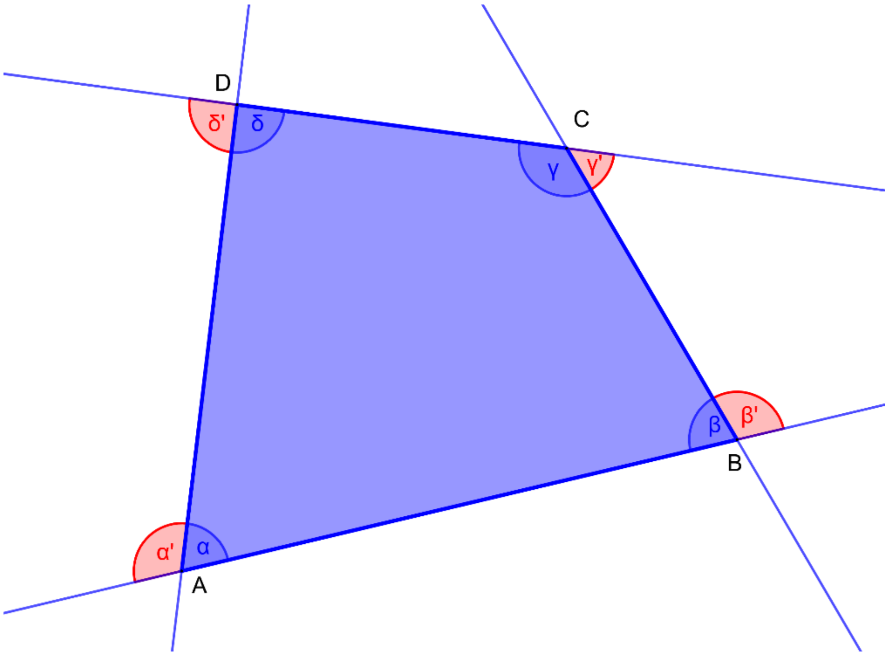


Minden négyzet: téglalap is, rombusz is, paralelogramma is, trapéz is, **deltoid!** is.

Minden téglalap: paralelogramma is, trapéz is.

Minden rombusz: paralelogramma is, trapéz is.

Minden paralelogramma: trapéz is.



Csúcsok: ABC nagy betűi figyelve körül járásra

Szögek: Hasonlóan, mint háromszögeknél, D csúcsnál δ

Oldalak: Nincs rá szabály, az egyenlő hosszúságú oldalak vannak ugyanolyan betűvel jelölve

Belső szögek összege: $360° \rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Belső és külső szögek: Ugyanúgy, mint háromszögeknél, az összegük $180°$

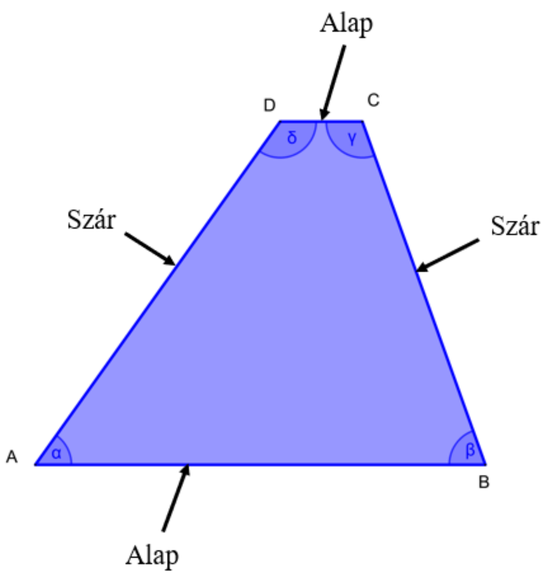
$\alpha + \alpha' = 180°$

$\beta + \beta' = 180°$

$\gamma + \gamma' = 180°$

$\delta + \delta' = 180$

Trapéz



1. A párhuzamos oldalak az alapok
2. Az alapokat összekötő oldalak a szárak
3. Azonos száron fekvő szögei összege 180°
4. Átlói nem egyenlő hosszúak, nem felezik egymást

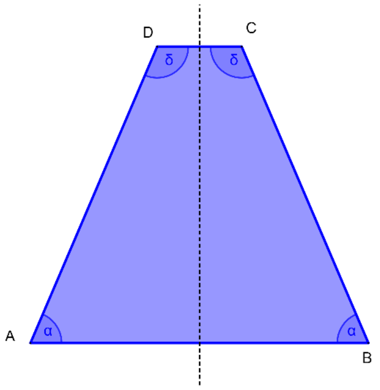
Speciális trapézok

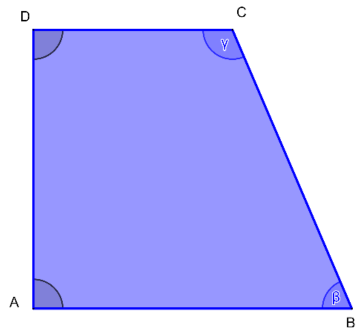
Szimmetrikus trapéz (húrtrapéz)

