MATEMATIKA

PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során a **zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, n!, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont**.
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
$B = \{2; 3; 7; 13\}$	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
16	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
A) Hamis	2 pont	*2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár.*
B) Igaz		
C) Hamis		
Összesen:	**2 pont**	

4.		
B	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5.		
$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$	1 pont	
Az egyenlet rendezve: $x^2 - 6x - 7 = 0$	1 pont	
$x_1 = -1,\ x_2 = 7$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
0,868 (m^3)	2 pont	*≈0,87*
Összesen:	**2 pont**	

7.		
Az adatokat feltüntető helyes ábra, a szög nagysága α.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül jól dolgozik.*
$\sin\alpha = \frac{0{,}3}{5} = 0{,}06$	1 pont	*Az 5 m^2 területű 1 m szélességű rámpa hossza 5 m lesz.*
Az emelkedési szög 3,4°.	1 pont	*Nem megfelelően kerekített szög esetén nem jár a pont.*
Összesen:	**3 pont**	

8.		
Fél liter = 500 cm^3	1 pont	
Ha a doboz d cm átmérőjű, akkor a térfogata: $\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 14{,}2 = 500$,	1 pont	*Sugárral számolva:* $r^2 \cdot \pi \cdot 14{,}2 = 500$
ahonnan $d \approx 6{,}7$ cm.	1 pont	$r \approx 3{,}35\ cm$ $d \approx 6{,}7\ cm$
Összesen:	**3 pont**	

9.		
a) például $(2; -1)$	1 pont	
b) $2x - y = 4$	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.		
Terjedelem: 3	1 pont	
Medián: 4	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
Összes eset: $6 \cdot 6 = 36$	1 pont	
A kedvező esetek (sárga; zöld): (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 6), összesen 9.	2 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó más módon (pl. ábrával) határozza meg helyesen a kedvező esetek számát. Ha nem ír indoklást, maximum 1 pont adható.*
A kérdéses valószínűség $\frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12.		
5400 (Ft)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

II. A

13. a)		
A sorozat hányadosát q-val jelölve: $2q \cdot 2q^3 = 156{,}25$	1 pont	$a_2 = a_1 \cdot q$ $a_4 = a_1 \cdot q^3$
$q_1 = 2{,}5$; $q_2 = -2{,}5$	2 pont	
Ha a hányados 2,5, akkor a sorozat első 6 tagjának összege: $S_6 = 2 \cdot \frac{2{,}5^6 - 1}{2{,}5 - 1} =$	1 pont	
= 324,19	1 pont	
Ha a hányados –2,5, akkor a sorozat első 6 tagjának összege: $S_6 = 2 \cdot \frac{(-2{,}5)^6 - 1}{(-2{,}5) - 1} =$	1 pont	
= –138,94	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

13. b) első megoldás		
A szöveg alapján felírható egyenlet: $216 = \frac{(2 \cdot 7 + (n-1) \cdot 2)}{2} \cdot n$	1 pont	$S_n = \frac{(2a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} \cdot n$
Ebből $n^2 + 6n - 216 = 0$	2 pont	$2n^2 + 12n - 432 = 0$
A negatív gyök (–18) a feladatnak nem megoldása.	1 pont	
$n = 12$	1 pont	
A sorozat első 12 tagjának összege lesz 216.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

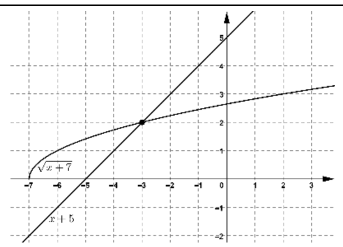
13. b) második megoldás		
A szöveg alapján felírható egyenlet: $216 = \frac{7 + 7 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n$	1 pont	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
Ebből $n^2 + 6n - 216 = 0$	2 pont	$2n^2 + 12n - 432 = 0$
A negatív gyök (–18) a feladatnak nem megoldása.	1 pont	
$n = 12$	1 pont	
A sorozat első 12 tagjának összege lesz 216.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a sorozat tagjait egyenként kiszámolva vizsgálja a kívánt összeg elérését, és jó eredményre jut, akkor a teljes pontszám jár.

14. a) első megoldás

A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $x \geq -7$, értékkészlete miatt pedig $x \geq -5$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel mindkét gyököt ellenőrzi.*
Négyzetre emelve az egyenlet mindkét oldalát: $x + 7 = 25 + 10x + x^2$	1 pont	
Rendezve: $x^2 + 9x + 18 = 0$	1 pont	
$x_1 = -6$; $x_2 = -3$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel: $x_1 = -6$ nem megoldása az egyenletnek; $x_2 = -3$ megoldása az egyenletnek.	1 pont	*A [–5; ∞] intervallumon ekvivalens átalakításokat végeztünk, így $x_1 = -6$ nem megoldása az egyenletnek; $x_2 = -3$ megoldása az egyenletnek.*
Összesen:	**5 pont**	

14. a) második megoldás

Az $x \mapsto \sqrt{x+7}$ függvény ábrázolása.	2 pont	
Az $x \mapsto 5 + x$ függvény ábrázolása ugyanabban a koordináta-rendszerben.	1 pont	
A grafikonok közös pontjának első koordinátáját leolvasva: $x = -3$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. b)

$\frac{3x+6}{21} + \frac{42+7x}{21} = 2x - 10 - 14$	1 pont	
$\frac{10x+48}{21} = 2x - 24$	1 pont	
$x = 17{,}25$	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. a)		
A trapéz magassága legyen m. A *D* pont merőleges vetülete az *AB* oldalra legyen *E* pont. Az *AED* derékszögű háromszögben meghatározzuk m-et:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az ábrán jelenítette meg a gondolatmenetét.*
$sin\,76° = \dfrac{m}{4{,}1}$	1 pont	
$m = sin\,76° \cdot 4{,}1 \approx 3{,}98\ cm$	1 pont	$m \approx 4\ cm$
Az *ABCD* trapéz *C* csúcsánál lévő belső szög legyen γ. A *C* pont merőleges vetülete az *AB* oldalra legyen *F* pont. Az *FBC* derékszögű háromszög *C* csúcsánál lévő belső szöge γ – 90°, így felírható, hogy	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az ábrán jelenítette meg a gondolatmenetét.*
$cos(\gamma - 90°) = \dfrac{3{,}98}{5} \approx 0{,}796$	1 pont	$cos(\gamma - 90°) = \dfrac{4}{5}$
amiből $\gamma \approx 127{,}3°$	1 pont	$\gamma \approx 126{,}9°$
Összesen:	**6 pont**	

15. b)		
Az *AED* háromszögre felírjuk a Pitagorasz-tételt: $AE^2 = 4{,}1^2 - 3{,}98^2$	1 pont	*Vagy m = 4-gyel számolva:*
$AE \approx 0{,}98\ cm$	1 pont	$AE = 0{,}9\ cm$
Az *FBC* háromszögre felírjuk a Pitagorasz-tételt: $FB^2 = 5^2 - 3{,}98^2$	1 pont	*Vagy m = 4-gyel számolva:*
$FB \approx 3{,}03\ cm$	1 pont	$FB = 3\ cm$
$DC = 8 - 0{,}98 - 3{,}03 \approx 4\ cm$	1 pont	$DC = 8 - 0{,}9 - 3 \approx 4{,}1\ cm$
Összesen:	**5 pont**	

15. c)		
$T = \dfrac{8+4}{2} \cdot 3{,}98 =$	1 pont	$T = \dfrac{8+4{,}1}{2} \cdot 4 =$
$= 23{,}9\ cm^2$	1 pont	$= 24{,}2\ cm^2$
Összesen:	**2 pont**	

II. B

16. a)

$lg\, O_j = 0{,}64 \cdot lg\, 9 + 0{,}2$	2 pont	*A feladat szövegében megadott képlet használatában elkövetett elvi hiba esetén ez a 3 pont nem jár.*
$lg\, O_j \approx 0{,}811$	1 pont	
$O_j \approx 6{,}467$	1 pont	
8 óra alatt $8 \cdot 6{,}467 = 51{,}736 \approx 51$ hibátlan oldalt készít el a szerkesztő.	1 pont	*Más kerekítés nem fogadható el.*
Összesen:	**5 pont**	

16. b)

$lg\, 4{,}4 = 0{,}64 \cdot lg\, O_f + 0{,}2$	2 pont	*A feladat szövegében megadott képlet használatában elkövetett elvi hiba esetén ez a 4 pont nem jár.*
$lg\, O_f = \dfrac{lg\, 4{,}4 - 0{,}2}{0{,}64} \approx$	1 pont	
$\approx 0{,}693$	1 pont	
$O_f \approx 4{,}9 \approx 5$ 1 óra alatt 5 oldalt dolgozott fel.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. c)

$O_j = O_f$ felismerése.	2 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a 2 pont.*
Legyen a keresett oldalszám O. $lg\, O = 0{,}64 \cdot lg\, O + 0{,}2$	1 pont	$O = O_j = O_f$
$lg\, O = \dfrac{0{,}2}{0{,}36} = 0{,}\dot{5}$	2 pont	
$O \approx 3{,}6$	1 pont	
A legkisebb oldalmennyiség, amire az összefüggés még értelmezhető, 3,6 oldal óránként.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

