# MATEMATIKA

PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

# KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

# JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

# Fontos tudnivalók

**Formai előírások:**

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

**Tartalmi kérések:**

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során a **zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, n!, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont**.
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

# I.

| 1. | | |
|---|---|---|
| $B \cap A = \{2; 5; 9; 10\}$ | 1 pont | |
| $(B \cup C) \setminus A = \{3; 7; 8; 11; 19\}$ | 2 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 2. | | |
|---|---|---|
| 36 | 2 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 3. | | |
|---|---|---|
| C és D | 2 pont | *1 jó válasz, vagy 2 jó és 1 rossz válasz esetén 1 pont jár.* |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| 4. | | |
|---|---|---|
| A 7. tag $0{,}8 \cdot 2^4 =$ | 1 pont | |
| $= 12{,}8.$ | 1 pont | |
| Az első tag $\frac{0{,}8}{2^2} = 0{,}2$, így az első 9 tag összege $0{,}2 \cdot \dfrac{2^9 - 1}{2 - 1} =$ | 1 pont | |
| $= 102{,}2.$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| 5. | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{x+2}{x-2}$ | 3 pont | *Ha a vizsgázó a számlálót, illetve a nevezőt jól alakítja szorzattá, akkor ezért 1-1 pontot kaphat.* |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 6. | | |
|---|---|---|
| 45% | 2 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

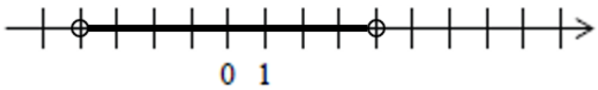
| **7.** | | |
|---|---|---|
| A másik befogó hosszát $a$-val jelölve $tg\ 43° = \frac{7}{a}$ | 2 pont | |
| ebből $a = \frac{7}{tg\ 43°} \approx 7{,}5\ cm$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **8.** | | |
|---|---|---|
| 1,76 ($m^2$) | 2 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| **9.** | | |
|---|---|---|
| 6,4 | 2 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| **10.** | | |
|---|---|---|
| Módusz: 4 | 1 pont | |
| Medián: 4 | 1 pont | |
| Terjedelem: 3 | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **11.** | | |
|---|---|---|
| 81 | 2 pont | $3^4$ |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| **12.** | | |
|---|---|---|
|   | 2 pont | *Egyenlőtlenség megoldása:* $-4 < x < 4$ |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

# II. A

| **13. a)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A korcsolyapályát látogató emberek száma: $\frac{277}{0{,}57} =$ $= 485{,}96 \approx 486$ (fő) | 1 pont | |
| A kikölcsönzött gyerekkorcsolyák száma: $0{,}29 \cdot 486 = 140{,}94 \approx 141$ (db) | 1 pont | |
| A gyerekkorcsolyák kölcsönzéséből befolyt bevétel: $141 \cdot 2300 = 324\,300$ Ft | 1 pont | |
| A kikölcsönzött pedagóguskorcsolyák száma: $0{,}14 \cdot 486 = 68{,}04 \approx 68$ (db) | 1 pont | $486 - 277 - 141 = 68$ |
| A pedagóguskorcsolyák kölcsönzéséből befolyt bevétel: $68 \cdot 2700 = 183\,600$ Ft | 1 pont | |
| 324 300 Ft bevétel folyt be a gyerekkorcsolyák és 183 600 Ft a pedagóguskorcsolyák kölcsönzéséből. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **13. a)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| A korcsolyapályát látogató emberek száma: $\frac{277}{0{,}57} =$ $= 485{,}96 \approx 486$ (fő) | 1 pont | |
| A kikölcsönzött gyerekkorcsolyák száma: $0{,}29 \cdot 486 \approx 141$ (db) | 1 pont | *A kikölcsönzött pedagóguskorcsolyák száma:* $0{,}14 \cdot 486 \approx 68$ (db) |
| A gyerekkorcsolyák kölcsönzéséből befolyt bevétel: $141 \cdot 2300 = 324\,300$ Ft | 1 pont | *A pedagóguskorcsolyák kölcsönzéséből befolyt bevétel:* $68 \cdot 2700 = 183\,600$ Ft |
| A felnőttkorcsolyák kölcsönzéséből befolyt bevétel: $277 \cdot 3000 = 831\,000$ Ft | 1 pont | |
| A pedagóguskorcsolyák kölcsönzéséből származó bevételt megkapjuk, ha a teljes befolyt összegből kivonjuk a gyerekkorcsolyák és a felnőttkorcsolyák kölcsönzéséből származó bevételt: $1\,338\,900 - 324\,300 - 831\,000 = 183\,600$ Ft | 1 pont | *Pedagóguskorcsolyák kölcsönzéséből befolyt bevétel:* $1\,338\,900 - 183\,600 -$ $-831\,000 = 324\,300$ *Ft* |
| 324 300 Ft bevétel folyt be a gyerekkorcsolyák és 183 600 Ft a pedagóguskorcsolyák kölcsönzéséből. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyik vagy mindkét típusú kikölcsönzött korcsolyák számát nem kerekíti egész számra, legfeljebb 1 pontot veszítsen.*