1. A két szára egyenlő hosszú
2. Az átlói egyenlő hosszúak
3. 1 szimmetria tengelye van
4. Alapon fekvő szögei egyenlőek

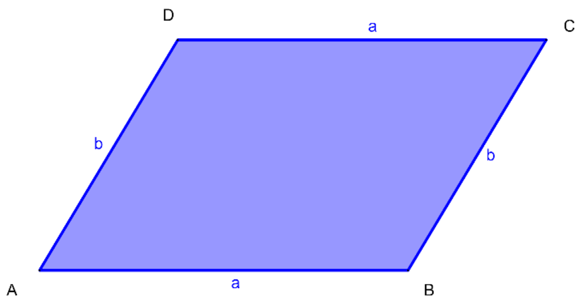
Derékszögű trapéz

5. Van 2 derékszöge
6. Átlók nem egyenlő hosszúak
7. Nincs szimmetria tengelye



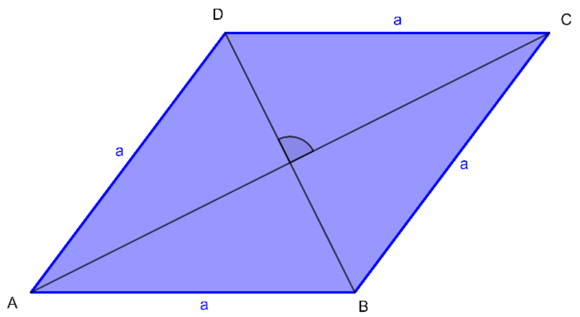


Paralelogramma



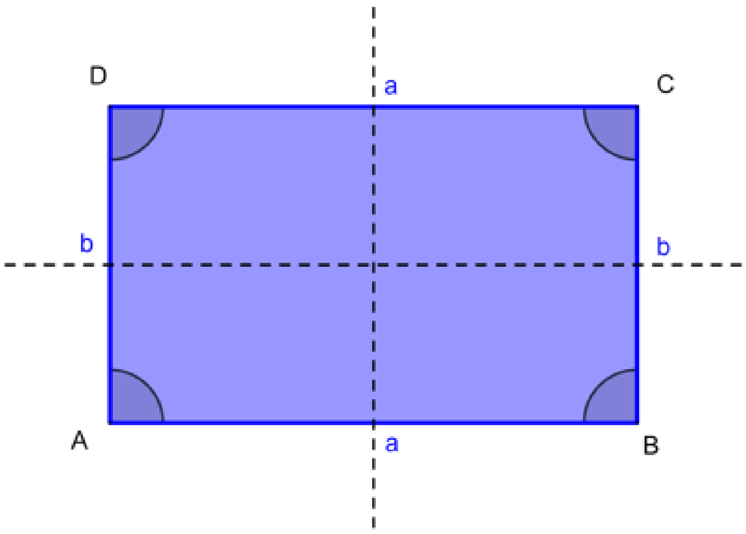
1. Szemközti oldalai párhuzamosak és ugyanolyan hosszúak
2. Átlói felezik egymást
3. Az egy oldalon fekvő szögeinek az összege 180°
4. A szemközti szögei egyenlőek

Rombusz



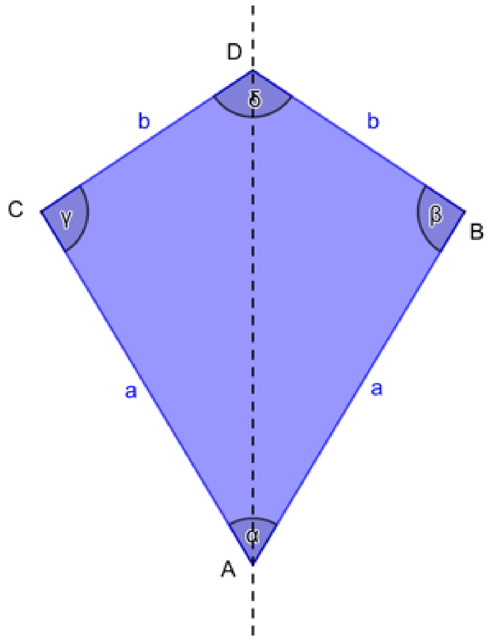
1. Paralelogramma és a trapéz minden tulajdonsága igaz rá
2. Minden oldala egyenlő
3. Átlói merőlegesek egymásra

