MATEMATIKA

PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

KÖZÉPSZINTŰ
ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

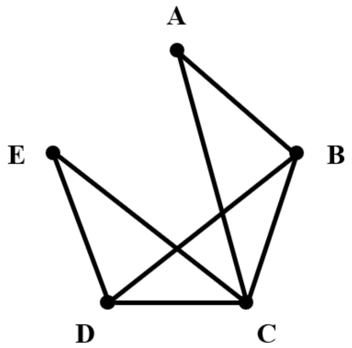
Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során a **zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, n!, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont**.
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
8	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
	3 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3.		
A és D	2 pont	*1 jó válasz, vagy 2 jó és 1 rossz válasz esetén 1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

4.		
C	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
4	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
A logaritmus definíciója alapján $3^1 = \frac{x}{9}$, amiből	2 pont	
$x = 27$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7.		
A 25%-os emelés az árat 1,25-szörösére,	1 pont	
a 6%-os csökkentés $1{,}25 \cdot 0{,}94 = 1{,}175$ -szörösére változtatta.	1 pont	
Ez 17,5%-os drágulásnak felel meg.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8.		
A kérdezett oldal hosszát a-val jelölve, a szinusztétel alapján: $\frac{a}{12} = \frac{\sin 65°}{\sin 98°}$	2 pont	
Ebből $a = \frac{\sin 65°}{\sin 98°} \cdot 12 \approx 11\ cm$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9.		
$1\ m^3$ föld ára $2 \cdot 3500 = 7000\ Ft$ A virágládába töltött föld mennyisége: $\frac{1960}{7000} = 0{,}28\ m^3$, ami	1 pont	
$280\ 000\ cm^3$.	1 pont	$140\ cm = 1{,}4\ m$ és $50\ cm = 0{,}5\ m$
A belső magasság $\frac{280\ 000}{140 \cdot 50} = 40\ cm$.	1 pont	$\frac{0{,}28}{1{,}4 \cdot 0{,}5} = 0{,}4\ m = 40\ cm$
Összesen:	**3 pont**	

10.		
$g + k - n$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
3, 5, 5, 5	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

12.		
Az egyedi póló összköltsége 7000 Ft.	1 pont	
A minta nélküli póló költsége ennek 0,4-e.	1 pont	*Ez a pont a 2800 és a 7000 arányának bármilyen formában történő meghatározásáért jár.*
A kérdéses körcikk középponti szöge $0{,}4 \cdot 360° = 144°$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II. A

13. a)		
A b és c oldal által bezárt szöget α-val jelölve felírjuk a szinusztételt: $\frac{\sin\alpha}{\sin 78°} = \frac{10}{11}$	1 pont	
$\sin\alpha = \frac{10}{11} \cdot \sin 78° \approx 0{,}889$	1 pont	
$\alpha = 62{,}8°$	1 pont	
Az a és b oldal által bezárt szöget γ-val jelölve: $\gamma = 180° - 78° - 62{,}8° = 39{,}2°$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a háromszög belső szögeinek összege nem 180°, maximum 3 pont adható.

13. b) első megoldás		
A háromszög c oldalára a koszinusztételt felírva:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$c^2 = 10^2 + 11^2 - 2 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \cos 39{,}2°$	1 pont	
$c = 7{,}1\ cm$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

13. b) második megoldás		
A háromszög c oldalára a szinusztételt felírva:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$\frac{\sin 39{,}2°}{\sin 78°} = \frac{c}{11}$	1 pont	
$c = \frac{\sin 39{,}2°}{\sin 78°} \cdot 11 = 7{,}1\ cm$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