| **13. b)** | | |
|---|---|---|
| A (percben megadott) napi feladatok elvégzési idejei egy számtani sorozat tagjai, melynek első tagja $a_1$, differenciája $d$. Az első 17 tag összegét kell kiszámolnunk. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A feltételek szerint:<br>$a_1 + d + a_1 + 2d = 77$, és $a_1 + 5d = 49$ | 1 pont | $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ |
| A második egyenletből $a_1$-et kifejezve és az első egyenletbe helyettesítve: $2(49 - 5d) + 3d = 77$, | 1 pont | |
| ahonnan $7d = 21$, | 1 pont | |
| így $d = 3$ és $a_1 = 34$ | 1 pont | |
| $S_{17} = \frac{2 \cdot 34 + 16 \cdot 3}{2} \cdot 17 =$ | 1 pont | $S_n = \frac{(2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} \cdot n$ |
| $= 986$ percbe telik októberben a kérdéses munkák elvégzése. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **14. a)** | | |
|---|---|---|
| Az $x^2 + 2x - 3 = 0$ egyenlet gyökei:<br>$x_1 = -3$ és $x_2 = 1$ | 2 pont | |
| Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, | 1 pont | *Ez a pont jár egy megfelelő ábráért is.* |
| így az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $]-3; 1[$. | 2 pont | $-3 < x < 1$ |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **14. b)** | | |
|---|---|---|
| Jelölje a kék kocka tömegét g-ban $x$, a pirosét pedig $y$<br>A szöveg alapján:<br>$\begin{cases} 3x + y = 217 \\ 2x + 3y = 329 \end{cases}$ | 1 pont | |
| Az első egyenletből kifejezve $y$-t:<br>$y = 217 - 3x$,<br>ezt behelyettesítve a második egyenletbe:<br>$2x + 3 \cdot (217 - 3x) = 329$<br>$7x = 322$<br>Ebből $x = 46$, és $y = 79$ | 3 pont | *Az első egyenlet mindkét oldalát megszorozva 3-mal:*<br>$9x + 3y = 651$<br>*Az első egyenletből kivonva a másodikat:*<br>$7x = 322$<br>$x = 46$, $y = 79$ |
| A kék kocka tömege 46 g, a piros kocka tömeg 79 g. | 1 pont* | |
| Ellenőrzés a szöveg alapján:<br>Három kék és egy piros kocka tömege 217 g, két kék és három piros kocka tömege pedig valóban 329 g. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a vizsgázó a változók jelentését (mértékegységgel együtt) az egyenletrendszer felírásakor egyértelműen azonosította.*

| **15. a)** | | |
|---|---|---|
| Legyen a csökkenési ráta $x$. | 1 pont | |
| Ekkor $52 \cdot x^7 = 19$. | 2 pont | |
| $x^7 = \frac{19}{52} \approx 0{,}365$, | 1 pont | |
| amiből $x = \sqrt[7]{\frac{19}{52}}$, | 1 pont | |
| $x \approx 0{,}87$, | 1 pont | |
| $1 - 0{,}87 = 0{,}13$. | 1 pont | |
| Alkalmanként 13%-kal csökkent a nézők száma. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

| **15. b)** | | |
|---|---|---|
| A vetített anyagok hosszai egy $q = 1{,}05$ hányadosú mértani sorozat tagjai, melyben $a_2 = 37$. | 1 pont | *Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.* |
| $a_6 = 37 \cdot 1{,}05^4 \approx$ | 1 pont | |
| $\approx 44{,}974 \approx 45$ | 1 pont | |
| A hatodik vetítés 45 perces volt. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

