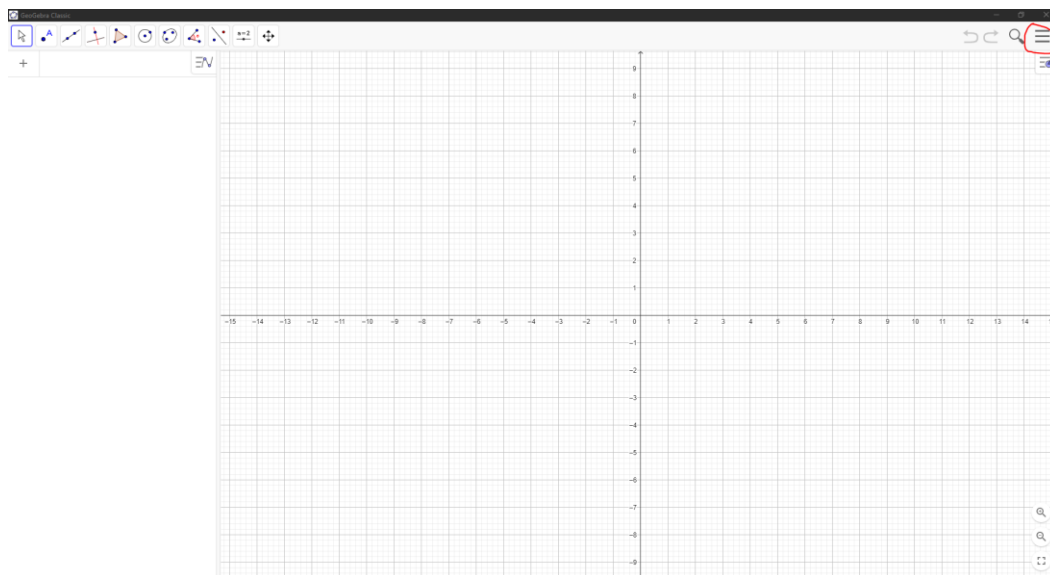
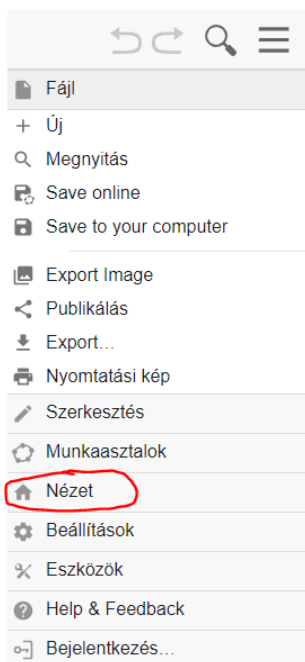


# Geogebra valószínűségszámítás megnyitása

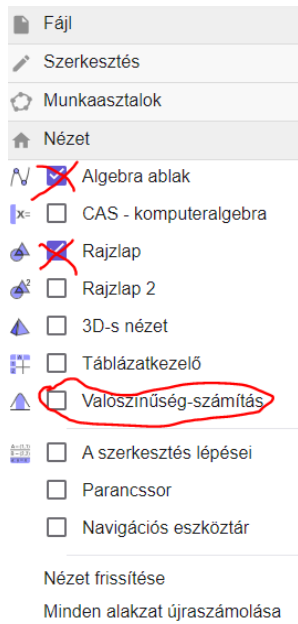
Jobb felső sarokban 3 vonalra kattintás:



