MATEMATIKA

PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

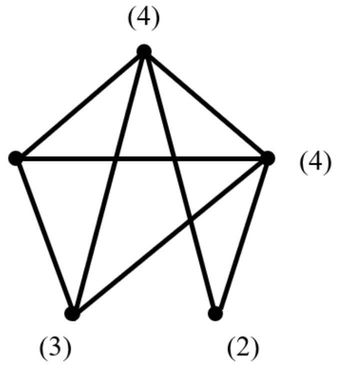
Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során a **zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, n!, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont**.
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
A = {14; 21; 28; 35; 42; 49; 56; 63; 70; 77; 84; 91; 98}	1 pont	
B = {14; 24; 34; 44; 54; 64; 74; 84; 94}	1 pont	
$A \cap B$ = {14; 84}	1 pont	
$B \setminus A$ = {24; 34; 44; 54; 64; 74; 94}	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2.		
a) Egy megfelelő (egyszerű) gráf, például: 	2 pont	
b) 3	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

<table>
<tr><th colspan="3">3.</th></tr>
<tr><td>A) Hamis</td><td rowspan="3">2 pont</td><td rowspan="3">2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.</td></tr>
<tr><td>B) Hamis</td></tr>
<tr><td>C) Igaz</td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
</table>

4.		
Június	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
1, 4, 7	3 pont	*Minden helyes számjegy 1 pontot ér. 1 helytelen szám esetén 1-gyel, 2 vagy több helytelen szám esetén 2-vel kevesebb pont jár.*
Összesen:	**3 pont**	

6.		
$x_1 = -4$	1 pont	
$x_2 = 4$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
14%	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

8.		
$\frac{3\pi}{4}$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

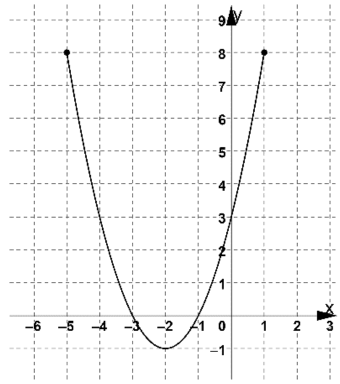
9.		
4	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

10.		
Meredekség: $-0{,}2$	1 pont	
Metszéspont *x* koordinátája: $x = 0$	1 pont	$P(0; 2)$
Metszéspont *y* koordinátája: $y = 2$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

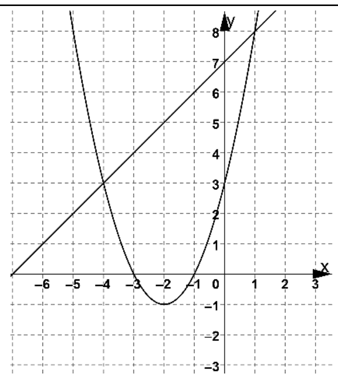
11.		
390 000 (Ft)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

12.		
A képezhető négyjegyű számok száma: $4! = 24$.	1 pont	
Ezek közül $3! = 6$ páratlan.	1 pont	
Így a keresett valószínűség $\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II. A

13. a)		
Az ábrázolt függvény grafikonja az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjából eltolással származik,	1 pont	
az $x = -5$-nél és	1 pont	
az $x = 1$-nél teli karikával vannak jelölve a pontok	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

13. b)		
A függvénynek az $x = -2$ helyen van szélsőértéke (minimuma),	1 pont	
melynek értéke –1.	1 pont	
Az egyik zérushely $x_1 = -3$,	1 pont	
a másik $x_2 = -1$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