Téglalap



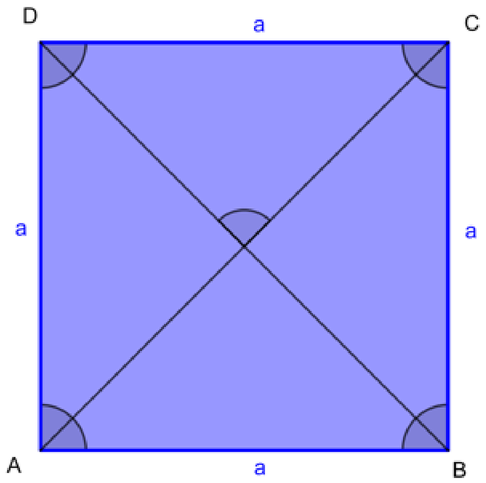
1. Paralelogramma és a trapéz minden tulajdonsága igaz rá
2. Minden szöge derékszög
3. 2 szimmetria tengelye van, az oldalak felezők pontjainál

Deltoid



1. Az egyik átlója szimmetria tengely
2. Szomszédos oldalai ugyanolyan hosszúak
3. Szemközti szögei ugyanakkorák (szimmetria tengely különböző oldalain lévők)
4. Szimmetria tengely felezni fogja azokat a szögeket, amiken átmegy
5. Átlók merőlegesek egymásra
6. Az az átló, ami a szimmetria tengely, felezni fogja a nem szimmetria tengely átlót

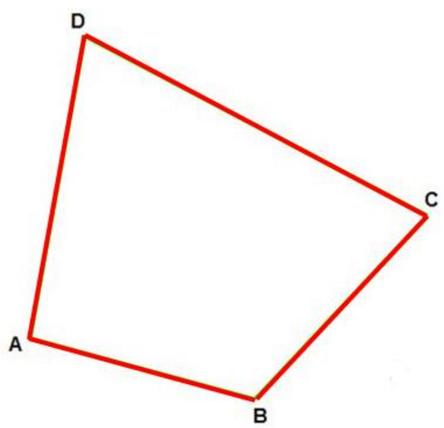
Négyzet



1. Trapéz, paralelogramma, téglalap, rombusz, deltoid minden tulajdonsága igaz rá
2. Átlói felezik a szögeket
3. Összesen 4 szimmetriatengelye van:
4. a 2 oldalfelező, és a 2 átló

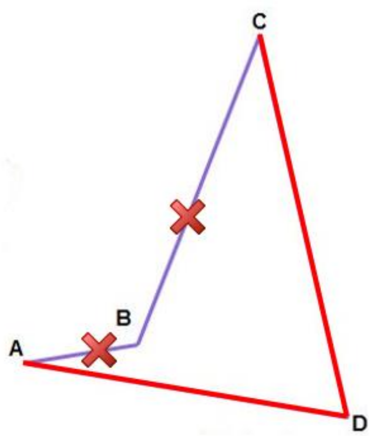
Konvex és konkáv négyszögek

Konvex



Konvex: Minden oldalát be tudjuk festeni

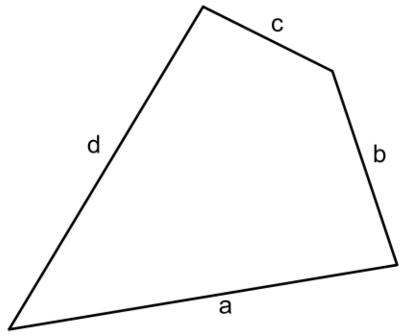
Konkáv



Konkáv: Nem tudjuk minden oldalát befesteni

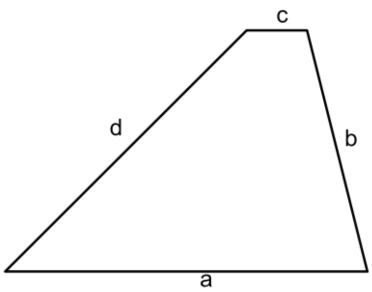
Négyszögek kerülete

Általános négyszög



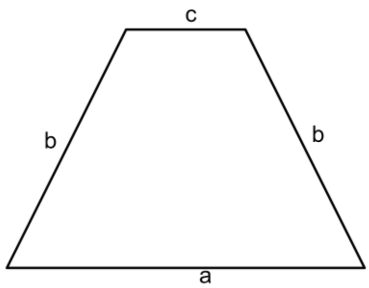
$$K = a + b + c + d$$

Trapéz



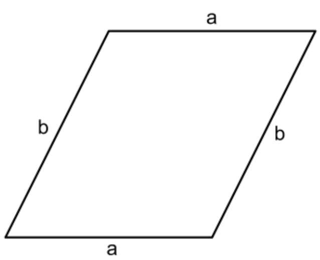
$$K = a + b + c + d$$

Szimmetrikus trapéz (húrtrapéz)