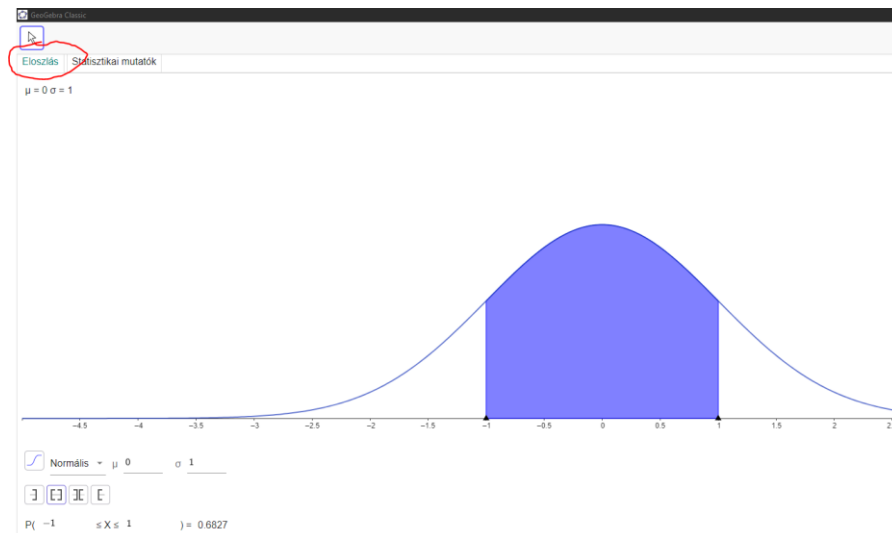
Nézetre kattintás:



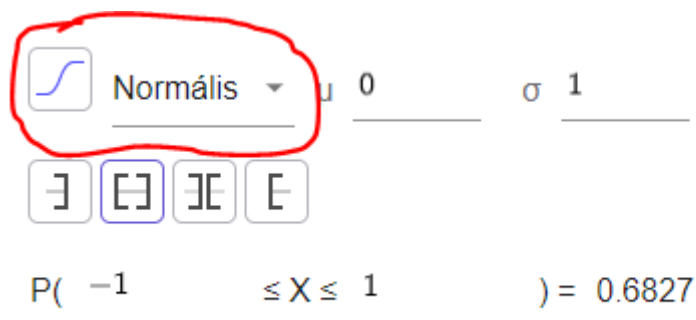
Valószínűségszámításra kattintás, rajzlap és algebra alak kikapcsolás:



Mindig az eloszlás fülön leszünk (alapból oda dob a program):



Itt tudunk változtatni a típuson:



## Általunk használt eloszlások

5-öt fogunk ezek közül használni:

Normális

Exponenciális

Poisson

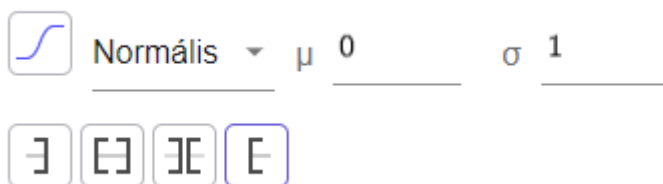
Binomiális (visszatevéses)

Hipergeometrikus (visszatevés nélküli)

**Hogy kell kitölteni a felső részt (legördülő menü és amelletti részek)?**

### Normális eloszlás

**Felismerése: Nem kell felismerni, mert a feladat szövegében meg van adva, hogy normális eloszlásról van szó. De ha nem lenne megadva, akkor onnan ismerhető fel, hogy várható érték és szórás (szórás helyett lehet használni a átlagos eltérés szót is) van megadva.**



Két dolgot kell beírunk, ami nagyon egyszerű lesz, a  $\mu$  lesz a várható érték, a  $\sigma$  pedig a szórás, mind a kettő meg van adva a feladat szövegében

Ha az a kérdés, hogy: Határozzuk meg az átlagra szimmetrikus intervallumot, amelybe a palackok/málnatövek 90 valahány %-os valószínűséggel esnek.

Ha Pl.:92,5%-os valószínűséget kell meghatározni:

1. lépés: Kiszámoljuk a maradék részt:  $100\% - 92,5\% = 7,5\%$
2. lépés: A maradék részt elosztjuk 2-vel (jobbról és balról is ennyi százalék lesz, ami kimarad):  $7,5\% : 2 = 3,75\%$
3. lépés: Ezt hozzáadjuk a 92,5%-hoz:  $92,5\% + 3,75\% = 96,25\%$
4. lépés: A kapott értéket elosztjuk 100-zal:  $96,25 : 100 = 0,9625$
5. lépés: Excelbe beírjuk az alábbi függvényt: `=NORM.INVERZ(X1;X2;X3)`

X1, X2 és X3 helyére számokat írunk be.

X1 helyére írjuk be a kapott % 100-zal elosztott értékét, jelen esetben 0,9625-öt

X2 helyére beírjuk a várható értéket (ez feladat szövegében van megadva)

X3 helyére pedig beírjuk a szórást (ez a feladat szövegében van megadva)

6. lépés: A kapott érték lesz a felső határ

7. lépés: A felső határból kivonjuk a várható értéket

8. lépés: A kapott értéket (7.lépés) Kivonjuk a várható értékből, ez lesz az alsó határ

Példával:

Várható érték: 120

Szórás: 20

92,5%-ra vagyunk kíváncsiak

1. lépés: Kiszámoljuk a maradék részt:  $100\% - 92,5\% = 7,5\%$

2. lépés: A maradék részt elosztjuk 2-vel (jobbról és balról is ennyi százalék lesz, ami kimarad):  
 $7,5\% : 2 = 3,75\%$

3. lépés: A kapott értéket elosztjuk 100-zal:  $3,75 : 100 = 0,0375$

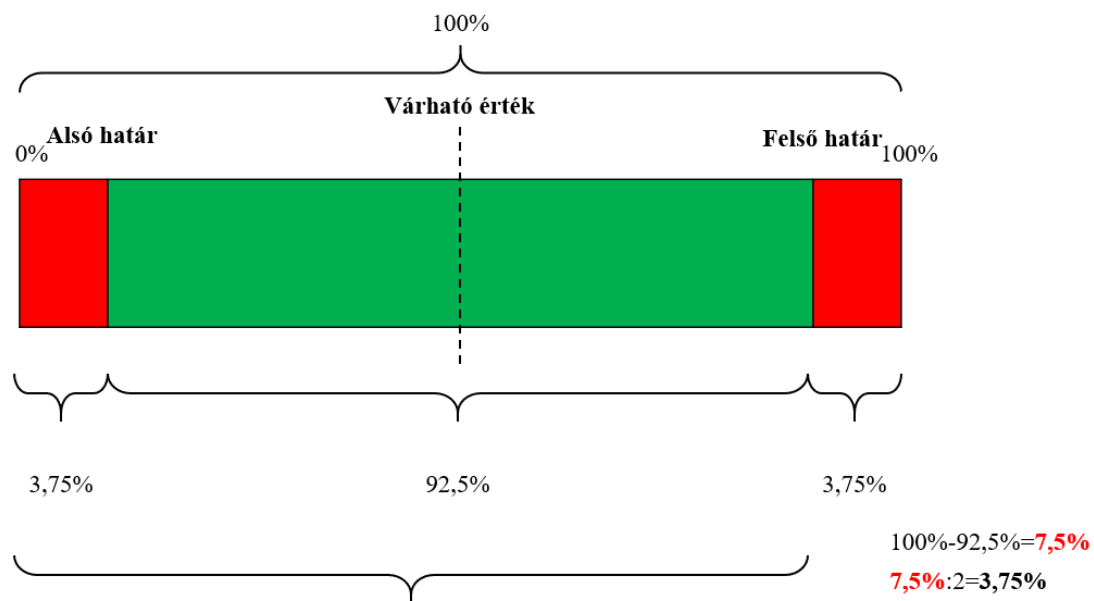
4. lépés: Ezt hozzáadjuk a 92,5%-hoz:  $92,5\% + 3,75\% = 96,25\%$

5. lépés: A kapott értéket elosztjuk 100-zal:  $96,25 : 100 = 0,9625$

**Alsó határ:** =NORM.INVERZ(0,0375;120;20) **84,3907**

**Felső határ:** =NORM.INVERZ(0,9625;120;20) **155,6093**

Tehát Geogebra a 84,3907-et és a 155,6093-at kell beírni.




**Felső határ:** 96,25% → 0,9625

**Alsó határ:** 3,75%-nál → 0,0375



## Exponenciális

**Felismerés:** A feladat szövegében meg van adva, hogy exponenciális eloszlásról van szó.


 Exponenciális  $\lambda$   $\frac{1}{24}$



Itt csak 1 értéket kell megadni, ami fontos, hogy a várható érték reciprokát kell megadni, ha a várható érték (átlag) 24, akkor 1/24-et kell beírni  $\lambda$ -hoz

## Poisson

**Felismerés:** A feladat szövegében meg van adva, hogy Poisson eloszlásról van szó

 Poisson  $\mu$  4




Itt 1 értéket kell megadni, ez megegyezik a várható értékkel (itt nem kell reciprokot megadni, mint az exponenciálisnál. A várható értéket egyenesarányosságból tudjuk kiszámolni. Pl.: Ha megvan adva, hogy 18 perc alatt 3 ügyfelet tud valaki kiszolgálni, akkor 1 perc alatt 1/6 ügyfelet tud kiszolgálni, ha az a kérdés, hogy 13 perc alatt pontosan ... ügyfelet szolgál ki, akkor a várható érték ( $\mu$ )  $13/6=2,167$  lesz


|         |  |
|---------|--|
| 18 perc | 3 ügyfél                                     |
| 1 perc  | $3/18=1/6$ ügyfél                            |
| 13 perc | <b><math>13/6</math> ügyfél=2,167 ügyfél</b> |

## Binomiális (visszatevéses)

**Felismerés:** A feladat szövegében nincs megadva, nekünk kell felismerni. Amiről felismerhető, ha valószínűség %-ban van megadva (egy %-os valószínűség van megadva).

- Ha valamilyen gyártásról van szó, az tipikusan binomiális eloszlás (lámpa gyártás, palackozó gép)
- Onnan ismerhető még fel, ha minőség ellenőrzésről van szó
- Ha selejtes/rossz/hibás vagy jó/hibátlan termékekről van szó

 Binomiális ▾ n 10 p 0.6



Két dolgot kell beírni, az egyik az  $n$  (darabszám), a másik a  $p$  (valószínűség)


$n$ : Ez egyszerű, meg van adva a feladat szövegében

$p$ : Itt arra kell figyelni, hogy a %-os valószínűséget el kell osztani 100-zal (ha 60%-ról van szó, akkor 0,6-ot kell beírni)

## Hipergeometrikus

**Felismerés:** A feladat szövegében nincs megadva, nekünk kell felismerni. Amiről felismerhető, ha nincs a feladat szövegében, hogy Poisson, Exponenciális, Normális, és nincs benne %-os valószínűség sem megadva (5 közül kizárunk 4-et)

### - Ha kártyáról van

 Hipergeometrikus ▾ populáció 60 n 10 minta 20

3 dolgot kell beírunk, az egyik a populáció, a másik az n, a harmadik a minta

Populáció: Amennyi dolog összesen van

n: A húzások száma

minta: Amennyi van az adott dologból az összes között

Kártyás példával:

1. példa: Magyar kártyából húzunk 5 lapot, mennyi a valószínűsége, hogy legalább 2 ászt húzunk?

**Populáció: 32** (32 lap van a magyar kártyában)

**n: 5** (5 kártyát húzunk)

**minta: 4** (4 ász van a pakliban, mind a 4 színből van 1-1 ász)

A legalább 2-t pedig az alsó részre fogjuk beírni

 Hipergeometrikus ▾ populáció 32 n 5 minta 4

$P(X \geq 2) = 0.1053$

2. példa: Magyar kártyából húzunk 3 lapot, mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 1 pirosat húzunk?

**Populáció: 32** (32 lap van a magyar kártyában)

**n: 3** (3 kártyát húzunk)

**minta: 8** (minden színből 8 kártya van 8+8+8+8 adja ki az 32 kártyát)

A legfeljebb 1-t pedig az alsó részre fogjuk beírni

 Hipergeometrikus ▾ populáció 32 n 3 minta 8

$P(X \leq 1) = 0.8532$



### Fülek:

Első fül: Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy valamennyinél kevesebb esetnek mennyi a valószínűsége (itt kevesebb, mint 5 (azért 5-nél kevesebb, mert az egyenlőség meg van engedve, tehát ez a 0,1,2,3,4 eseteket számolja ki), vagy meg fogalmazható úgy is, hogy legfeljebb 4)



$$P(X \leq 4) = 0.1587$$

Második fül: Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy két érték között mennyi a valószínűség (itt 4 és 6 között)



$$P(4 \leq X \leq 6) = 0.6827$$

Ugyanezen a fülön írhatjuk be azt is, ha egy konkrét eset valószínűségére vagyunk kíváncsiak (ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy 3 darab esetén mennyi a valószínűség, akkor mind a két helyre 3-at írunk)



$$P(3 \leq X \leq 3) = 0.2819$$

Harmadik fül: Ezt nem nagyon fogjuk használni, de azt adná meg, hogy valaminél kevesebb, vagy valaminél nagyobb esetnek mennyi a valószínűsége

Negyedik fül: Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy valamennyinél több esetnek mennyi a valószínűsége (itt több, mint 1 (azért 1-nél több, mert az egyenlőség meg van engedve, tehát ez a 2,3,4,5 ... eseteket számolja ki), vagy meg fogalmazható úgy is, hogy legalább 2)



$$P(2 \leq X) = 0.9162$$

## Döntéssel feladat

|         |             | a tavaszi időjárás |         |            |
|---------|-------------|--------------------|---------|------------|
|         |             | fagyos             | átlagos | napsütéses |
| Virágok | Tulipán     | 150                | 280     | 220        |
|         | Nárcisz     | 160                | 260     | 240        |
|         | Orgona      | 150                | 200     | 320        |
|         | Gyöngyvirág | 165                | 180     | 180        |

165 cellában  $180 - 3k$  szerepel,  $k=5$ -tel lesz  $180 - 3 \cdot 5 = 165$

### Kérdések:

a) Melyiket válassza, ha optimista? (ha szélsőségesen optimista van a feladat szövegében az sem jelent különbséget a megoldásban)

|         |             | a tavaszi időjárás |         |            |            |
|---------|-------------|--------------------|---------|------------|------------|
|         |             | fagyos             | átlagos | napsütéses | Max        |
| Virágok | Tulipán     | 150                | 280     | 220        | 280        |
|         | Nárcisz     | 160                | 260     | 240        | 260        |
|         | Orgona      | 150                | 200     | 320        | <b>320</b> |
|         | Gyöngyvirág | 165                | 180     | 180        | 180        |

1. lépés: Csinálunk egy plusz Max oszlopot és soronként megkeressük a maximumokat

2. lépés: A Max oszlopban megkeressük a legnagyobb értéket, ez a 320 lesz, tehát az **orgonát választja.**

**b) Melyiket választja, ha pesszimista? (ha szélsőségesen pesszimista van a feladat szövegében az sem jelent különbséget a megoldásban)**

|         |             | a tavaszi időjárás |         |             |            |
|---------|-------------|--------------------|---------|-------------|------------|
|         |             | fagyos             | átlagos | nap sütéses | Min        |
| Virágok | Tulipán     | 150                | 280     | 220         | 150        |
|         | Nárcisz     | 160                | 260     | 240         | 160        |
|         | Orgona      | 150                | 200     | 320         | 150        |
|         | Gyöngyvirág | 165                | 180     | 180         | <b>165</b> |

1. lépés: Csinálunk egy plusz Min oszlopot és soronként megkeressük a minimumokat

2. lépés: A Min oszlopban megkeressük a **legnagyobb** értéket, ez a 165 lesz, tehát a **gyöngyvirágot választja**.

(Itt fontos, hogy először minimumot keressük soronként, viszont a Min oszlopban a maximális értéket fogjuk keresni)

c) Melyiket választja, ha az elmulasztott nyereség alapján dönt?

|         |             | a tavaszi időjárás |         |            |
|---------|-------------|--------------------|---------|------------|
|         |             | fagyos             | átlagos | napsütéses |
| Virágok | Tulipán     | 150                | 280     | 220        |
|         | Nárcisz     | 160                | 260     | 240        |
|         | Orgona      | 150                | 200     | 320        |
|         | Gyöngyvirág | 165                | 180     | 180        |

1. lépés: Megkeressük a legnagyobb értéket oszloponként:

Fagyos oszlopnál: **165**

Átlagos oszlopnál: **280**

Napsütéses oszlopnál: **320**

2. lépés: Lemásoljuk a táblázatot, minden cellába az oszloponkénti legnagyobb érték és az aktuális érték különbsége kerül

|         |             | a tavaszi időjárás |             |             |
|---------|-------------|--------------------|-------------|-------------|
|         |             | fagyos             | átlagos     | napsütéses  |
| Virágok | Tulipán     | 165-150=15         | 280-280=0   | 320-220=100 |
|         | Nárcisz     | 165-160=5          | 280-260=20  | 320-240=80  |
|         | Orgona      | 165-150=15         | 280-200=80  | 320-320=0   |
|         | Gyöngyvirág | 165-165=0          | 280-180=100 | 320-180=140 |

A táblázat így fog kinézni (a felső táblázatba odaírtam a műveleteket is, hogy látszódjon, mi hogy jön ki):

|         |             | a tavaszi időjárás |         |            |
|---------|-------------|--------------------|---------|------------|
|         |             | fagyos             | átlagos | napsütéses |
| Virágok | Tulipán     | 15                 | 0       | 100        |
|         | Nárcisz     | 5                  | 20      | 80         |
|         | Orgona      | 15                 | 80      | 0          |
|         | Gyöngyvirág | 0                  | 100     | 140        |

3. lépés: csinálunk egy Max oszlopot:

|         |             | a tavaszi időjárás |         |            | Max |
|---------|-------------|--------------------|---------|------------|-----|
|         |             | fagyos             | átlagos | napsütéses |     |
| Virágok | Tulipán     | 15                 | 0       | 100        | 100 |
|         | Nárcisz     | 5                  | 20      | 80         | 80  |
|         | Orgona      | 15                 | 80      | 0          | 80  |
|         | Gyöngyvirág | 0                  | 100     | 140        | 140 |

4. lépés: A Max oszlopban megkeressük a minimális értéket, ez jelen esetben a 80 lesz, ez kétszer is előfordul, vagyis **a nárciszt vagy az orgonát választja**.

(Itt fontos, hogy soronként a maximumokat keressük, viszont az Max oszlopban a minimumot fogjuk keresni)

**d) Melyiket válassza, ha minden időjárási tényező azonos valószínűségű?**

1. lépés: Csinálunk egy átlag oszlopot, amibe az egyes sorok átlagát határozzuk meg:

|         |             | a tavaszi időjárás |         |            |                |
|---------|-------------|--------------------|---------|------------|----------------|
|         |             | fagyos             | átlagos | napsütéses | Átlag          |
| Virágok | Tulipán     | 150                | 280     | 220        | 216,667        |
|         | Nárcisz     | 160                | 260     | 240        | 220            |
|         | Orgona      | 150                | 200     | 320        | <b>223,333</b> |
|         | Gyöngyvirág | 165                | 180     | 180        | 175            |

Az átlagokat kiszámolhatjuk a hagyományos módszerrel is, de használhatjuk az excel átlag függvényével is =átlag(C3:E3) (Ha a tulipán fagyos értéke van a C3 cellában, a tulipán napsütéses értéke pedig az E3 cellában)

Hagyományos módon kiszámolva az átlagok:

$$\text{Tulipán: } \frac{150 + 280 + 220}{3} = \mathbf{216,667}$$

$$\text{Nárcisz: } \frac{160 + 260 + 240}{3} = \mathbf{220}$$

$$\text{Orgona: } \frac{150 + 200 + 320}{3} = \mathbf{223,333}$$

$$\text{Gyöngyvirág: } \frac{165 + 180 + 180}{3} = \mathbf{175}$$

2. lépés: Ezek közül megkeressük a maximális értéket, ami a 223,333 lesz, ez azt jelenti, hogy **az orgonát választja.**

e) Melyiket választja, ha ismert az időjárás tényezők valószínűsége? A napsütéses időjárás valószínűsége 50%, az átlagos időjárásé pedig 30%.