13. c) **első megoldás**		
Az a és d oldal hosszának (egyben a két háromszög hasonlóságának) aránya: $\frac{15}{10} = 1{,}5$.	1 pont	
$e = 1{,}5 \cdot 11 = 16{,}5\ cm$	1 pont	*DEF háromszögben e oldal felel meg ABC háromszög b oldalának.*
$T_{DEF} = \dfrac{15 \cdot 16{,}5 \cdot sin\, 39{,}2°}{2} =$	1 pont	$T_{DEF} = \dfrac{d \cdot e \cdot sin\,\gamma}{2}$
$= 78{,}2\ cm^2$	1 pont	
A *DEF* háromszög területe $78{,}2\ cm^2$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. c) **második megoldás**		
Az a és d oldal hosszának (egyben a két háromszög hasonlóságának) aránya: $\lambda = \frac{15}{10} = 1{,}5$.	1 pont	
$T_{ABC} = \dfrac{10 \cdot 11 \cdot sin\, 39{,}2°}{2} = 34{,}76\ cm^2$	1 pont	$T_{ABC} = \dfrac{a \cdot b \cdot sin\,\gamma}{2}$
Terület esetén a hasonlósági arányszám négyzetével szorzunk.	1 pont	
$T_{DEF} = \lambda^2 \cdot T_{ABC} = 1{,}5^2 \cdot 34{,}76 = 78{,}2\ cm^2$	1 pont	
A *DEF* háromszög területe $78{,}2\ cm^2$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. a)		
Keressük a következő egyenlet megoldását: $450 = 4 \cdot \dfrac{1{,}4^n - 1}{1{,}4 - 1}$	1 pont	
$46 = 1{,}4^n$	2 pont	
Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve: $\lg 46 = \lg 1{,}4^n$	1 pont	
$n = \dfrac{lg\, 46}{lg\, 1{,}4}$	1 pont	$n = \log_{1{,}4} 46$
$n \approx 11{,}38$	1 pont	
Ez azt jelenti, hogy a sorozatnak legalább 12 tagját kell összeadni, hogy az összeg elérje az 450-et.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

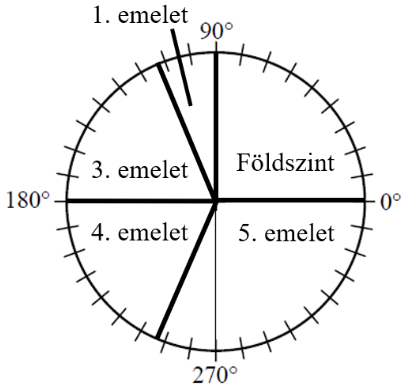
Megjegyzések: Ha a vizsgázó a sorozat tagjait egyenként kiszámolva vizsgálja a kívánt összeg elérését, és jó eredményre jut, akkor a teljes pontszám jár. Ha a vizsgázó egyenlet helyett egyenlőtlenséggel dolgozik, akkor a megfelelő pontok járnak.

14. b)		
A sorozat első tagját a_1-gyel jelölve: $588 = \frac{2a_1 + 13 \cdot 6}{2} \cdot 14$	1 pont	$S_n = \frac{(2a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} \cdot n$
$84 = 2a_1 + 78$	1 pont	$42 = a_1 + 39$
$a_1 = 3$	1 pont	
$a_3 = 3 + 2 \cdot 6 = 15$	1 pont	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
A sorozat 3. tagja 15.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. a)		
Szintek száma mindkét épületben: 6 Az *A* épületben elkészült irodák száma: 16 A *B* épületben elkészült irodák száma: 11	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az *A* épület egy szintjén elkészült irodahelyiségek átlagos száma: $\frac{16}{6} = 2{,}67$	1 pont	
A *B* épület egy szintjén elkészült irodahelyiségek átlagos száma: $\frac{11}{6} = 1{,}83$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. b) első megoldás		
A feltételnek megfelelő szintek száma az A épületben: 4	1 pont	
A feltételnek megfelelő szintek száma a B épületben: 3	1 pont	
Összes eset száma: $6 \cdot 6 = 36$	1 pont	
Kedvező esetek száma: $4 \cdot 3 = 12$	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3} = 0,\dot{3}$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. b) második megoldás		
A feltételnek megfelelő szintek száma az A épületben: 4	1 pont	
A feltételnek megfelelő szintek száma a B épületben: 3	1 pont	
A kérdéses valószínűség az A épületben: $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	1 pont	
A kérdéses valószínűség a B épületben: $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	1 pont	
A két esemény együttes valószínűsége: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}=0,\dot{3}$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. c)		
Egy irodához tartozó középponti szög: 22,5°	1 pont	
3 irodához 67,5°, 4 irodához 90°, 5 irodához 112,5° tartozik.	1 pont	*2 helyes középponti szög esetén is jár az 1 pont.*
Helyes kördiagram, például: 	2 pont	*Ha nincs jelmagyarázat a körcikkek mellett, akkor 1 pont adható.*
Összesen:	**4 pont**	

II. B

16. a)		
Az évenkénti csökkenés szorzószáma legyen *x*. (2016 után a 2022-es évvel bezárólag 6 év telik el.) $20\,286 \cdot x^6 = 11\,977$	1 pont	
$x^6 = 0{,}5904$	1 pont	
$x = \sqrt[6]{0{,}5904} = 0{,}916$ $1 - 0{,}916 = 0{,}084$	1 pont	
Az évenkénti csökkenés 8,4%.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. b)		
Ha 2022 után *y* év múlva lesz a jelentkezők száma a 2022-es érték 60,2%-a, akkor $0{,}93^y = 0{,}602$	1 pont	$11\,977 \cdot 0{,}602 \approx 7210$ $11\,977 \cdot 0{,}93^y = 7210$
Mindkét oldal tízes alapú logaritmusa is egyenlő: $log\, 0{,}93^y = log\, 0{,}602$	1 pont*	$y = log_{0{,}93} 0{,}602$
$y = \dfrac{lg\, 0{,}602}{lg\, 0{,}93} \approx$	1 pont	
≈ 7	1 pont	
2029-ben csökkenne a jelentkezők száma a 2016-os évinek a 60,2%-ára.	1 pont	$2022 + 7 = 2029$
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha az a gondolat csak a megoldás során derül ki.*

16. c)		
Az évenkénti növekedés szorzószáma (növekedési ráta) 1,2.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.*
A 7. osztályt követően a 12. osztályig bezárólag 5 tanév telik el.	1 pont	
$49{,}4 \cdot 1{,}2^5 = 122{,}92 \approx 123$	1 pont	
12. osztályban kb. 123 percet kell naponta tanulnia egy diáknak a 4,5-es átlagért.	1 pont	*Más kerekítés nem fogadható el.*
Összesen:	**4 pont**	

16. d)		
A 7. osztályt megelőző tanévek esetén tanévenként 1,12-dal kell osztani a napi tanulásmennyiséget.	1 pont	*Ha ezek a gondolatok a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.*
1. osztálytól 7. osztályig 6 tanév telik el.	1 pont	
$\frac{49,4}{1,12^6} = 25,03 \approx 25$	1 pont	*26-ra való kerekítés is elfogadható.*
1. osztályban kb. 25 percet kell tanulni naponta a 4,5-es átlaghoz.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzések: Kerekítési hibáért a 16. c) és 16. d) feladat értékelésekor összesen csak 1 pont vonható le.

17. a)		
Az első egyenletből x-et kifejezve: $x = 4y - 10$.	1 pont	
Ezt behelyettesítve a második egyenletbe: $(4y - 10 + 4)^2 + (y - 1,5)^2 = 4,25$	1 pont	
$16y^2 - 48y + 36 + y^2 - 3y + 2,25 = 4,25$	2 pont	
$17y^2 - 51y + 34 = 0$	1 pont	$y^2 - 3y + 2 = 0$
$y_1 = 1$ és $y_2 = 2$	1 pont	
Ebből $x_1 = -6$ és $x_2 = -2$	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

17. b) első megoldás		
Ha $x + 5 < 0$, akkor $x < -5$, ezért	1 pont	
$2 - x \geq 0$, vagyis $2 \geq x$.	1 pont	
A -5-nél kisebb valós számok halmazának minden eleme megoldás.	1 pont	$x \in]-\infty; -5[$
Ha $x + 5 > 0$, akkor $x > -5$, ezért	1 pont	
$2 - x \leq 0$, vagyis $2 \leq x$	1 pont	
A -5-nél nagyobb valós számok halmazán minden $2 \leq x$ valós szám megoldás.	1 pont	$x \in [2; \infty[$
A megoldáshalmaz: $x < -5$ vagy $2 \leq x$	1 pont	$x \in]-\infty; -5[\cup [2; \infty[$
Összesen:	**7 pont**	

17. b) második megoldás		
A vizsgázó megrajzolja (vázolja) az $x \mapsto 2 - x$ és az $x \mapsto x + 5$ elsőfokú függvények grafikonját, vagy a számláló és a nevező előjelét külön-külön helyesen állapítja meg számegyenes segítségével vagy szövegesen indokolva.	2-2 pont	*Ha a függvények monotonitása és zérushelye is jól jelenik meg az ábrán, akkor jár ez a 2-2 pont.*
Megállapítja, hogy a $]-\infty; -5[$ intervallum elemei mind megoldások.	1 pont	*Szöveges vagy a számegyenes segítségével, ábrával alátámasztott indoklás egyaránt elfogadható.*
Megállapítja, hogy a $[-5; 2[$ intervallum elemei nem megoldások.	1 pont	
Megállapítja, hogy a $[2; \infty[$ intervallum elemei mind megoldások.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az 5-öt elfogadja megoldásként, akkor ezért 2 pontot veszítsen. Ha a vizsgázó a 2-t nem adja meg megoldásként (nem vizsgálja az egyenlőséget), akkor ezért 1 pontot veszítsen.

17. c)		
A kedvező esetek száma 2,	1 pont	*Négyzetszámok: 16, 144*
így a kérdéses valószínűség $\frac{2}{5}$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

18. a)		
A csonkakúp alakú bábutest alapkörének sugara 1,25 cm, illetve fedőkörének sugara 0,5 cm, és a bábu test részének magassága $3{,}5 - 1 = 2{,}5\ cm$.	2 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$V_{test} = \frac{(0{,}5^2 + 0{,}5 \cdot 1{,}25 + 1{,}25^2) \cdot \pi \cdot 2{,}5}{3} \approx$	1 pont	$V = \frac{(r^2 + r \cdot R + R^2) \cdot \pi \cdot M}{3}$
$\approx 6{,}4\ cm^3$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. b)		
A bábu feje teljesen eltakarja a csonkakúp fedőkörét. A bábú felszínét úgy kapjuk meg, hogy a csonkakúp palástjának ($T_{palást}$) és alapkörének (T_{alap}) területéhez hozzáadjuk a kocka felszínét (A_{kocka}), amiből kivonjuk a csonkakúp fedőkörének területét ($T_{fedő}$). (Hiszen ennyit takar ki a fedőkör a kockából.)	2 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A bábutest alkotója (Pitagorasz-tétellel): $a = \sqrt{0{,}75^2 + 2{,}5^2} = 2{,}61\ cm$	1 pont	$1{,}25 - 0{,}5 = 0{,}75\ cm$
$T_{alap} = 1{,}25^2 \cdot \pi \approx 4{,}91\ cm^2$	1 pont	
$T_{palást} = (0{,}5 + 1{,}25) \cdot \pi \cdot 2{,}61 = 14{,}35\ cm^2$	1 pont	$T_{palást} = (r + R) \cdot \pi \cdot a$
$A_{kocka} = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6\ cm^2$	1 pont	*A feladat megoldható úgy is, hogy kiszámoljuk a teljes kocka és a teljes csonkakúp felszínét, majd ebből vonjuk ki a fedőlap területét kétszer (ott van "összeragasztva" a két test, így két fedőlapnyi területtel lesz kevesebb a felszín).*
$T_{fedő} = 0{,}5^2 \cdot \pi = 0{,}25\pi \approx 0{,}79\ cm^2$	1 pont	
$A_{bábu} = 4{,}91 + 14{,}35 + 6 - 0{,}79 = 24{,}5\ cm^2$	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

18. c)		
1-féle olyan fotó készülhet, amin három ugyanolyan figura van. (három gyalog)	1 pont	
Két ugyanolyan, és egy harmadik eltérő figurát $4 \cdot 1 \cdot 3 = 12$-féleképpen tudunk kiválasztani,	1 pont	
majd (attól függően, hogy hova tesszük az eltérő figurát) ezekből $12 \cdot 3 = 36$-féle sorrendet tudunk képezni.	1 pont	
Három különböző figurát $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$-féleképpen tudunk egymás mellé állítani.	1 pont	
Így az összes lehetséges fotó száma: $1 + 36 + 24 = 61$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	