# II. B

| 16. a) | | |
|---|---|---|
| *AB* és *BC* oldalak egyenes egyenleteiből a következő egyenletrendszert tudjuk felírni (ahol metszik egymást ott lesz a *B* pont): $\begin{cases} x + 4y = 19 \\ -5x + 2y = -7 \end{cases}$ | 1 pont | |
| Az első egyenletből kifejezzük *x*-et: $x = 19 - 4y$, | 1 pont | *A 2. egyenlet kétszerese:* $-10x + 4y = -14$ |
| és behelyettesítjük a második egyenletbe: $-5 \cdot (19 - 4y) + 2y = -7$ | 1 pont | *Kivonjuk az 1. egyenletből:* $11x = 33$ |
| Zárójel felbontás és rendezés után, ezt kapjuk: $22y = 88$ | 1 pont | |
| $y = 4$ | 1 pont | $x = 3$ |
| $x = 19 - 4 \cdot 4 = 3$, tehát a keresett pont: $B(3; 4)$ | 1 pont | $y = 4$, tehát a keresett pont: $B(3; 4)$ |
| Ellenőrzés behelyettesítéssel. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

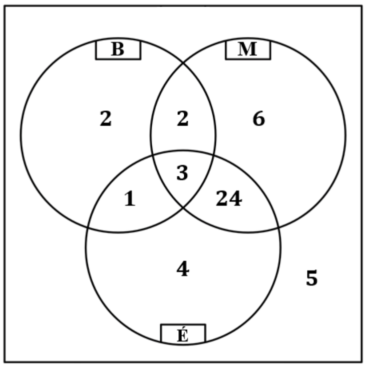
| 16. b) | | |
|---|---|---|
| A kérdéses súlyvonalra a *B* csúcs és a vele szemközti oldal felezőpontja illeszkedik. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.* |
| Az *AC* szakasz felezőpontja: $F(0; 2)$. | 1 pont | |
| A súlyvonal egy irányvektora: $\overrightarrow{FB}(3; 2)$. | 1 pont | |
| A súlyvonal hossza: $\lvert\overrightarrow{FB}\rvert = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **16. c)** | | |
|---|---|---|
| A kérdéses szöget a *BFA* háromszög oldalvektorai skalárszorzatának segítségével lehet meghatározni. $\overrightarrow{BA}(-2;-5)$ | 1 pont | |
| $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BF}$ skalárszorzata: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}=(-2)\cdot(-3)+(-5)\cdot(-2)=16$ | 1 pont | $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{FB}=(-3;-2)$ |
| A $\overrightarrow{BA}$ vektor hossza: $\lvert\overrightarrow{BA}\rvert=\sqrt{(-2)^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$ | 1 pont | |
| A két vektor skalárszorzata a definíció szerint: $16=\sqrt{29}\cdot\sqrt{13}\cdot cos\,\alpha$, ahol α a két vektor által bezárt szög. | 1 pont | $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}=\lvert\overrightarrow{BA}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{FB}\rvert\cdot cos\,\alpha$ |
| Innen $cos\,\alpha\approx 0{,}824$ | 1 pont | |
| $\alpha\approx 34{,}5°$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **17. a)** | | |
|---|---|---|
| A játék sugara 2,4 cm, a belső üreg sugara 2,2 cm. | 1 pont | |
| A külső térfogat $\frac{4\cdot 2{,}4^3\cdot\pi}{3}\approx 57{,}91\ cm^3$. | 1 pont | $V_{gömb}=\frac{4\cdot R^3\cdot\pi}{3}$ |
| Az üreg térfogata $\frac{4\cdot 2{,}2^3\cdot\pi}{3}\approx 44{,}60\ cm^3$. | 1 pont | |
| $57{,}91-44{,}60=13{,}3\ cm^3$ műanyag szükséges a játék elkészítéséhez. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **17. b)** | | |
|---|---|---|
| A kocka testátlója $4{,}8-2\cdot 0{,}2-0{,}4=4\ cm$ | 2 pont | |
| Ha a kocka éle $a$, akkor a testátlója $\sqrt{3}a$. | 1 pont | *A kocka testátlója $\sqrt{3}a$.* |
| $4=\sqrt{3}a$ | 1 pont | |
| $a=2{,}309\ cm$ | 1 pont | |
| A legnagyobb kocka térfogata $2{,}309^3=12{,}3\ cm^3$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| | | |
|---|---|---|
| **17. c)** | | |
| Annak a valószínűsége, hogy egy játék rossz, 0,04. | 1 pont | *Ha ezek a gondolatok a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.* |
| Annak a valószínűsége, hogy egy játék jó, 0,96. | 1 pont | |
| Annak a valószínűsége, hogy mind a 15 játék jó: $P_0 = 0{,}96^{15} = 0{,}542$ | 2 pont | *$P_{14}$ és $P_{15}$ jelölések is megfelelőek, attól függően, hogy a jó vagy rossz esetek száma kerül az alsó indexbe.* |
| Annak a valószínűsége, hogy 14 játék jó és 1 rossz: $P_1 = \binom{15}{1} \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96^{14} = 0{,}339$ | 2 pont | |
| A keresett valószínűség $0{,}542 + 0{,}339 = 0{,}881$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| | | |
|---|---|---|
| **18. a)** | | |
|  | 4 pont* | *A három halmaz közös metszetének, illetve az alaphalmaz tartományának kitöltéséért nem jár pont. Két-két halmaz metszeteinek helyes kitöltéséért 1 pont jár. A további tartományok kitöltéséért 1-1 pont jár.* |
| Azok száma, akik voltak az étteremben: $1 + 3 + 24 + 4 = 32$ | 1 pont | |
| A kérdéses valószínűség: $\frac{32}{47} \approx$ | 1 pont | |
| $\approx 0{,}681$. | 1 pont | *Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.* |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó halmazábra helyett szövegesen vezeti le a megoldását, azért is kapja meg a megfelelő pontokat a *-gal jelölt pontokból.*