13. c) **első megoldás**		
Az $f: x \mapsto x + 7$ függvény helyes ábrázolása (ugyanabban a koordinátarendszerben).	2 pont	
A metszéspontok első koordinátáinak leolvasása: $x_1 = -4$ és $x_2 = 1$	2 pont	
A kapott értékek ellenőrzése behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. c) második megoldás		
$x^2 + 4x + 4 - 1 = x + 7$	1 pont	
$x^2 + 3x - 4 = 0$	1 pont	
$x_1 = -4$	1 pont	
$x_2 = 1$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. a)		
A háromszög kérdéses oldalára a koszinusztételt felírva (a kérdéses oldalt c-vel jelölve):	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$c^2 = 4{,}5^2 + 6{,}3^2 - 2 \cdot 4{,}5 \cdot 6{,}3 \cdot cos\,75°$	1 pont	
$c = 6{,}7\ cm$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. b)		
I) Hamis II) Hamis III) Igaz IV) Hamis	3 pont	*3 jó válasz esetén 2 pont, 2 jó válasz esetén 1 pont, minden más esetben 0 pont jár.*
Összesen:	**3 pont**	

14. c)		
$sin\,x = 0{,}5$	1 pont	
$x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	2 pont	
$x_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a megoldását fokban adja meg, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen. Ha a vizsgázó periódus nélkül vagy a [0;2π] intervallumon adja meg az egyenlet megoldásait, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

15. a)		
„A Jövőnek” számlán lévő összeg kamatozása megfeleltethető egy számtani sorozat egymást követő tagjainak, ahol a_1=150 000 és d=3000. A 49. tagot kell kiszámolni.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$a_{49} = 150\,000 + 48 \cdot 3000 =$	1 pont	
= 294 000 (Ft)	1 pont	
Az „Előre” számlán lévő összeg kamatozása megfeleltethető egy mértani sorozat egymást követő tagjainak, ahol a_1=150 000 és q=1,016. A 49. tagot kell kiszámolni.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$a_{49} = 150\,000 \cdot 1{,}016^{48} =$	1 pont	
= 321 358 (Ft)	1 pont	
Gábornak az „Előre” számlát érdemes választania.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

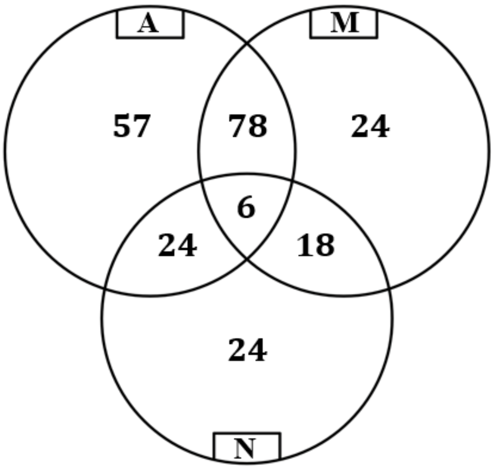
15. b) első megoldás		
A 2400 Ft-ba kerülő menük számát jelölje x, ekkor a 2500 Ft-ba kerülő menük száma: $20 - (4 + 5 + x) = 11 - x$	2 pont	
A feladat szövege alapján: $2360 = \frac{4 \cdot 2200 + 5 \cdot 2300 + x \cdot 2400 + (11 - x) \cdot 2500}{20}$,	1 pont	
amiből $x = 6$	2 pont	
Gábor áprilisban 6-szor 2400 Ft-ért, 5-ször 2500 Ft-ért vásárolta a menüt.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a 12 lehetséges egész értéket ($0 \leq x \leq 11$) kipróbálva helyes következtetésre jut, akkor ezért teljes pontszámot kapjon.

<table>
<tr><td colspan="3">15. b) második megoldás</td></tr>
<tr><td>Gábor áprilisban $20 \cdot 2360 = 47\,200$ Ft-ot költött menüre.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Azon a 9 napon, amikor 2200 Ft vagy 2300 Ft volt a menü, összesen $4 \cdot 2200 + 5 \cdot 2300 = 20\,300$ Ft-ot költött menüre.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Tehát azon a 11 napon, amikor 2400 Ft vagy 2500 Ft volt a menü, összesen $47\,200 - 20\,300 = 26\,900$ Ft-ot költött menüre.</td><td>1 pont</td><td rowspan="4">A feladat megoldható másik gondolatmenettel is. Ha mind a 11 napon 2500 Ft-os menüt rendelne, akkor az 27 500 Ft lenne összesen. Ez 600 Ft-tal több, mint a 26 900 Ft-os ár. A két menü között 100 Ft a különbség, így 11-től 6-tal kevesebb 2500 Ft-os menüt vásárolt, hogy kijöjjön a 26 900 Ft.</td></tr>
<tr><td>Ha mind a 11 napon 2400 Ft lett volna a menü, az összesen 26 400 Ft lett volna, ami 500-zal kevesebb, mint 26 900.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>Mivel a két menü között 100 Ft a különbség, ezért 11 nap helyett 5-tel kevesebb, vagyis 6 napon vásárolta a 2400 Ft-os menüt, így kijön a 26 900 Ft.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>Tehát Gábor áprilisban 6-szor 2400 Ft-ért, 5-ször 2500 Ft-ért vásárolta a menüt.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>6 pont</td><td></td></tr>
</table>

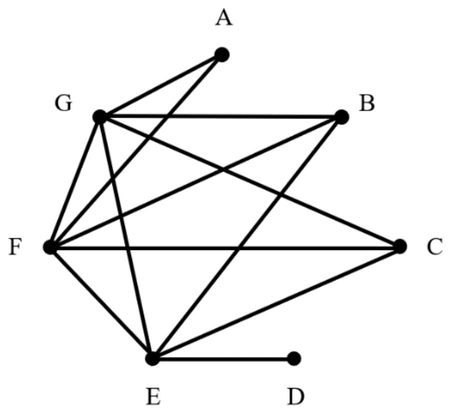
II. B

16. a)		
$300 \cdot 0{,}08 = 24$	1 pont	
Matematikára és németre 24 diák jár.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

16. b)		
 A Venn−diagramban az angol, matematika és német halmaz közös metszetének a kitöltéséért nem jár pont, a többi tartomány helyes kitöltéséért 1-1 pont jár.	6 pont	*A:* $300 \cdot 0{,}55 = 165$ *M:* $300 \cdot 0{,}42 = 126$ *N:* $300 \cdot 0{,}24 = 72$ *A és M:* $300 \cdot 0{,}28 = 84$ *M és N:* $300 \cdot 0{,}08 = 24$ *A és N:* $300 \cdot 0{,}1 = 30$ *Mindhárom:* $300 \cdot 0{,}02 = 6$ *Csak A és M:* $84 - 6 = 78$ *Csak M és N:* $24 - 6 = 18$ *Csak A és N:* $30 - 6 = 24$ *Csak A:* $165 - 6 - 78 - 24 = 57$ *Csak M:* $126 - 6 - 78 - 18 = 24$ *Csak N:* $72 - 6 - 18 - 24 = 24$
Összesen:	**6 pont**	

16. c)		
$78 + 24 + 18 = 120$ diák vesz rész pontosan 2 különórán, vagyis	1 pont	
a 300 diák 40%-a.	1 pont	$\frac{120}{300} \cdot 100 = 40\%$
Összesen:	**2 pont**	

16. d)		
Idén 32-en érettségiznek és 96-an nem érettségiznek.	1 pont	
Az idén érettségizők $\frac{3}{8}$-a, azaz 12 diák nem jár különórára.	1 pont	
Az idén nem érettségizők $\frac{3}{4}$-e, azaz 72 diák nem jár különórára.	1 pont	
A három megkérdezett diák $\binom{128}{3}$–féleképpen választható ki (összes eset).	1 pont	
Az különórára nem járó diákok közül $\binom{12}{1}$–féleképpen választhatjuk ki azokat, akik idén érettségiznek, $\binom{72}{2}$–féleképpen választhatunk olyan diákokat közülük, akik idén nem érettségiznek (kedvező esetek).	1 pont	*A kevésbé részletezett helyes gondolatmenetért is jár a pont.*
A keresett valószínűség: $\frac{\binom{12}{1}\cdot\binom{72}{2}}{\binom{128}{3}}\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}0898$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

17. a)		
Egy megfelelő gráf (a csúcsokat a nevek kezdőbetűjével jelölve): 	4 pont	*Három csúcs helyes fokszáma 1 pontot, négy csúcsé 2 pontot, öt csúcsé 3 pontot ér.*
Összesen:	**4 pont**	