$$K = a + 2b + c$$

Paralelogramma

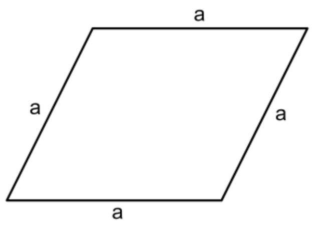


$$K = a + a + b + b$$

$$K = 2a + 2b$$

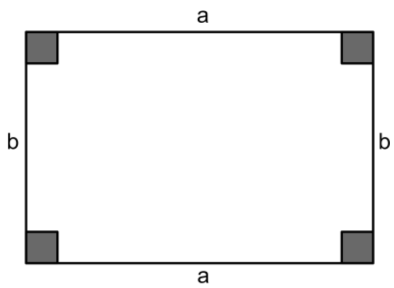
$$K = 2 \cdot (a + b)$$

Rombusz



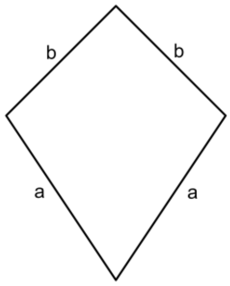
$$K = 4a$$

Téglalap



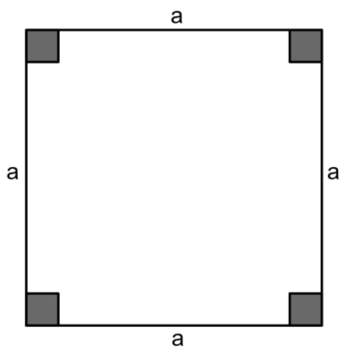
$$K = a + a + b + b$$
$$K = 2a + 2b$$
$$K = 2 \cdot (a + b)$$

Deltoid



$$K = a + a + b + b$$
$$K = 2a + 2b$$
$$K = 2 \cdot (a + b)$$

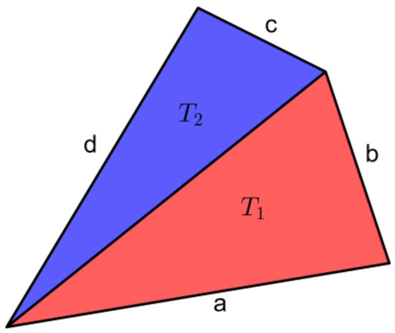
Négyzet



$$K = 4a$$

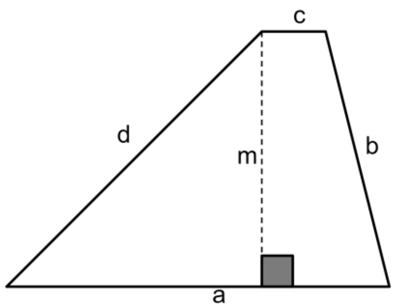
Négyszögek területe

Általános négyszög



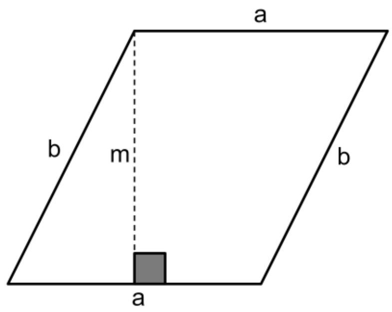
$$T = T_{\Delta 1} + T_{\Delta 2}$$

Trapéz



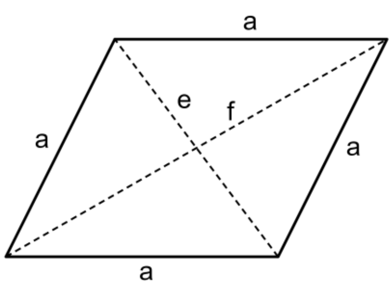
$$T = \frac{a + c}{2} \cdot m$$

Paralelogramma



$$T = a \cdot m$$

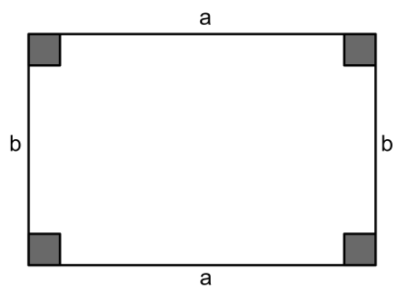
Rombusz



$$T = a \cdot m$$

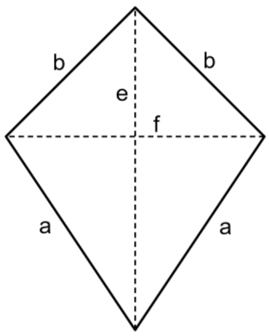
$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$

Téglalap



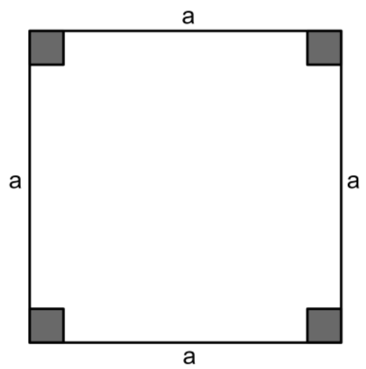
$$T = a \cdot b$$

Deltoid



$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$

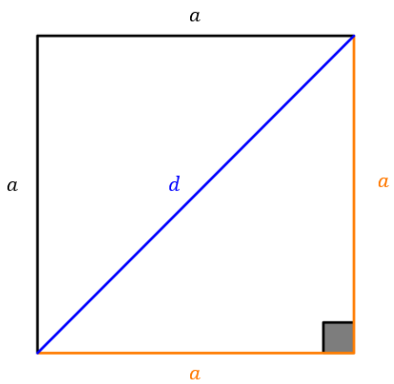
Négyzet



$$T = a \cdot a$$

$$T = a^2$$

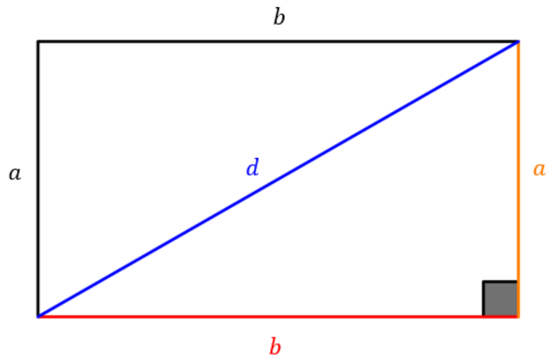
Négyzet átlója



Átló:

$$d = \sqrt{2} \cdot a$$

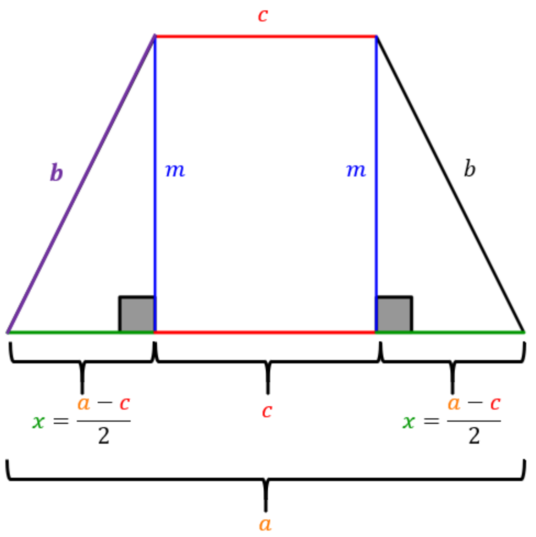
Téglalap átlója



Átló:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Húrtrapéz magassága



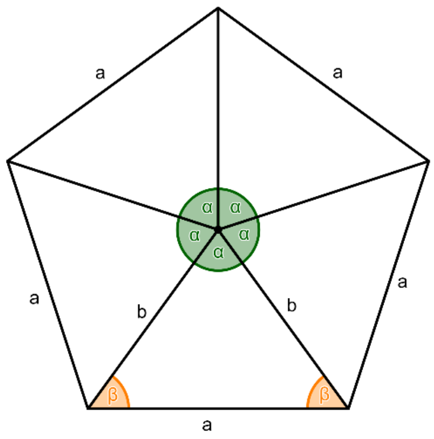
Pitagorasz-tétel:

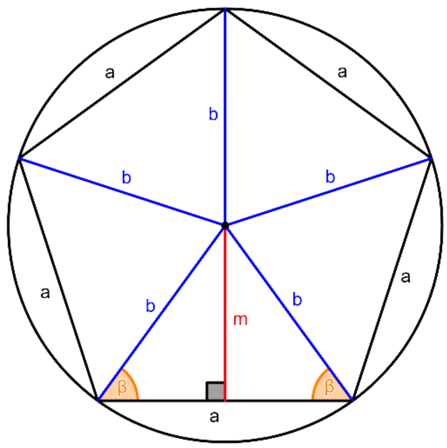
$$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{m}^2 = \boldsymbol{b}^2 \qquad /-x^2$$

$$m^2 = b^2 - x^2 \qquad /\sqrt{}$$

$$\boldsymbol{m = \sqrt{b^2 - x^2}}$$

Szabályos ötszög





5 oldal és 5 csúcs

Minden oldala és szöge egyenlő

Egyenlőszárú háromszögekre bontható

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$$

$$\beta = \frac{180° - \alpha}{2} = 54°$$

Belső szög: $2 \cdot \beta = 108°$

Külső szög: $\frac{360°}{5} = 72°$

Kerület: $K = 5 \cdot a$

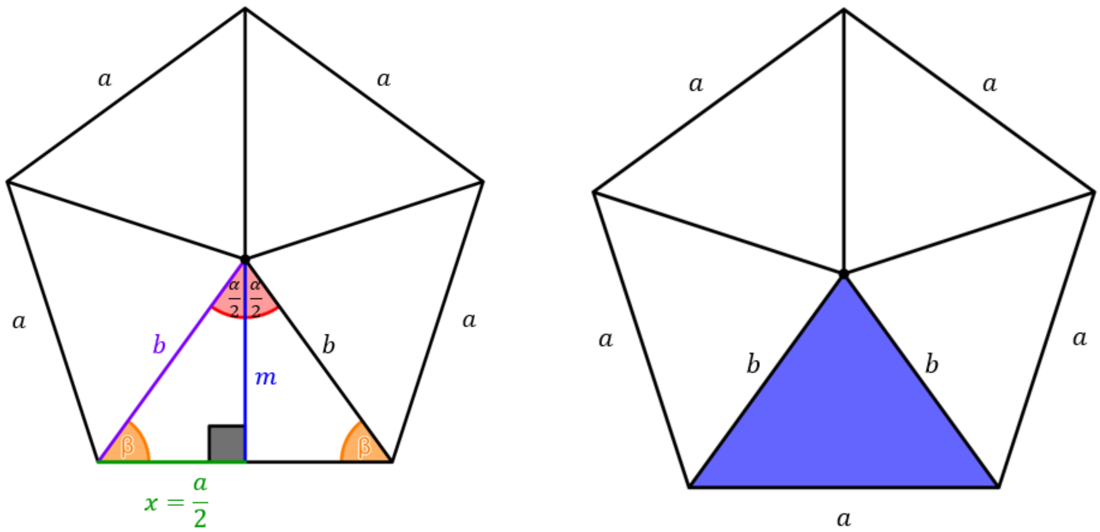
Terület: $T_{ötszög} = 5 \cdot T_{háromszög}$

$$T_{háromszög} = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{b \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$$

A köré írt kör sugara: $r = b$

Szimmetria tengelyek száma: 5

Ötszög magassága, területe



Középponti szög:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{360°}{5} = \mathbf{72°}$$

Egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{180° - \alpha}{2} = \mathbf{54°}$$

Középponti szög fele:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} = \frac{72°}{2} = \mathbf{36°}$$

Magasság:

$$\mathrm{tg}\,\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{m}} \rightarrow \boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\gamma}}$$

$$\mathrm{tg}\,\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{x}} \rightarrow \boldsymbol{m} = \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{tg}\,\boldsymbol{\beta}$$

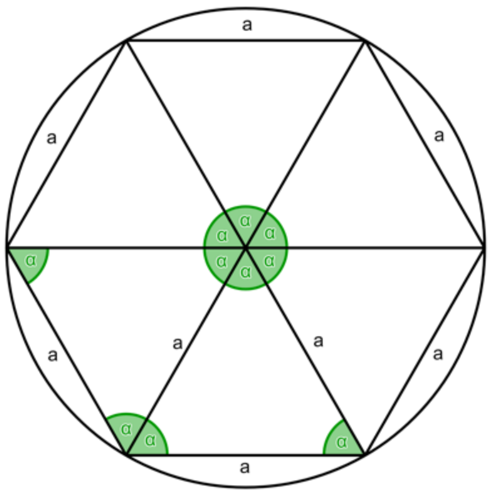
Háromszög területe:

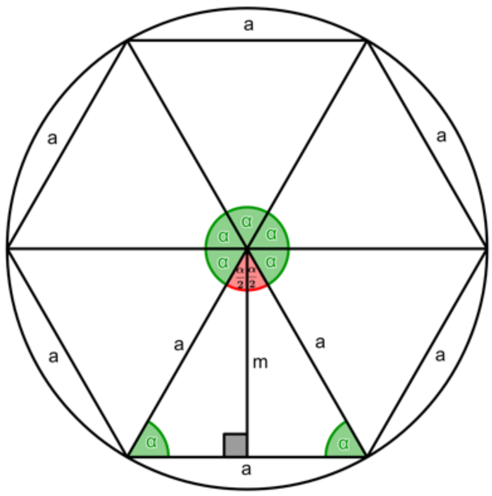
$$\boldsymbol{T}_\Delta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{m}}{\mathbf{2}}$$

Ötszög területe:

$$\boldsymbol{T} = \mathbf{5} \cdot \boldsymbol{T}_\Delta$$

Szabályos hatszög





6 oldal és 6 csúcs

Minden oldala és szöge egyenlő

Szabályos háromszögekre bontható

$$\alpha = \frac{360°}{6} = 60°$$

$$\beta = \frac{180° - \alpha}{2} = 60°$$

Belső szög: $2 \cdot \beta = 120°$

Külső szög: $\frac{360°}{6} = 60°$

Kerület: $K = 6 \cdot a$

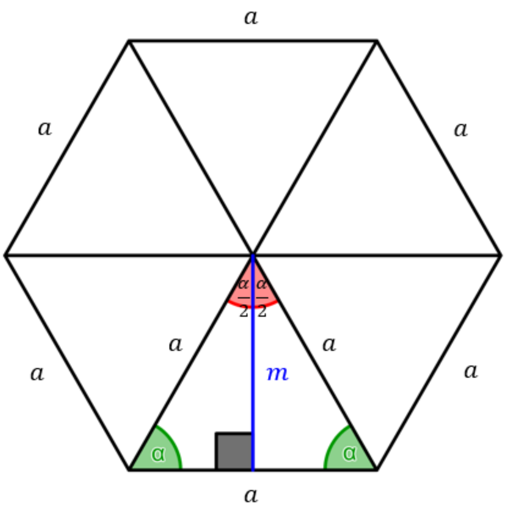
Terület: $T_{\text{ötszög}} = 6 \cdot T_{háromszög}$

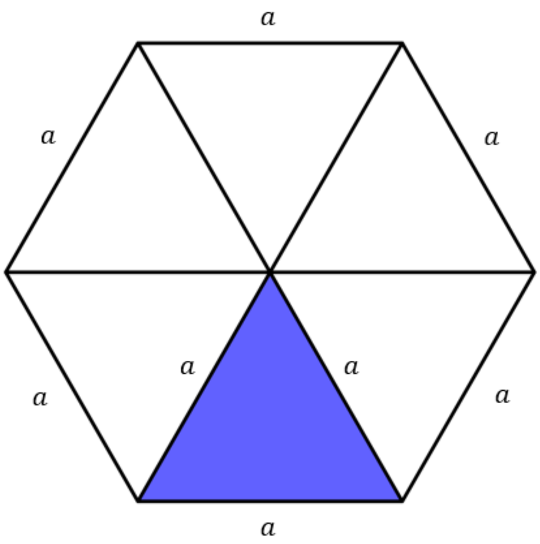
$$T_{háromszög} = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{a \cdot a \cdot \sin\alpha}{2}$$

A köré írt kör sugara: $r = a$

Szimmetria tengelyek száma: 6

Hatszög magassága, területe





Középponti szög:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{360°}{6} = \mathbf{60°}$$

Egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{180° - \alpha}{2} = \mathbf{60°}$$

Középponti szög fele:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} = \frac{60°}{2} = \mathbf{30°}$$

Magasság:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{a}$$

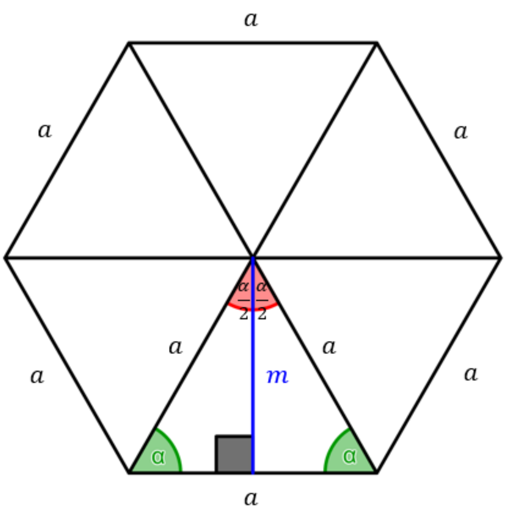
Háromszög területe:

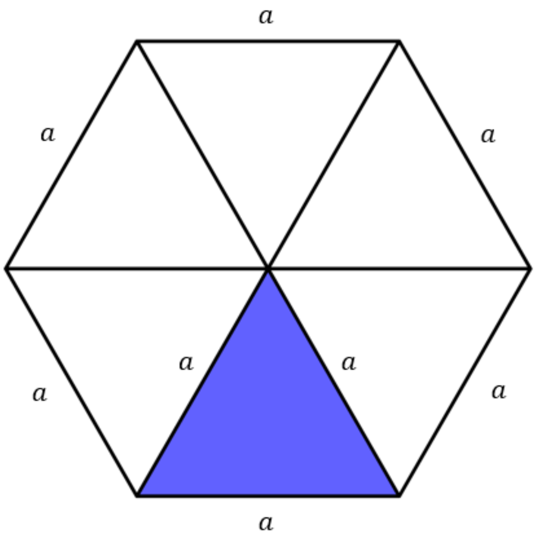
$$\boldsymbol{T}_{\Delta} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{m}}{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{sin}\,\mathbf{60°}}{\mathbf{2}}$$

Hatszög területe:

$$\boldsymbol{T} = \mathbf{6} \cdot \boldsymbol{T}_{\Delta}$$

Szabályos sokszögek (n) magassága, területe





Középponti szög:

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{360°}{n}}$$

Egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei:

$$\boldsymbol{\beta = \frac{180° - \alpha}{2}}$$

Középponti szög fele:

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{\alpha}{2}}$$

Magasság:

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{x}{m} \rightarrow m = \frac{x}{\mathrm{tg}\,\gamma}$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{m}{x} \rightarrow m = x \cdot \mathrm{tg}\,\beta$$