| **18. b)** | | |
|---|---|---|
| Azok közül, akik nem voltak múzeumban és nem búvárkodtak $\binom{9}{3}$-féleképpen lehet 3 főt kiválasztani. | 1 pont | *4+5=9 fő, aki nem volt múzeumban és nem búvárkodott.* |
| Azok közül, akik voltak a múzeumban és az étteremben is, $\binom{27}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani 2 főt. | 1 pont | *24+3=27 fő, aki volt múzeumban és étteremben is.* |
| Az 5 beszámoló összesen $5!$-féle sorrendben követheti egymást, | 1 pont | |
| ebből $4!\cdot 2$ olyan eset van, amikor a kérdéses 2 beszámoló egymás után következik. | 1 pont | *4 helyen lehetnek egymás után (1-2, 2-3, 3-4, 4-5), minden helyen helyet is cserélhetnek, a maradék 3 ember* $3!$ *-féleképpen rendezhető sorba. Ez összesen:* $4\cdot 2\cdot 3! = 4!\cdot 2$ |
| Így a kiválasztottak beszámolóinak $5! - 4!\cdot 2 = 72$-féle sorrendje lehet. | 1 pont | |
| A különböző összeállítások száma: $\binom{9}{3}\cdot\binom{27}{2}\cdot 72 = 2\,122\,848$ | 1 pont | |
| Összesen 2 122 848 ilyen összeállítás készülhet. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **18. c)** | | |
|---|---|---|
| Az öt értékelésből $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen választhatunk ki kettőt (összes eset). | 1 pont | |
| A számunkra kedvező esetek száma 1, | 1 pont | |
| így a kérdéses valószínűség $\frac{1}{10} = 0{,}1$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |