MATEMATIKA

PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

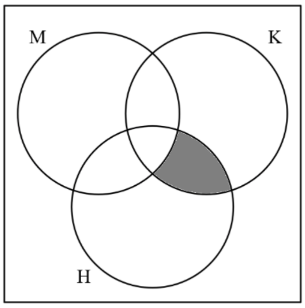
1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

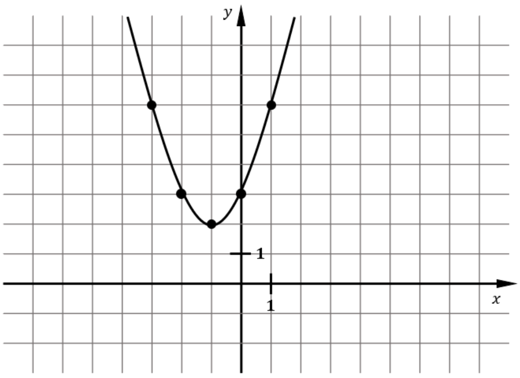
1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha az útmutatóban egy **megjegyzés** zárójelben szerepel**,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. **Mértékegység hiánya esetén** csak akkor jár pontlevonás, ha a hiányzó mértékegység válaszban vagy mértékegység-átváltásban szerepel (zárójel nélkül).
7. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
10. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
11. A gondolatmenet kifejtése során a **zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, n!, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont**.
12. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
13. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
14. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
15. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
	2 pont	*Nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
6	2 pont	*1; 2; 3; 4; 5; 6*
Összesen:	**2 pont**	

3.		
	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
2, 3, 4, 5, 6, 9	3 pont	*2 pont jár, ha csak öt helyes osztót ad meg. Ha a hat osztó mellett az 1 is szerepel, 2 pont jár. 1 pont jár, ha csak négy helyes osztót ad meg. Ha öt helyes osztó mellett az 1 is szerepel, 1 pont jár. Egyéb téves vagy hiányos megoldásért nem jár pont.*
Összesen:	**3 pont**	

5.		
8	2 pont	*A 6^8 válasz is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

6.		
$x_1 = 5$	1 pont	
$x_2 = -11$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

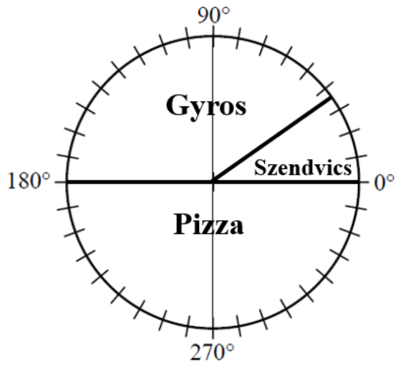
7.		
Az alaphoz tartozó magasság felezi az alapot és a szárszöget.	1 pont	*Az indoklás ábrára is támaszkodhat.*
A keletkező derékszögű háromszögben a keresett α szögre $sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{7} \approx 0{,}286$	1 pont	
A szárszög 33,2°.	1 pont	*Nem megfelelően kerekített érték esetén nem jár a pont.*
Összesen:	**3 pont**	

8.		
60°	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9.		
4,3 cm	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

10.		
$(-1; 7)$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
Limonádé ára: 450 (Ft)	1 pont	
Almalé darabszáma: 5 (db)	1 pont	
Módusz: 850 (Ft)	1 pont	
Medián: 800 (Ft)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12.		
Az osztály $100 - 50 - 10 = 40\%$-a kért gyrost.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A pizzához tartozó körcikk középponti szöge 180º, a szendvicsé 36º, a gyrosé 144º.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Megfelelő kördiagram magyarázattal, például: 	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. A

13. a)		
Az egyes napokon lefutott távok egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja (m-ben) a_1, differenciája pedig 800.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
A sorozat 14. tagja: $a_{14} = a_1 + 13d$ $21\,000 = a_1 + 13 \cdot 800$	1 pont	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
amiből $a_1 = 10\,600$ (m)	1 pont	
Anna az első napon 10 600 m-t futott.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

13. b)		
$S_6 = \dfrac{2 \cdot 10\,600 + 5 \cdot 800}{2} \cdot 6 =$	1 pont	$S_n = \dfrac{(2a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} \cdot n$
$= 75\,600$ (m)	1 pont	
Anna az első 6 napon összesen 75 600 m-t futott.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

13. c)		
Az eredeti terv szerint Anna két hét alatt $S_{14} = \dfrac{2 \cdot 10\,600 + 13 \cdot 800}{2} \cdot 14 =$	1 pont	$S_n = \dfrac{(2a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} \cdot n$
$= 221\,200$ m-t futott volna.	1 pont	
Az új terv szerint Anna két hét alatt $75\,600 + 15\,000 + 17\,000 + 19\,000 + 21\,000 =$ $= 147\,600$ m-t futott.	1 pont	
A kérdéses százalék: $100 - \frac{147\,600}{221\,200} \cdot 100 =$	1 pont	
$\approx 33\ \%$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. a)

Nem jelezte előre, hogy nem jön: $210 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}044 \approx 12$ (fő)	1 pont	
Hozott plusz 1 főt: $210 \cdot 0{,}086 \approx 18$ (fő)	1 pont	
A bulin részt vett: $210 - 25 - 12 + 18 = 191$ (fő)	1 pont	
$\frac{210}{191} \cdot 100 - 100 =$	1 pont	
$\approx 9{,}9\%$	1 pont	
A tervezett létszám 9,9%-kal volt magasabb az eseményen megjelentek létszámánál.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

14. b)

Ha a bulira x embert hívtak meg, akkor azok száma, akik nem jeleztek előre, hogy nem jönnek: $1{,}3 \cdot 0{,}044 \cdot x$ (fő)	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Hozott plusz 1 főt: $0{,}086 \cdot x$ (fő)	1 pont	
A szöveg alapján $260 = x - 28 - 1{,}3 \cdot 0{,}044 \cdot x + 0{,}086x$	2 pont	
$288 = 1{,}0288x$	1 pont	
$x \approx 280$	1 pont	
A bulira 280 főt hívtak meg.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

15. a)

A *D* pont merőleges vetülete az *AB* oldalra legyen *E* pont. Jelöljük α-val az *A* csúcsnál lévő szöget. Ekkor az *ADE* háromszögben: $sin\,\alpha = \frac{5}{5{,}4} \approx 0{,}93$	1 pont	*Erre a gondolatra akkor is jár a pont, ha a vizsgázó ábrán jelenítette meg.*
$\alpha = 67{,}8°$	1 pont	
$\delta = 180° - 67{,}8° = 112{,}2°$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. b) **első megoldás**		
Az *ABC* háromszögre felírjuk a Pitagorasz-tételt: $AC^2 = 4^2 + 5^2$, amiből	1 pont	
$AC = \sqrt{4^2 + 5^2} = 6{,}4\ cm$	1 pont	
Legyen az *ACD* háromszög *C* csúcsánál lévő belső szög γ, az *A* csúcsánál lévő belső szög pedig λ. Ekkor felírjuk a szinusztételt: $\frac{\sin\gamma}{\sin 112{,}2\,°} = \frac{5{,}4}{6{,}4}$	1 pont	
$\sin\gamma = \frac{5{,}4}{6{,}4} \cdot \sin 112{,}2\,° = 0{,}781$	1 pont	
$\gamma = 51{,}3°$	1 pont	
$\lambda = 180° - 112{,}2° - 51{,}3° = 16{,}5°$	1 pont	
Legyen az *AC* oldalhoz tartozó magasság *m*. Ekkor: $\sin 16{,}5° = \frac{m}{5{,}4}$	1 pont	
$m = 5{,}4 \cdot \sin 16{,}5° = 1{,}5\ cm$	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

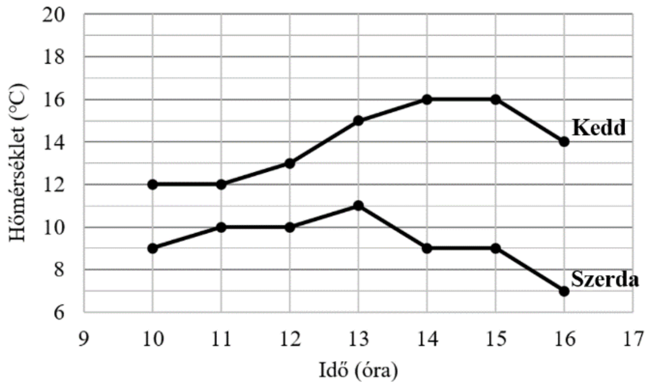
15. b) második megoldás		
Az *ABC* háromszögre felírjuk a Pitagorasz-tételt: $AC^2 = 4^2 + 5^2$, amiből	1 pont	
$AC = \sqrt{4^2 + 5^2} = 6{,}4\ cm$	1 pont	
Kiszámoljuk *ABC* háromszög területét: $T_{ABC} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10\ cm^2$	1 pont	$T = \frac{a \cdot m}{2}$
A trapéz területének meghatározásához kiszámoljuk *AE* szakasz nagyságát egy Pitagorasz-tétel segítségével: $5{,}4^2 = AE^2 + 5^2$ Rendezés után: $AE = 2{,}04\ cm$	1 pont	
CD szakasz *AB* és *AE* szakaszok különbsége lesz: $CD = 4 - 2{,}04 = 1{,}96\ cm$	1 pont	
Az *ABCD* trapéz területe: $T_{ABCD} = \frac{4 + 1{,}96}{2} \cdot 5 = 14{,}9\ cm^2$ Az *ACD* háromszög területe: $T_{ACD} = T_{ABCD} - T_{ABC} = 14{,}9 - 10 = 4{,}9\ cm^2$	1 pont	
Az *ACD* háromszög területe kiszámolható az alábbi összefüggésből is: $T_{ACD} = \frac{6{,}4 \cdot m}{2}$	1 pont	$T = \frac{a \cdot m}{2}$
$4{,}9 = \frac{6{,}4 \cdot m}{2}$ Rendezve *m*-re: $m = 1{,}5\ cm$	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

II. B

16. a)

Az olcsóbból x kg-ot, a drágábból $76 - x$ kg-ot veszünk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A lisztkeverék alapanyagára $\frac{76 \cdot 195}{1{,}2} = 12\,350$ Ft	1 pont	
A feladat szövege alapján felírható egyenlet: $135x + 210(76 - x) = 12\,350$	1 pont	
$135x + 15\,960 - 210x = 12\,350$	1 pont	
$x = 48{,}13 \approx 48$	1 pont	
Az olcsóbból 48 kg, a drágábból 28 kg kell a keverékhez.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

16. b)

	3 pont	*1-1 pont jár a keddi és a szerdai adatok helyes ábrázolására. A megfelelő feliratokra összesen 1 pont jár.*
Összesen:	**3 pont**	

16. c)

A keddi adatok átlaga: 14	1 pont	
A keddi adatok szórása: 1,6	1 pont	
A szerdai adatok átlaga: 9,29	1 pont	
A szerdai adatok szórása: 1,16	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. d)		
$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ "0"-ra végződő, és $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ "5"-re végződő ilyen szám van, azaz összesen	1 pont	
$24 + 18 = 42$.	1 pont	
Mivel egyetlen kedvező eset van, ezért a kérdéses valószínűség $\frac{1}{42} \approx 0{,}024$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. a)		
A forgástengely a téglalap rövidebb oldalainak közös felezőmerőlegese, így	1 pont	*Ha ezek a gondolatok csak a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.*
a keletkező forgástest egy forgáshenger: alapkörének sugara 3,5 cm, magassága 16 cm.	1 pont	
Felszín: $A = 2 \cdot 3{,}5^2 \cdot \pi + 2 \cdot 3{,}5 \cdot \pi \cdot 16 \approx$	1 pont	$A = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot m$
$\approx 429\ cm^2$	1 pont	
Térfogat: $V = 3{,}5^2 \cdot \pi \cdot 16 \approx$	1 pont	$V = r^2 \cdot \pi \cdot m$
$\approx 616\ cm^3$	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. b)		
A forgástengely az alapok közös felezőmerőlegese, így	1 pont	*Ha ezek a gondolatok csak a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.*
a keletkező forgástest egy csonka forgáskúp: alapkörének sugara 8 cm, fedőkörének sugara 3,5 cm és alkotója 9 cm.	1 pont	
Az alaplap és a fedőlap területe: $T_{alap} = 8^2 \cdot \pi = 201{,}1\ cm^2$ $T_{fedő} = 3{,}5^2 \cdot \pi = 38{,}5\ cm^2$	1 pont	
A palást területe: $T_{palást} = (3{,}5 + 8) \cdot \pi \cdot 9 = 325{,}2\ cm^2$	1 pont	$T_{palást} = (r + R) \cdot \pi \cdot a$
Felszín: $A = 201{,}1 + 38{,}5 + 325{,}2 = 564{,}8 \approx 565\ cm^2$	1 pont	$A = T_{alap} + T_{fedő} + T_{palást}$
A test magassága Pitagorasz-tétellel: $M = \sqrt{9^2 - 4{,}5^2} = 7{,}8\ cm$	1 pont	$8 - 3{,}5 = 4{,}5\ cm$
Térfogat: $V = \frac{(3{,}5^2 + 3{,}5 \cdot 8 + 8^2) \cdot \pi \cdot 7{,}8}{3} =$	1 pont	$V = \frac{(r^2 + r \cdot R + R^2) \cdot \pi \cdot M}{3}$
$= 851{,}5\ cm^3 \approx 852\ cm^3$	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: A vizsgázó ne veszítsen pontot a 17. a) és a 17. b) feladatban amiatt, mert a π≈3,14 közelítést használta és/vagy a részeredményeket több tizedesjegyre kerektette, és ennek következtében eltérő eredmény(ek)re jutott.

17. c)		
$\frac{852}{616} \cdot 100 \approx$	1 pont	
$\approx 138{,}3\%$	1 pont	
A csonkakúp térfogata a nagyobb 38,3%-kal.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. a)		
Egy betűhármas megadása az {*ABE*; *ABF*; *AEF*; *AEG*; *BEF*} halmazból.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

18. b)		
A fokszámok összege 20,	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó az ábra alapján helyesen megadja az élek számát.*
az eddigi kézfogások száma ennek a fele, vagyis 10.	1 pont	
Az összes kézfogás száma $\binom{7}{2} = 21$.	1 pont	$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$
Tehát $21 - 10 = 11$ kézfogás lesz még az üdvözlés során.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. c)		
A kis tömb térfogata: $V_{kicsi} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280\ cm^3 =$	1 pont	
$= 0{,}00028\ m^3$.	1 pont	
A két tömb közötti hasonlóság hányadosa λ, a térfogatok aránya így λ^3.	1 pont	
$\lambda^3 = \frac{2{,}1}{0{,}00028} = 7500$	1 pont	
$\lambda = \sqrt[3]{7500} = 19{,}57$	1 pont	
A nagy tömb leghosszabb éle $8 \cdot 19{,}57 = 156{,}56 \approx 157\ cm$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. d)		
Annak a valószínűsége, hogy 20 perc leforgása alatt megemlíti a macskáját 0,15.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
Annak a valószínűsége, hogy 20 perc leforgása alatt nem említi meg 0,85.	1 pont	
3 óra = 9-szer 20 perc	1 pont	
$P = \binom{9}{3} \cdot 0{,}15^3 \cdot 0{,}85^6 \approx$	1 pont	*9 alkalomból 3-szor megemlíti, 6-szor nem említi meg.*
$\approx 0{,}107$ a kérdéses valószínűség.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	