17. a)		
Az első ütemterv szerint a naponta megírt oldalak száma egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja $a_1 = 0{,}5$, első 6 tagjának összege pedig $S_6 = 21$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A sorozat differenciáját d-vel jelölve: A feladat szövege alapján $21 = \frac{2 \cdot 0{,}5 + 5d}{2} \cdot 6$.	1 pont	$S_n = \frac{(2a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} \cdot n$
Amiből $d = 1{,}2$.	1 pont	
Az első ütemterv szerint Petinek naponta legalább 1,2 oldallal kell többet írnia, mint a megelőző napon.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. b)		
Az második ütemterv szerint a naponta megírt oldalak száma egy olyan mértani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja $a_1 = 0{,}5$, hányadosa $q = 1{,}456$, első n tagjának összege pedig $S_n = 21$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A feladat szövege alapján $21 = 0{,}5 \cdot \frac{1{,}456^n - 1}{1{,}456 - 1}$	1 pont	$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
$1{,}456^n = 20{,}152$	1 pont	
$n = \frac{lg\, 20{,}152}{lg\, 1{,}456} =$	1 pont	$n = log_{1{,}456} 20{,}152$
$= 7{,}994 \approx 8$	1 pont	
A második ütemterv szerint a 8. napon fejezi be.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. c)		
Az évfolyamon tanuló diákok száma legyen n. Ekkor a 7738 szót író diákok száma $0{,}35n$, az 5373 szót író diákoké $0{,}65n$.	1 pont	
A fogalmazásokba írt szavak összege: $0{,}35n \cdot 7738 + 0{,}65n \cdot 5373 = 6200{,}75n$,	2 pont	$0{,}35 \cdot 7738 + 0{,}65 \cdot 5373 =$ $= 6200{,}75 \approx 6201$ *számolás esetén is jár a megfelelő pontszám.*
átlaga pedig $\frac{6200{,}75n}{n} = 6200{,}75 \approx 6201$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. d)		
A feladat szövege alapján: $27 = 0{,}75 \cdot 44 + b$	2 pont	
$b = -6$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. a)		
A téglatest rövidebb éle legyen a, hosszabb éle így $3a$. A téglatest A csúcsából kiinduló legrövidebb lapátló a négyzetlap lapátlója, ami legyen x. A testátló legyen y. x, y és az egyik $3a$ él egy derékszögű háromszöget alkot.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$x = \sqrt{2}a$	1 pont	
Az A csúcsnál lévő szöget α-val jelölve: $tg\,\alpha = \frac{3a}{\sqrt{2}a} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}12$	1 pont	
amiből $\alpha = 64{,}8°$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. b)		
A fokszámokhoz tartozó csúcsokat jelöljük rendre *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* és *H* betűvel. A *H* csúcsból minden másik csúcsba fut egy él.	1 pont	
Mivel *A* fokszáma 1, *A*-ba csak *H*-ból fut él.	1 pont	
A *G* csúcsból fusson él az *A* csúcsot kivéve minden csúcsba.	1 pont	
Mivel *B* fokszáma 2, *B*-be csak *H*-ból és *G*-ből fut él.	1 pont	
Ekkor az *F* csúcsot már csak *C*, *D* és *E* csúcsokkal lehet összekötni, vagyis nem lehet a fokszáma 6.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy olyan 8 csúcsú gráfot rajzol, amely tükrözi a feladat megértését, de szövegesen nem indokolja az ellentmondást, akkor 3 pontot kaphat.

18. c)		
Mindegyik él két csúcsot köt össze, így az egyes csúcsokból induló éleket megszámolva minden élt kétszer számolunk meg.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Így az összes fokszám összege éppen kétszerese az élek számának.	1 pont	
Az élek száma tehát: $\frac{3+1+5+3+3+4+5}{2} = 12$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. d)		
A kör sugara $\frac{10}{2} = 5\ cm$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha átmérővel jól számol.*
Az alapkör területe: $T_{kör} = 5^2 \cdot \pi = 25\pi \approx 78{,}54\ cm^2$	1 pont	*Az ívhossz:* $2 \cdot 5 \cdot \pi = 10\pi \approx 31{,}42\ cm$
A palást területe: $T_{palást} = 5 \cdot \pi \cdot 15 = 75\pi \approx 235{,}6\ cm^2$	1 pont	*A palást területe:* $\frac{10\pi \cdot 15}{2} = 235{,}6\ cm^2$
$A_{kúp} = 25\pi + 75\pi = 100\pi \approx 314{,}2\ cm^2$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	