1. lépés: Kiszámoljuk a fagyos valószínűséget (A fagyos, az átlagos és napsütéses valószínűségek összege ki kell, hogy adja a 100%-ot)

**Fagyos:**  $100\% - 50\% - 30\% = 20\%$

2. lépés: Csinálunk egy plusz sort a táblázat alá, ahova beírjuk a valószínűségeket 100-zal elosztva ( $50\% \rightarrow 0,5$ ,  $30\% \rightarrow 0,3$ ,  $20\% \rightarrow 0,2$ )

|              |             | a tavaszi időjárás |            |            |
|--------------|-------------|--------------------|------------|------------|
|              |             | fagyos             | átlagos    | napsütéses |
| Virágok      | Tulipán     | 150                | 280        | 220        |
|              | Nárcisz     | 160                | 260        | 240        |
|              | Orgona      | 150                | 200        | 320        |
|              | Gyöngyvirág | 165                | 180        | 180        |
| Valószínűség |             | <b>0,2</b>         | <b>0,3</b> | <b>0,5</b> |

3. lépés: Csinálunk egy Várható érték oszlopot, és kiszámoljuk benne a várható értékeket súlyozással (ez azt jelenti, hogy minden értéket beszorzunk az adott oszlop valószínűségével, és ezeket összeadjuk)

|              |             | a tavaszi időjárás |            |            | Várható érték |
|--------------|-------------|--------------------|------------|------------|---------------|
|              |             | fagyos             | átlagos    | napsütéses |               |
| Virágok      | Tulipán     | 150                | 280        | 220        | 224           |
|              | Nárcisz     | 160                | 260        | 240        | 230           |
|              | Orgona      | 150                | 200        | 320        | <b>250</b>    |
|              | Gyöngyvirág | 165                | 180        | 180        | 177           |
| Valószínűség |             | <b>0,2</b>         | <b>0,3</b> | <b>0,5</b> |               |

Számolás:

$$\text{Tulipán: } 150 \cdot 0,2 + 280 \cdot 0,3 + 220 \cdot 0,5 = 224$$

$$\text{Nárcisz: } 160 \cdot 0,2 + 260 \cdot 0,3 + 240 \cdot 0,5 = 230$$

$$\text{Orgona: } 150 \cdot 0,2 + 200 \cdot 0,3 + 320 \cdot 0,5 = 250$$

$$\text{Gyöngyvirág: } 165 \cdot 0,2 + 180 \cdot 0,3 + 180 \cdot 0,5 = 177$$

4. lépés: Megkeressük a Várható érték oszlopban a maximális értéket, ez 250 lesz, vagyis az **orgonát fogja választani.**

**f) Melyiket választja, ha a Hurwitz kritérium alapján dönt és  $\alpha=0,2$ ?**

1. lépés: Csinálunk egy  $H(\alpha)$  oszlopot, amibe kiszámoljuk soronként az értékeket a

$$H(\alpha) = \alpha \cdot \mathit{max} + (1 - \alpha) \cdot \mathit{min} \text{ képlet alapján}$$

Ahol:

$$\alpha = 0,2$$

$$1 - \alpha = 1 - 0,2 = 0,8$$

$\mathit{max}$  = a sor maximális értéke

$\mathit{min}$  = a sor minimális értéke

|         |             | a tavaszi időjárás |            |            |             |
|---------|-------------|--------------------|------------|------------|-------------|
|         |             | fagyos             | átlagos    | napsütéses | $H(\alpha)$ |
| Virágok | Tulipán     | <b>150</b>         | <b>280</b> | 220        | 176         |
|         | Nárcisz     | <b>160</b>         | <b>260</b> | 240        | 180         |
|         | Orgona      | <b>150</b>         | 200        | <b>320</b> | <b>184</b>  |
|         | Gyöngyvirág | <b>165</b>         | <b>180</b> | <b>180</b> | 168         |

$$\textit{Tulipán}: 0,2 \cdot \mathbf{280} + 0,8 \cdot \mathbf{150} = \mathbf{176}$$

$$\textit{Nárcisz}: 0,2 \cdot \mathbf{260} + 0,8 \cdot \mathbf{160} = \mathbf{180}$$

$$\textit{Orgona}: 0,2 \cdot \mathbf{320} + 0,8 \cdot \mathbf{150} = \mathbf{184}$$

$$\textit{Gyöngyvirág}: 0,2 \cdot \mathbf{180} + 0,8 \cdot \mathbf{165} = \mathbf{168}$$

2. lépés:  $H(\alpha)$  oszlopban megkeressük a maximális értéket, ez 184 lesz, vagyis **az orgonát választja.**