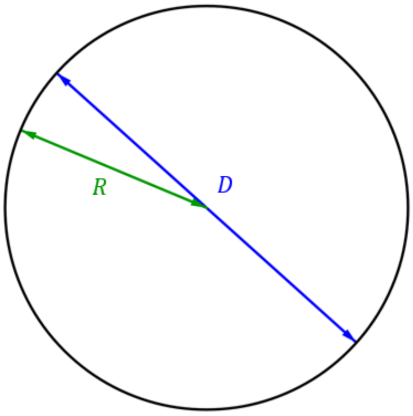
Háromszög területe:

$$\boldsymbol{T_{\Delta} = \frac{a \cdot m}{2}}$$

Sokszög területe:

$$\boldsymbol{T = n \cdot T_{\Delta}}$$

Kör



Sugár−Átmérő:

$$\boldsymbol{D = 2 \cdot R}$$

$$\boldsymbol{R = \frac{D}{2}}$$

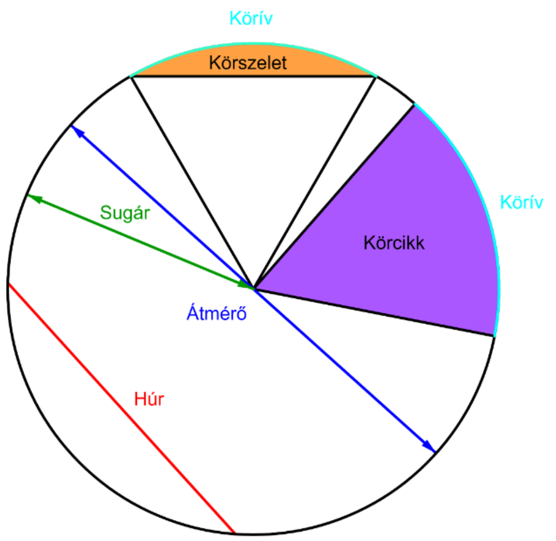
Kerület:

$$\boldsymbol{K = 2 \cdot R \cdot \pi = D \cdot \pi}$$

Terület:

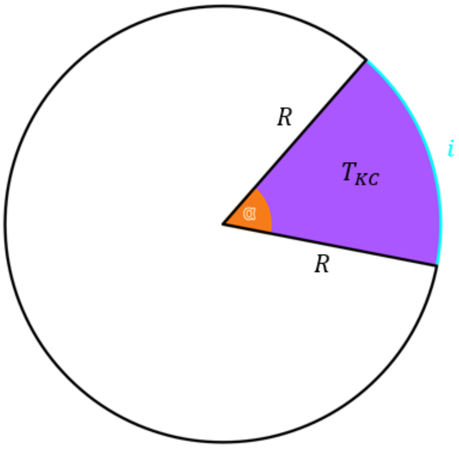
$$\boldsymbol{T = R^2 \cdot \pi = \frac{D^2}{4} \cdot \pi}$$

Kör részei



1. A körvonal két pontját összekötő szakaszt **húrnak** nevezzük
2. A legnagyobb húr átmegy a középponton, neve **átmérő,** jele: D, d
3. A kör középpontját és a körvonal egy pontját összekötő szakasz neve **sugár,** jele: R, r
4. A körvonalat darabokra osztva **körív**eket kapunk
5. Két sugár és egy körív **körcikk**et vág ki a körből
6. A körív két végpontját összekötő húr és a körív által határolt alakzat neve **körszelet**

Kör ívhossza, körcikk területe



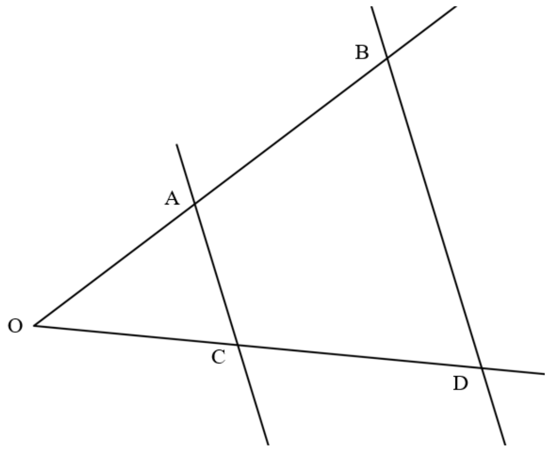
Körív:

$$\boldsymbol{i = \frac{\alpha}{360°} \cdot K = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot R \cdot \pi = \frac{\alpha}{180°} \cdot R \cdot \pi}$$

Körcikk területe:

$$\boldsymbol{T_{KC} = \frac{\alpha}{360°} \cdot T}$$

Párhuzamos szelők tétele



$$\boldsymbol{\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|BD|}}$$