17. b)		
Ha Dávid egyetlen találkozása Annával lett volna,	2 pont	*Ez a 3 pont jár, ha a vizsgázó egy gráfon egyértelműen jelöli az AD élt és a G-ből (vagy E-ből, vagy F-ből) induló négy élt.*
akkor például Géza Danin kívül mindenki mással találkozott volna.	1 pont	
Ekkor azonban Feri már nem tudott volna öt társával találkozni, hiszen legfeljebb Gézával, Bencével, Csengével és Elemérrel találkozhatott volna, így nem lenne meg az 5 találkozása.	2 pont	*Az „ellentmondásra jutás” bármilyen helyes indoklásáért jár ez a 2 pont.*
Tehát igazoltuk, hogy Anna nem találkozhatott Dáviddal.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. c)		
A keresett valószínűséget a binomiális eloszlás képletével fogjuk kiszámolni, ahol	1 pont	*Ha ezek a gondolatok a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.*
a találkozás valószínűsége 0,17,	1 pont	
a nem találkozásé pedig 0,83.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy egyik nap sem találkozik osztálytárssal: $0{,}83^4 = 0{,}475$	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy pontosan egy nap találkozik osztálytárssal: $\binom{4}{1} \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}83^3 = 0{,}389$	1 pont	
A keresett valószínűség $0{,}475 + 0{,}389 \approx 0{,}864$.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

18. a)		
A 130%-kal magasabb nézőszám: $1270 \cdot 2{,}3 =$	1 pont	*130%-kal nagyobb nézőszám esetén az eredeti nézőszám 230%-át számoljuk ki:* $100\% + 130\% = 230\%$
= 2921.	1 pont	
Hetek száma: $\frac{2921-1270}{185} = 8{,}92$.	1 pont	
Várhatóan 9 hét múlva lesz a nézettség legalább 130%-kal magasabb a jelenleginél.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. b)		
Az egymás utáni epizódok pontszámait egy mértani sorozat egymást követő tagjainak tekinthetjük, ahol q=0,95	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.*
A feladat szövege alapján felírható egyenlet: $0{,}95^n = 0{,}74$,	1 pont	
amiből $n = \frac{lg\,0{,}74}{lg\,0{,}95} = 5{,}87$	2 pont	$n = \log_{0{,}95} 0{,}74$
Várhatóan 6 hét múlva lesz az epizód pontszáma a jelenleginek a 74%-a.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. c)		
A csonkagúla alapéle $a = \sqrt{484} = 22\ cm$,	1 pont	
fedőéle $c = \frac{22}{2} = 11\ cm$.	1 pont	
A csonkagúla függőleges metszete (az alapél fele mentén) egy húrtrapéz, melynek hosszabb alapja a, rövidebb alapja c, szárai a csonkagúla lapmagasságával (m) egyeznek meg, és magassága a gúla magassága lesz, $M = 6\ cm$.	1 pont	*Ezek a pontok egy megfelelő ábráért is járnak.*
A trapéz rövidebb alapjának egy végpontját a hosszabb alapra függőlegesen vetítve egy derékszögű háromszöget kapunk, melynek átfogója m, egyik befogója M és másik befogója	1 pont	
$\frac{22-11}{2} = 5{,}5\ cm$. Pitagorasz-tétel: $m = \sqrt{5{,}5^2 + 6^2} = 8{,}14\ cm$	1 pont	
A gúla lapjainak területei: $T_{fedő} = c^2 = 11^2 = 121\ cm^2$ $T_{oldal} = \frac{a+c}{2} \cdot m = \frac{22+11}{2} \cdot 8{,}14 = 134{,}31\ cm^2$ $T_{palást} = 4 \cdot T_{oldal} = 4 \cdot 134{,}31 = 537{,}2\ cm^2$	2 pont	*A palást és a fedőlap területének helyes kiszámítása 1-1 pont.*
Kékre festett kellékek felülete: $A_{kék} = T_{fedő} + T_{palást} = 121 + 537{,}2 = 658{,}2\ cm^2$	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	